

SOLIDES ET VOLUMES : LE CUBE ET LE PAVE



« La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les
Mathématiques et enseigner les Mathématiques. »

Siméon Denis Poisson¹

I.	Solides : Observation et Description.	2
II.	Représentation en perspective cavalière.	4
III.	Patron du pavé droit.	6
IV.	D'autres patrons de solides.	8
V.	Longueur des arêtes et Aire des faces.	10
VI.	Volume d'un solide.	11
VII.	Volumes du cube et du pavé.	13
VIII.	Pour préparer le test et le contrôle.	15

➤ Pré-requis pour prendre un bon départ :

Surfaces : définition, unités.				
Utilisation d'un tableau de conversion.				
Périmètre des figures de base (carré, rectangle...).				
Aires des figures de base (carré, rectangle ...).				
Calcul de périmètres et aires de figures complexes : méthode par addition.				
Calcul de périmètres et aires de figures complexes : méthode par soustraction.				

¹ Siméon Denis Poisson (1781-1840) : Grand mathématicien, géomètre et physicien français.

I. SOLIDES : OBSERVATION ET DESCRIPTION.

Définitions :

- Un **solide**, au sens géométrique, est un objet délimité par des surfaces indéformables.
- Les surfaces d'un solide délimitent l'intérieur et l'extérieur du solide.
- Ces **surfaces**, quand elles sont **planes**, s'appellent des **faces**.

Remarque : Beaucoup de solides n'ont pas de surfaces planes : la plus évidente est la boule (ou sphère).

En 6^{ème}, l'étude porte sur les solides à surfaces planes les plus simples :

- le **pavé** (aussi appelé **parallélépipède rectangle, ou brique**),
- et un de ses cas particuliers : le **cube** (**le cube fait donc partie de la famille des pavés**).

En 5^{ème}, on étudiera le prisme et le cylindre. En 4^{ème}, la pyramide et le cône. En 3^{ème}, la sphère.

A. Le Parallélépipède² rectangle ou Pavé ou Brique :



Un pavé pourrait être considéré intuitivement comme un *empilement de rectangles tous identiques*.

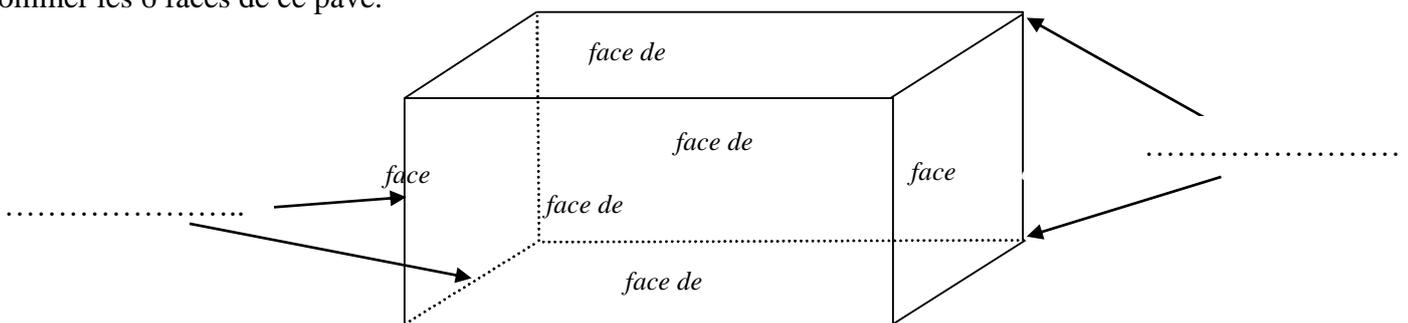
C'est ce qui se passe par exemple pour un paquet de feuilles : chaque feuille est un rectangle et c'est la « grande » quantité de feuilles correctement empilées qui fait apparaître un solide en forme de pavé.



B. Vocabulaire et figure :

1. Un pavé est délimité par ses **faces** qui sont des superposables 2 à 2.
On compte faces rectangulaires qui s'appellent : la face de devant, la face de
.....
2. Les faces se rejoignent en des segments appelés
Un pavé a **arêtes** qui sont les côtés (les intersections) des faces.
Les arêtes sont appelées plus couramment **les bords**.
3. Les arêtes se rejoignent en des points appelés
On compte **sommets** qui sont les extrémités (les intersections) des arêtes.
Les sommets sont appelés plus couramment **les coins**.

Nommer les 6 faces de ce pavé.

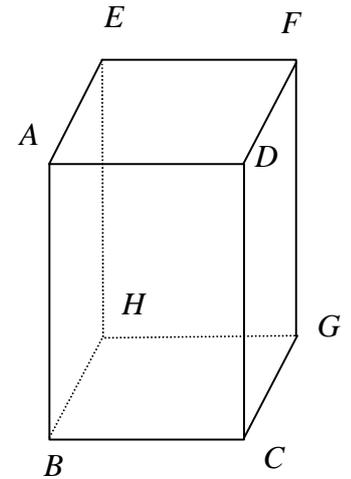


² Etymologie : le mot parallélépipède est composé de « parallèle » et de « epepidon » qui veut dire surface en grec.

Dans la suite du cours, les 3 dimensions d'un pavé seront appelées communément : la longueur (ou largeur), la profondeur et la hauteur.

➤ Exercice 1 : La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle.

- 1. Nommer la face de dessous :
2. Nommer la face de derrière :
3. Nommer toutes les faces contenant l'arête [AB] :
4. Nommer l'arête commune aux faces du dessus et de derrière :
5. Nommer toutes les arêtes contenant le sommet C :
6. Nommer toutes les arêtes parallèles à [BH] :
7. Nommer 4 arêtes de même longueur :

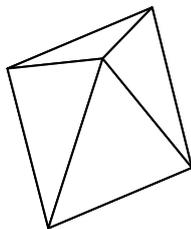


➤ Exercice 2 : Pour chacun des solides suivants, donner le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.

Pour ces exercices, il faut avoir une bonne méthode de comptage : par exemple du haut vers le bas.

1. Pour la pyramide à base quadrilatère :

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =

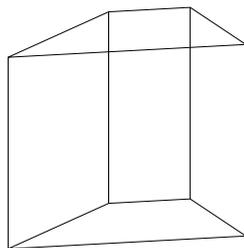


4. Et pour un prisme ayant pour base un polygone à 10 côtés ? Hein ?

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =

2. Pour le prisme à base trapézoïdale :

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =

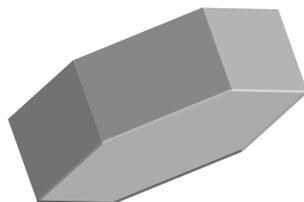


5. Et pour un prisme ayant pour base un polygone à 120 côtés ?

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =

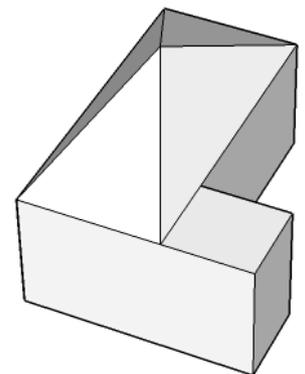
3. Pour le prisme à base hexagonale :

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =



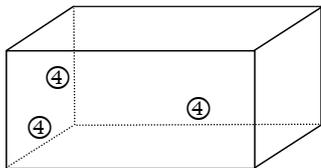
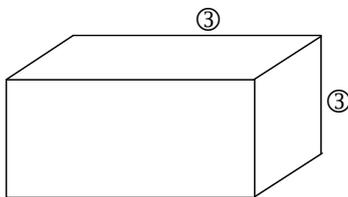
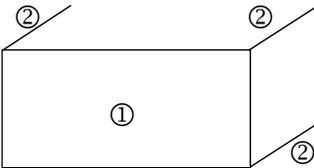
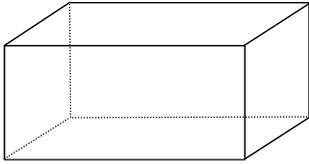
6. Pour cette maison :

- Nombre de sommets =
Nombre d'arêtes =
Nombre de faces =



II. REPRESENTATION EN PERSPECTIVE CAVALIERE.

Lorsqu'on dessine, on est confronté au problème suivant : représenter dans un espace plat en 2 dimensions (la feuille, le cahier), un objet qui lui est en 3 dimensions dans la réalité ! Même problème pour la Télévision en 3D ou pour la cartographie.



On veut par exemple représenter le pavé ci-contre. Certaines conventions (règles) sont à respecter pour que le dessin soit compris par tous.

- ① La face avant est représentée non déformée en premier par un rectangle.
- ② Parmi les arêtes des autres faces, 3 semblent fuir vers l'arrière, en oblique.

On les dessine en 2^{ème}, **parallèles et de même longueur**.

Mais pour bien simuler la profondeur, on va réduire un peu ces longueurs (d'un tiers par exemple).

- ③ Les 2 arêtes visibles de la face arrière sont dessinées en traits pleins ensuite.

- ④ Enfin **les arêtes cachées sont dessinées en traits pointillés**. La face arrière apparaît alors comme un rectangle superposable à la face de devant.

Ce type de dessin porte le nom de perspective cavalière.

Conventions de la perspective cavalière³.

- ❶ **Les segments parallèles et de même longueur dans la réalité restent parallèles et de même longueur sur un dessin en perspective.**
- ❷ **Les angles ne sont pas toujours respectés dans un dessin en perspective (ils le sont seulement sur les faces avant et arrière).**

Remarque : Il existe d'autres perspectives ! Par exemple celle que l'on peut voir sur une photographie. En effet sur une photo, les droites parallèles fuyant vers le "fond" de la photo semblent se rapprocher l'une de l'autre (par exemple les rails parallèles d'une ligne de chemin de fer). C'est la perspective fuyante.

³ **Perspective cavalière** : de l'italien *cavalliere*, qui va à cheval.

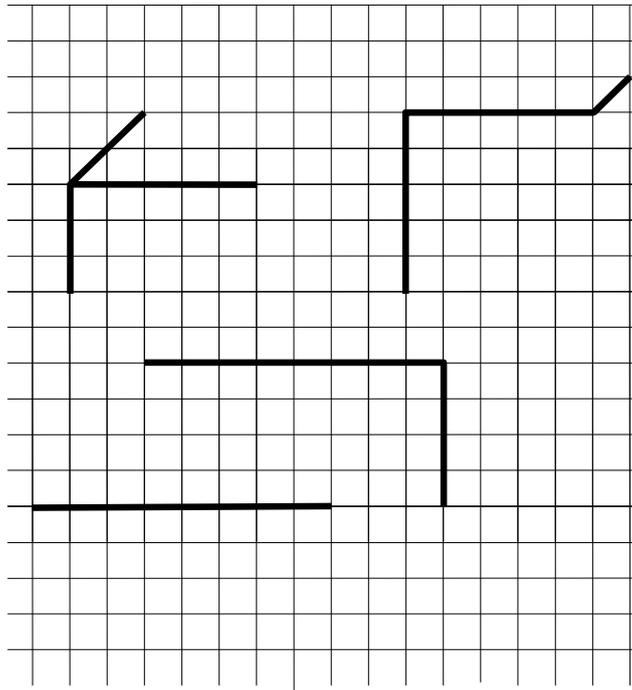
L'origine de cette expression est militaire, et on a dit aussi "perspective militaire" ; il s'agit d'une perspective utilisée dans le dessin d'architecture militaire pour représenter des fortifications.

Un cavalier est une fortification en terre en arrière d'autres constructions et surélevée.

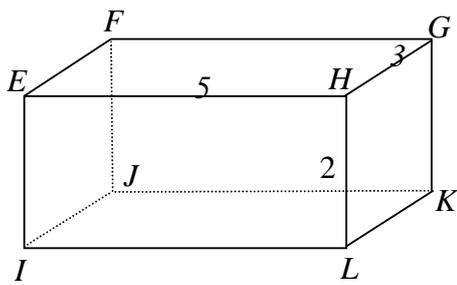
La vue cavalière est alors la vue qu'a un observateur situé sur le haut du cavalier sur ces constructions plus basses et les alentours.

La perspective cavalière est le procédé utilisé par le dessinateur de fortifications pour rendre la vue cavalière.

➤ Exercice 1 : Terminer les 3 dessins en perspective des 3 pavés suivants :



➤ Exercice 2 :



Voici la représentation en perspective cavalière d'un pavé EFGHIJKL avec EHLI en face avant (mesures non respectées).

On va le représenter sur la page de gauche de 3 nouvelles manières, en respectant les longueurs données :

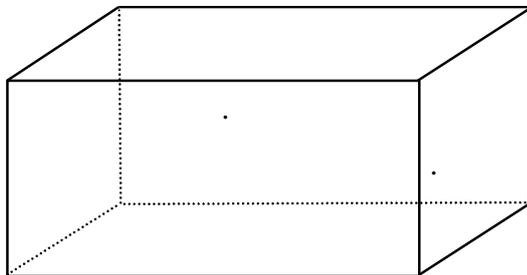
$$HL = 2 \text{ cm} \quad EH = 5 \text{ cm} \quad HG = 3 \text{ cm}$$

1. Représenter ce même pavé en choisissant EFGH comme face avant et FJKG comme face du dessus.

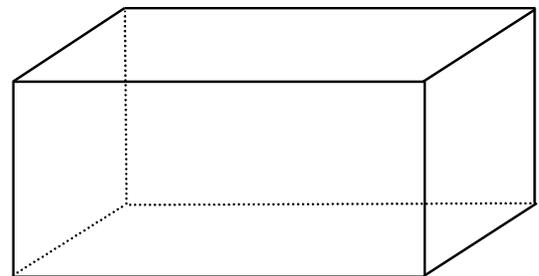
Compléter d'abord le croquis ① ci-dessous avec les noms des sommets et les mesures.

2. Représenter ce même pavé en choisissant HGKL comme face avant et GKJF comme face de droite.
3. Représenter ce même pavé en choisissant EFGH comme face avant et EFJI comme face du dessus.

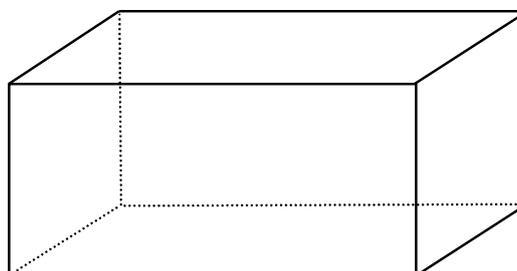
croquis ①



croquis ②



croquis ③



III. PATRONS DU PAVE DROIT ET DU CUBE.

Quand on ouvre certaines boîtes en forme de pavé, on s'aperçoit qu'il y a des languettes pour tenir la boîte fermée et permettre un collage facile. Ces languettes ne sont pas des faces du pavé ! Si on enlève ces languettes, on peut déplier complètement la boîte et on obtient ce qu'on appelle le patron du pavé.

Définition : Le **patron d'un solide** est une figure plane en 2 dimensions.

Le patron permet de reconstruire, après pliage et collage, l'objet qui représente ce solide dans l'espace.

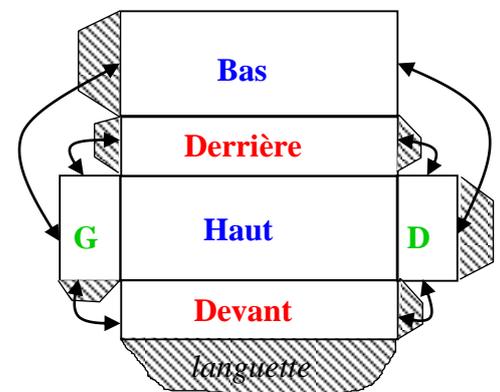
➤ Remarques :

• **Les languettes de collage ne font pas partie du patron !**

• Le point essentiel dans la confection (fabrication) d'un patron est la disposition correcte des différentes faces afin qu'elles se recollent parfaitement après pliage.

➤ Utilité :

Le patron permet d'étudier les faces d'un solide et de comprendre comment sont placées les arêtes de même longueur (ce qui est signalé par les doubles flèches sur le schéma ci-dessous).

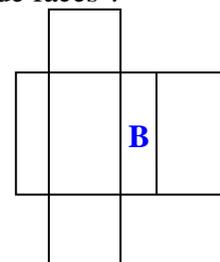
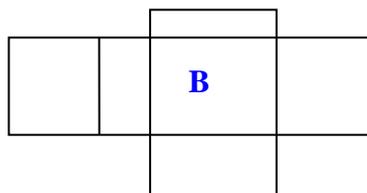


A. Patron du pavé :

Dans le patron d'un pavé droit, les faces rectangulaires vont toujours par paires (**Devant-Derrière ; Haut-Bas ; Gauche-Droite**).

➤ Exercice 1 : Mettre les noms des faces sur ces patrons.

Ces figures sont-elles les patrons de pavés ? Sinon, à cause de quelle(s) paire(s) de faces ?

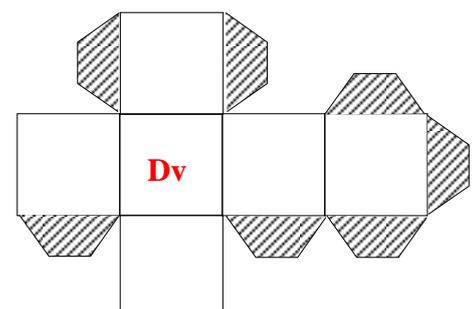


B. Patron du cube :

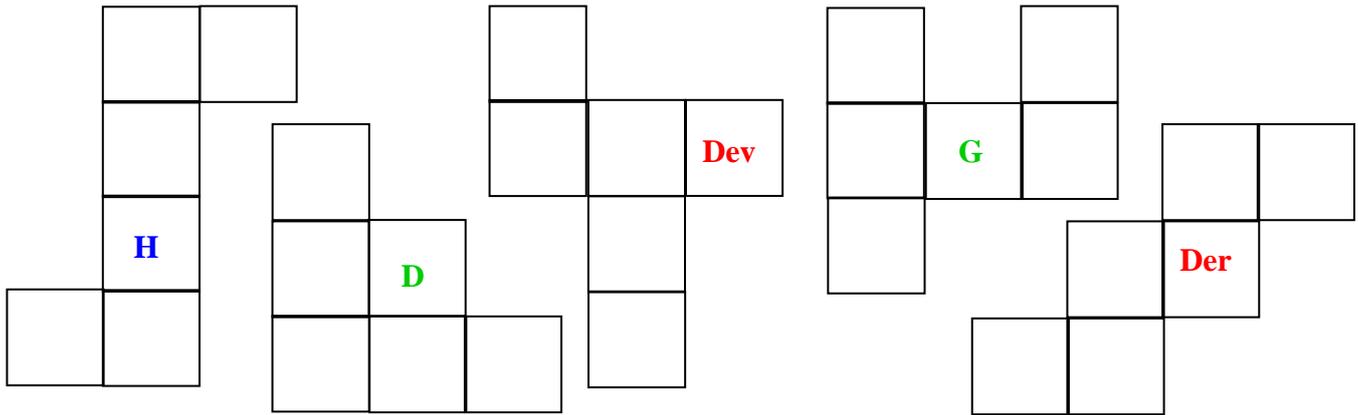
➤ Voici un exemple de patron du cube (avec les languettes de collage).

Pour un cube, le patron est plus simple que celui du pavé car les 6 faces sont 6 identiques.

Mettre les noms des faces.



➤ Exercice 2 : Pour chaque figure, compléter tous les noms des faces puis indiquer quels patrons sont ceux d'un cube.



Remarque : il y a en fait **11** patrons pour le cube, visible sur le [site internet de Thérèse Eveilleau](#).

➤ Exercice 3 :

1. Réaliser le patron d'un pavé dont les 3 dimensions sont 2 cm, 3 cm et 4 cm.
2. Réaliser le patron d'un cube de 2 cm d'arête.

IV. D'AUTRES PATRONS DE SOLIDES.

Définitions :

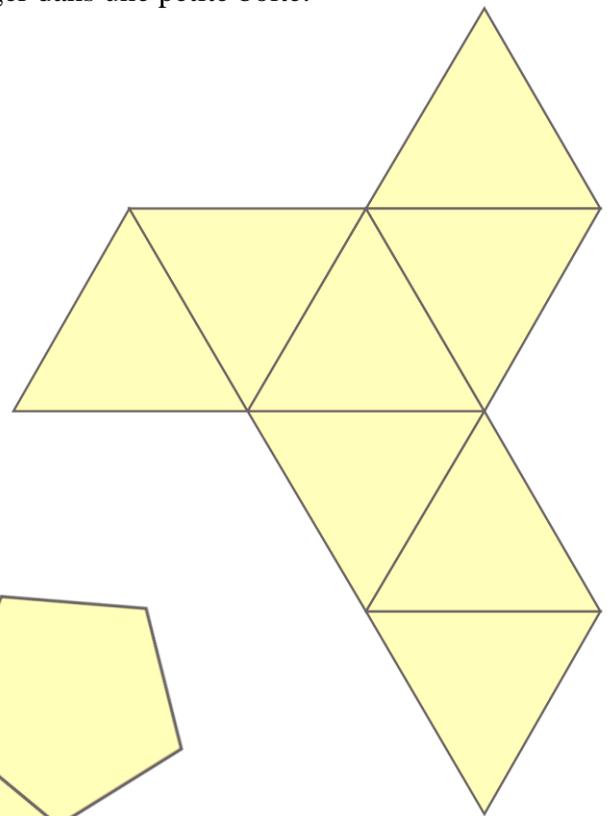
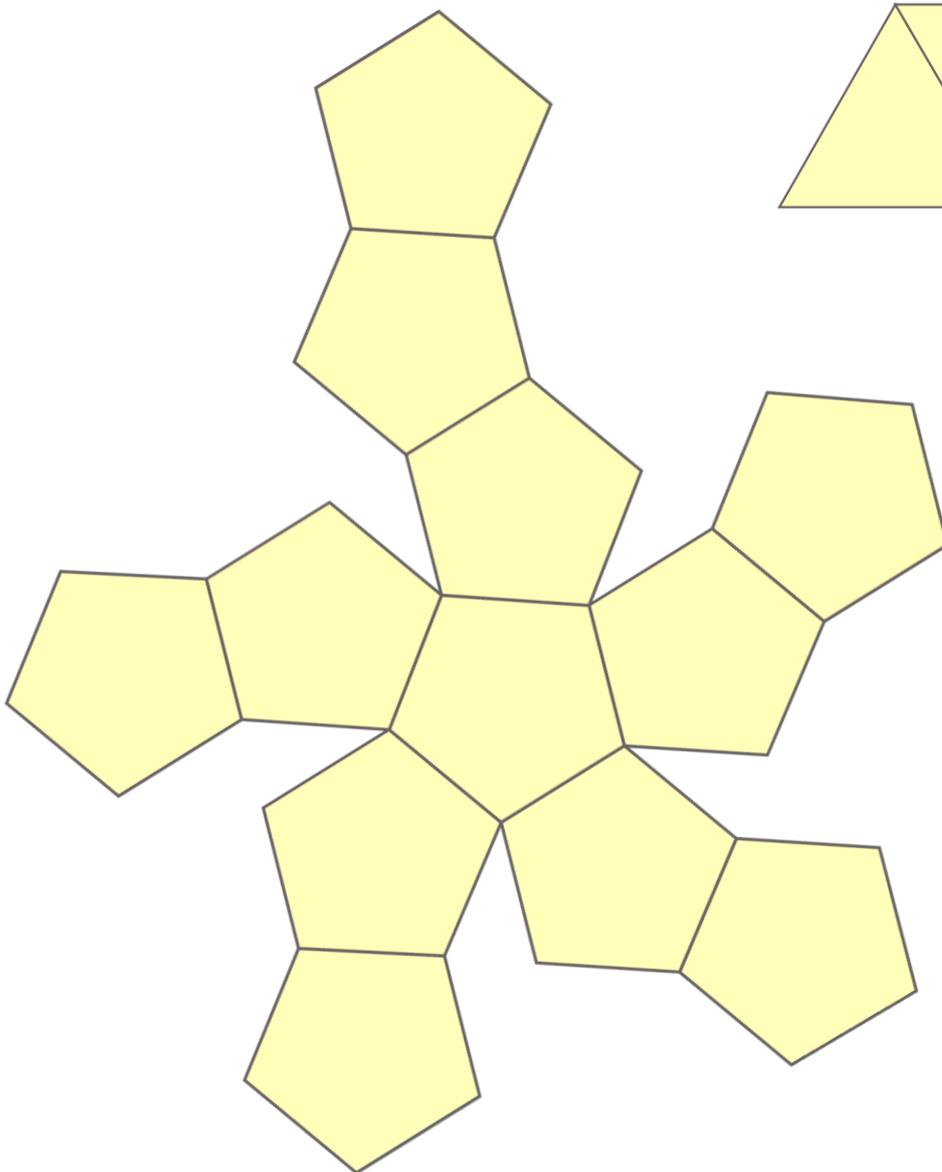
- ❶ Un solide dont les faces sont des polygones (pas forcément « identiques ») s'appelle un **polyèdre**.
 - ❷ Lorsque ces faces sont toutes des **polygones réguliers** (faces donc « identiques »), alors le **polyèdre** est dit **régulier**. Citer un polygone régulier : Citer un polygone non régulier :
- Le Palais de la Découverte à Paris possède une belle collection de polyèdres.

Exercice : Grâce aux **polyèdres réguliers**, on fabrique toutes sortes de nouveaux dés à tirer (autres que le traditionnel dé à 6 faces) très utiles pour les jeux de rôles ou les wargames.

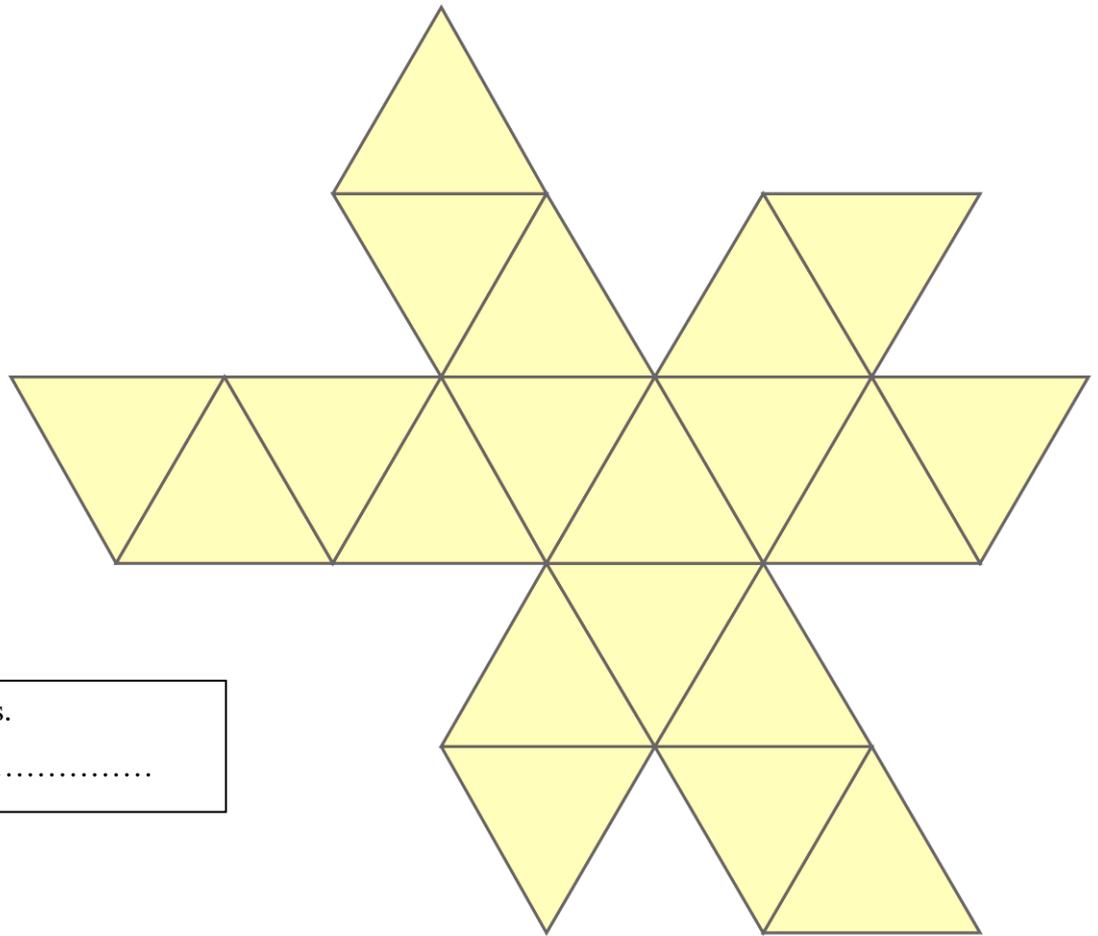
Pour chaque polyèdre suivant :

1. Dire de quel dé à combien de faces il s'agit puis trouver son nom sur Internet.
2. Décorer d'abord les faces. Puis découper ces patrons pour fabriquer ces polyèdres. Penser à placer des languettes qui serviront au collage des faces. Les ranger dans une petite boîte.

Dé à faces.
Nom =

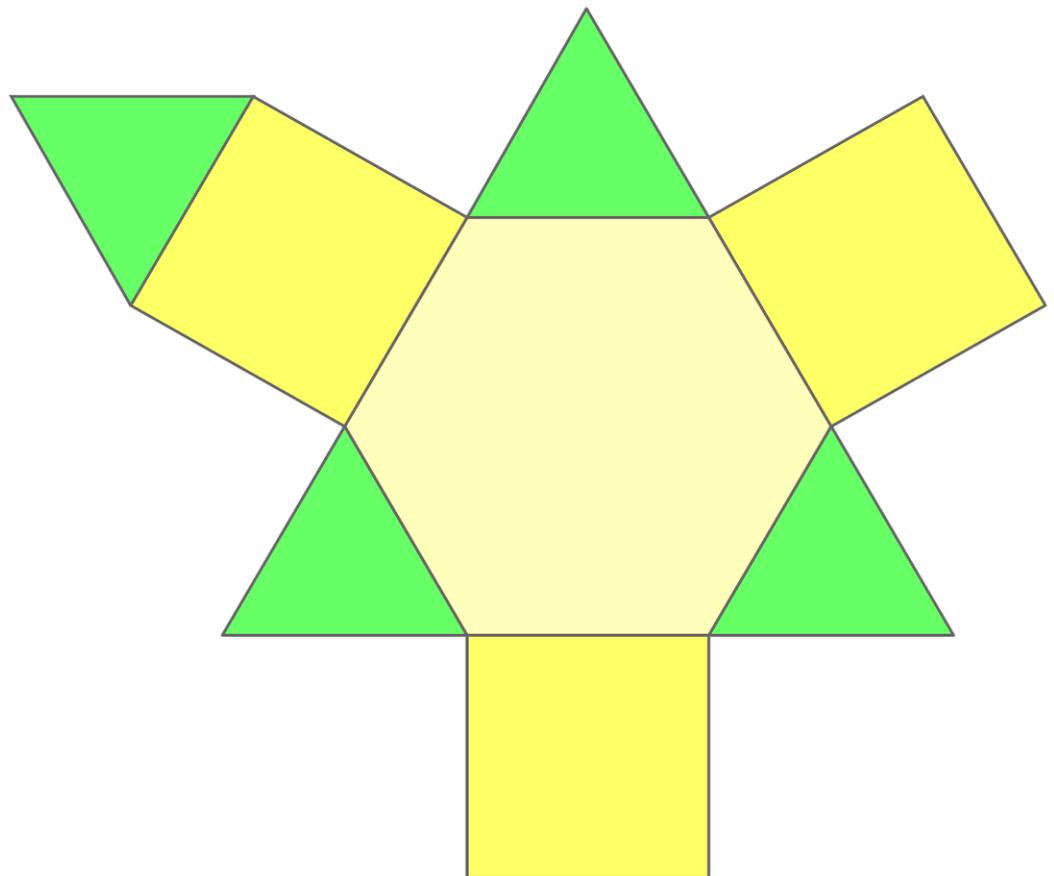


Dé à faces.
Nom =



Dé à faces.
Nom =

- 3. Chercher combien il y a de polyèdres réguliers et leurs noms :
- 4. Peut-on utiliser ce dernier polyèdre ci-dessous comme dé ? Pourquoi ?



V. LONGUEUR DES ARETES ET AIRE DES FACES.

Comme nous l'avons vu p.6, un pavé (respectivement un cube), est constitué de 6 faces planes qui sont toutes des (respectivement toutes des).

Définition : On appelle aire du pavé, l'aire totale des 6 faces réunies du pavé.

Remarque : Plus généralement, **l'aire d'un polyèdre est l'aire du patron de ce polyèdre.**

➤ Exercice 1 : Un pavé a pour dimensions : 12 cm, 2 cm et 5 cm. **Croquis d'abord !**

1. Calculer la longueur totale des arêtes.

2. Calculer l'aire totale des faces.

➤ Exercice 2 : Les arêtes d'un cube ont pour longueur 5 cm. **Croquis d'abord !**

1. Calculer la longueur totale des arêtes.

2. Calculer l'aire totale des faces.

➤ Exercice 3 : La longueur *totale* de toutes les arêtes d'un cube est de 48 cm. **Croquis d'abord !**

1. Quelle est la longueur d'une arête ?

2. Quelle est l'aire totale des faces ?

Exemple : Pour passer des dm^3 au m^3 , il faudra diviser par 1 000.

Pour convertir des dam^3 au cm^3 , il faudra multiplier par $1\ 000 \times 1\ 000 \times 1\ 000$, ce qui correspond au schéma de conversion $dam^3 \rightarrow m^3 \rightarrow dm^3 \rightarrow cm^3$ (3 flèches donc 3 multiplications par 1 000).

C. Autres unités de volumes :

Il existe un autre système d'unités qui est utilisé couramment pour les liquides contenus dans des solides. On les appelle les **unités de capacité**. La principale est le litre.

Définition : Un litre est la contenance d'un solide de volume $1\ dm^3$. **Donc 1 litre = $1\ dm^3$.**

Multiples et sous multiples du litre : hl, dal, dl, ml. Ces unités sont chacune **10 fois** plus grande que celle qui lui est juste inférieure. D'où le nouveau tableau de conversion, complet cette fois ci !

km^3			hm^3			dam^3			m^3 (U.S.I)			dm^3			cm^3			mm^3					
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>kl</i>	<i>hl</i>	<i>dal</i>	<i>l</i>	<i>dl</i>	<i>cl</i>	<i>ml</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>		

➤ **Exercice 1 :** Convertir en dm^3 les volumes suivants :

$3,75\ hl =$ $540\ dal =$ $3\ 570\ dl =$ $480\ 000\ ml =$

Exprimer en litres les volumes suivants :

$430\ cm^3 =$ $36\ dm^3 =$ $52\ 000\ mm^3 =$

➤ **Exercice 2 :** Ranger les volumes suivants par ordre décroissant :

$3\ l$ $400\ cm^3$ $350\ ml$ $0,45\ dm^3$

➤ **Exercice 3 :** Effectuer :

$A = 25\ dm^3 + 4\ 200\ cm^3 + 0,072\ m^3$
=

$V = 568\ dm^3 - 7\ 500\ cm^3$
=

➤ **Exercice 4 :** On a assemblé 3 pavés droits de volumes : $0,05\ m^3$, $17\ dm^3$, $3\ 000\ cm^3$.

Quel est le volume du solide obtenu ?

➤ Exercice 5 : Dans un cube de $53,1 \text{ dm}^3$, on creuse un trou de $5\,200 \text{ cm}^3$. Quel est le volume du solide restant ?

VII. VOLUMES DU CUBE ET DU PAVE.

Définition :

Mesurer le volume d'un solide, c'est trouver le nombre de volumes unité qu'on peut placer dans ce solide.

A. Volume du cube :

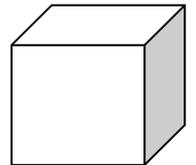
Le volume d'un cube s'obtient en calculant le produit de ses 3 dimensions. D'où la formule suivante pour le volume du cube :

$$\mathcal{V}(\text{Cube}) = \text{côté} \times \text{côté} \times \text{côté}$$

➤ Application : Quel est le volume d'un cube dont les arêtes ont pour longueur 5 cm ?

Méthode : • Faire d'abord un croquis lisible et complet.

- Puis on applique la formule :



B. Volume du pavé :

Imaginons que l'on aligne 3 cubes, on obtient une bande de 3 cubes.

Puis on accole 4 bandes identiques, on obtient une épaisseur de $4 \times 3 = 12$ cubes.

Puis on entasse 5 épaisseurs identiques, on obtient un pavé composé de $5 \times 12 = 60$ petits cubes.

Ainsi, en prenant le cube de départ pour unité, le volume du pavé formé vaut $3 \times 4 \times 5 = 60$ u.v.

D'où la formule suivante pour le **volume d'un pavé** :

$$\mathcal{V}(\text{pavé}) = \text{Largeur} \times \text{Profondeur} \times \text{Hauteur}$$

➤ Application : Quel est le volume d'un pavé dont les dimensions sont 8 cm, 10 cm, 9 cm ?

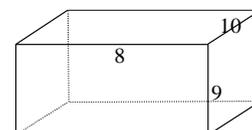
Méthode : • Faire d'abord un croquis lisible et complet.

- Puis on applique la formule :

$$\mathcal{V}(\text{pavé}) = \text{Largeur} \times \text{Profondeur} \times \text{Hauteur}$$

$$= 8 \times 7 \times 9$$

$$= 720 \text{ cm}^3$$



Le volume du pavé est de 720 cm^3 .

➤ Exercice 1 :

Il est tombé en janvier 70 cm de neige dans une cour rectangulaire plate de 10 m sur 30 m. Croquis !

1. Justifier que la couche de neige a la forme d'un pavé.
2. Calculer le volume de neige recouvrant la cour.

➤ Exercice 2 :

Avant de la goudronner, On a répandu une couche de cailloux de 8 cm d'épaisseur sur une route droite de 150 m de longueur et 4 m de largeur. Combien de m^3 de cailloux a-t-il fallu pour effectuer ce travail ? Croquis !

➤ Exercice 3 :

Une citerne cubique a 3 m d'arête. Après plusieurs jours de pluie, cette citerne est remplie aux 2 tiers. Combien d'arrosoirs de 15 litres le jardinier peut-il remplir avec l'eau de la citerne ? Croquis !

➤ Exercice 4 :

Un robinet débite 25 litres d'eau par minute. Combien de temps lui faut-il pour remplir un réservoir ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont : 2 m ; 4 m ; 5 m. Croquis !

➤ Exercice 5 :

Pour aérer une pièce rectangulaire, longue de 10 m, large de 6 m et haute de 3 m, on utilise un ventilateur brassant 30 litres d'air par seconde. Croquis !

1. Quel est le volume de la pièce ?
2. Quel temps (heure minutes secondes) faudra-t-il pour renouveler complètement l'air de la pièce ?

➤ Exercice 6 :

On veut empierrer une route rectiligne de 15 m de long et de 10 m de large sur une épaisseur de 20 cm. Croquis !

La livraison est effectuée par des camions bennes de $4 m^3$ de charge.

Combien de voyages sont nécessaires ?

➤ Exercice 7 :

Un silo à blé rectangulaire a pour volume $60 m^3$. Sa longueur et sa largeur sont de 4 m et 3 m. Croquis !

Quelle est sa hauteur ?

VIII. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

➤ **Faire en temps limité les évaluations des années précédentes sur mon site ([//yalmaths.free.fr](http://yalmaths.free.fr), espace 6^{ème}, Solides et Volumes).**

➤ **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin.**

A. Conseils :

➤ Conversions : Souvent raté !

Quand on convertit vers une unité plus petite (vers la droite), on multiplie la mesure, on l'agrandit.

Quand on convertit vers une unité plus grande (vers la gauche), on divise la mesure, on la diminue.

Tableau de conversion à triples colonnes : on remplit ces triples colonnes en commençant par la colonne de droite.

Ne pas écrire de virgule dans un tableau de conversion.

➤ Calculs de volumes de base : Attention, toutes les longueurs doivent être dans la même unité quand on applique une formule.

➤ Notation d'un volume : Un volume s'écrit par exemple \mathcal{V}^o (cube ABCD) et non cube ABCD ou ABCD.

➤ Calculs de volumes complexes : Soit par comptage de volumes unité.

Soit par découpage puis recollement.

Soit par découpage intérieur puis par addition de volumes de base.

Soit par découpage extérieur puis par soustraction de volumes de base.

B. Erreurs fréquentes :

➤ Conversions : Confondre dam^3 et dm^3 .

➤ Calculs de volumes de base : Confondre les formules d'aire et de volumes.

➤ Manque de précision : Formules, phrases réponses, unités...

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Y aura-t-il un prochain contrat ?

Perle du Bac 2011 : « Durant la réforme des retraites, les syndicats ont compté 200 000 manifestants et la police 50 000. Au total, il y avait donc 250 000 manifestants. »

Perle du Brevet 2012 : « Pendant la première guerre mondiale, les femmes sont allées travailler à l'usine pour donner naissance à des obus. »

Perle du brevet 2012 : « N'ayant besoin que de 7 de moyenne pour avoir mon brevet et pensant les avoir largement atteint, veuillez m'excuser de ne pas répondre aux 2 dernières questions. »

Perle du Bac 2014 : « Et si je n'ai pas tout donné avant, la troisième partie comprendra mes pensées sur ce sujet. »