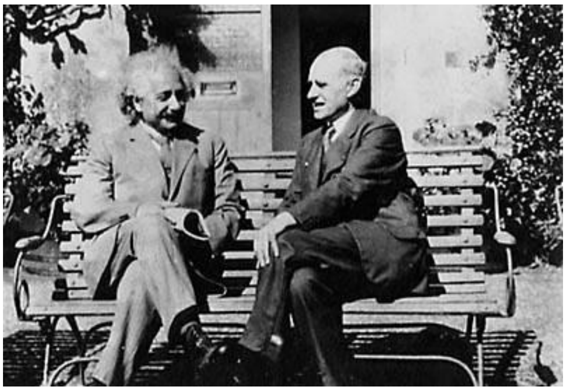
TRIANGLES ET QUADRILATERES PARTICULIERS



Albert Einstein et Sir Arthur Eddington
à Cambridge dans les années 20.

« La **preuve** est une idole devant laquelle le mathématicien se torture. »

Sir Arthur Eddington[1]

Corrigé en rouge et italique.

- <u>Matériel</u> : Règle, équerre, compas porte crayon, crayons de couleur…
- <u>Pré-requis pour prendre un bon départ :</u>

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Droites, segments, demi droites.			
Cercles et disques.			
Polygones : Définition, vocabulaire et constructions.			
Trois théorèmes fondamentaux sur les droites.			

[1] **Eddington**, **Sir Arthur** Stanley (1882-1944). Astronome et physicien britannique.

NOM et Prénom : ……………………………………………. 6ème ……

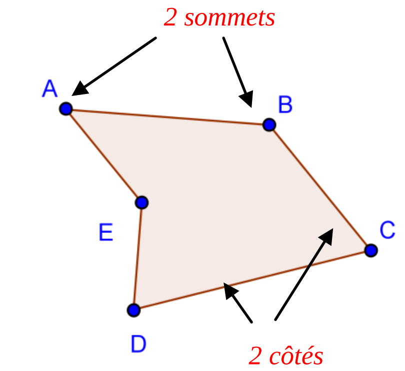
Le but de ce livret est d'étudier certaines configurations géométriques « fermées », en particulier les configurations à 3 droites (les triangles) et les configurations à 4 droites (les quadrilatères).

I. LES POLYGONES.

Définition :	**Un polygone est une ligne brisée (c-à-d formée de segments) fermée.**

Etymologiquement, le mot polygone vient du grec *polus*, plusieurs et *gonia*, angles.

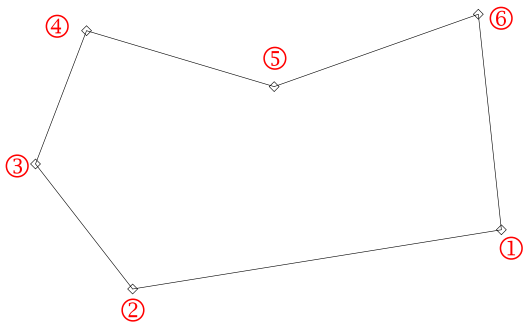
A. Vocabulaire :

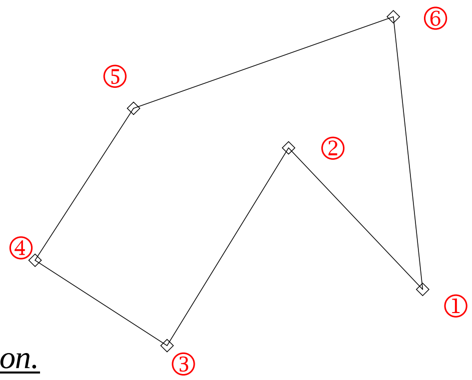


- Ce polygone s'appelle ABCDE. S'appelle-t-il aussi CEDBA ? *Oui.*
  Trouvez lui un autre nom : *EABCD ou CBAED etc. (10 noms différents).*
- Combien a-t-il de **sommets** (coins) ? *5.* Combien de côtés ? 5.
  Un polygone a-t-il toujours autant de sommets que de côtés ? *Oui !*
  Citez 2 **côtés adjacents (**c-à-d **consécutifs,** c-à-d 2 côtés qui se suivent) :
  [CD] et [DE] ou [AB] et [BC]
  Ce polygone à 5 côtés fait partie de la famille des *pentagones.*
- Une **diagonale** d'un polygone est un *segment qui relie 2 sommets sans être un côté*. Exemple : *[EC].*
  Sur la figure, tracez en rouge 3 diagonales Combien ce polygone ABCDE. a-t-il de diagonales ? *5.*
  Combien de diagonales possède un hexagone (polygone à 6 côtés) ? $= \frac{6 \times 3}{2} = 9$ *diagonales.*

B. Reproductions de polygones par triangulation :

① ***Sans rien mesurer***, reproduire exactement chaque polygone au compas et à la règle (côté non mesuré) :





Méthode de construction par triangulation.

❶ *Sur la figure de départ, on numérote les sommets pour tous les identifier (si besoin).*

❷ *Reproduction du segment [①②] :*

- *On place le point ①. Puis on trace une demi-droite partant de ①.*
- *On reporte sur cette demi-droite la longueur ①② qu'on a capturée (prise) au compas sur la figure d'origine.*

❸ *Construction des autres points :*

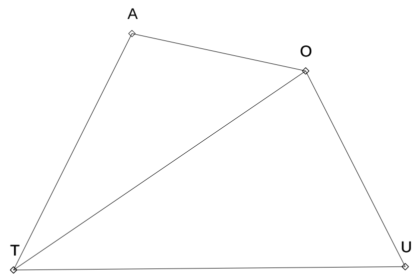
- *A partir des 2 premiers points ① et ② déjà placés, on construit le point ③ en reportant les longueurs ①③ et ②③ prises au compas sur la figure d'origine. Puis on trace le nouveau côté [②③].*
- *De la même manière, on construit au compas le point ④ à partir des 2 premiers points ① et ② puis on trace le côté [③④].*
- *On recommence avec les autres points manquants.*

Chaque point à partir du ③ est déterminé par ***2 arcs de cercle*** *tracés à partir des points ① et ②. C'est comme si à chaque fois on construisait le 3ème sommet d'un triangle à partir des 2 autres. Voilà pourquoi on parle de triangulation.*

② Ce quadrilatère AOUT a été tracé à main levée en réduction.

Les longueurs (en cm) sont : AO = 4 ; OU = 5 ; TU = 9 ; TA = 6 ; OT = 8.

1. D'abord reporter toutes ces mesures sur le croquis.
2. Reconstruire au compas et à la règle graduée AOUT en vraie grandeur.



II. LES TRIANGLES.

Définition :	Un **triangle** est un polygone à ***3*** côtés.

A. Construction d'un triangle connaissant ses 3 longueurs :

Méthode générale pour tracer une figure à partir d'un énoncé :

① *Sans suivre le plan de construction*, **on fait d'abord un petit croquis à main levée** de la figure pour avoir une idée de la forme.

On reporte sur ce petit croquis **les informations** données par l'énoncé (longueurs, angles, codages etc)

② Puis, on suit le plan de construction, **étape par étape**, à la règle et au compas, pour construire proprement la figure.

Attention aux notations dans le plan de construction : côtés [entre crochets] et longueurs sans rien !

Pour tracer un triangle quelconque au compas et à la règle graduée, il suffit de connaître ses trois longueurs, (2 voire 1 longueur seulement quand le triangle est spécial).

Exemple : On veut tracer le triangle ABC sachant que AB = 8 cm, AC = 3 cm, BC = 6 cm.

Plan de construction en 3 étapes

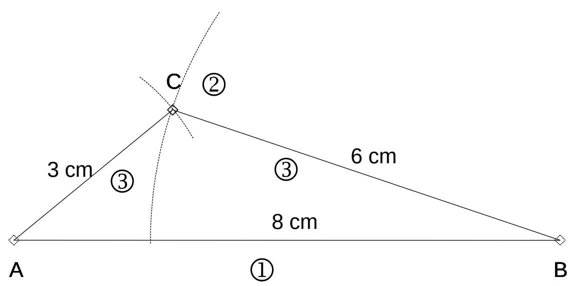
① Tracer le segment ***(le plus grand en général)*** *[AB]* de longueur *8* cm.

② Construire au compas le point *C* tel que :

AC = 3 cm et CB = 6 cm.

③ Tracer les côtés *[AC] et [CB].*

Figure *(croquis d'abord !)*



B. Trois sortes de triangles particuliers :

Comment rendre plus particulier un triangle quelconque comme celui que vous venez de construire ?

Tout simplement en agissant sur les longueurs des côtés ou/et sur la position relative de deux côtés.

1. Triangle isocèle :

L'adjectif isocèle est formé à partir de 2 mots grecs : *isos* → égal et *skelos* → jambes.

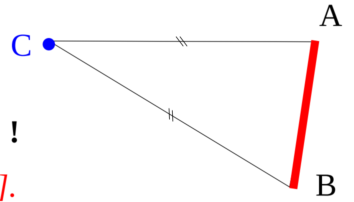
3 définitions : ❶ Un **triangle isocèle** est un triangle qui a au moins 2 côtés de même *longueur*.

❷ Le sommet où le triangle est isocèle s'appelle **le sommet principal.**

❸ Le côté opposé au sommet principal s'appelle **la base**.

➢ Figure : • D'après le codage *CA = CB*.

Donc le triangle ABC est isocèle en *C.*



Il faut toujours préciser en quel sommet un triangle est isocèle !

• Son sommet principal est *C.* • Sa base est le segment *[BA].*

➢ Construction :

Pour tracer un triangle isocèle, il suffit de connaître 2 longueurs : celle de la base et celle d'un côté.

Exemple : Tracer le triangle isocèle MOU de **sommet principal M**, avec MO = 3 cm et OU = 5 cm.

Plan de construction en 3 étapes

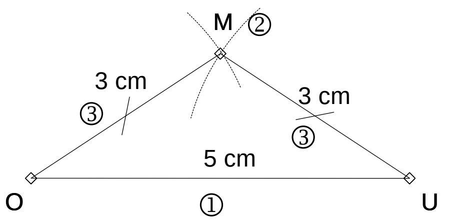
① Tracer la base *[OU]* de longueur *5* cm.

② Construire le sommet principal *M* tel que :

MO = 3 cm et *MU = 3 cm*

③ Tracer les côtés *[MO] et [MU].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

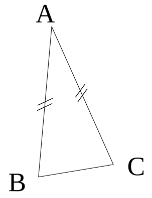
Traduction mathématique de la définition des triangles isocèles : (faites d'abord un petit croquis codé à droite)

❶ **Utiliser l'égalité de 2 longueurs d'un triangle isocèle :**

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle isocèle en A	alors	*AB = AC*

Autrement dit : Lorsqu'un triangle est isocèle, il a deux côtés de même longueur.

croquis



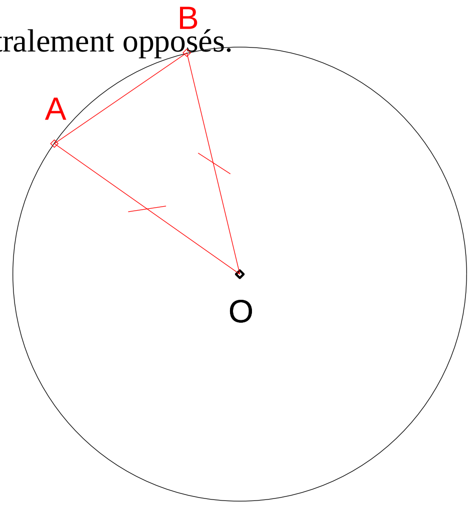
❷ **Prouver qu'un triangle est isocèle en un point (réciproque) :**

	(2 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	① ABC est un triangle ② AB = AC	alors	Le triangle ABC est *isocèle en A*.

Autrement dit : Lorsqu'un triangle a deux côtés de même longueur, alors il est isocèle.

- <u>Exercice :</u> Ci-contre, tracer le cercle $\mathcal{C}_{(O\,;\,3)}$.

<u>Figure</u>



Sur ce cercle $\mathcal{C}$, placer A et B deux points distincts (séparés) non diamétralement opposés.

Quelle est la nature du triangle BOA ? Justifier évidemment !

Il ne faut pas oublier le codage, cela aide énormément !

• *Puisque A et B sont sur $\mathcal{C}_{(O\,;\,3)}$ alors OA = OB (= 3 cm)*

• *Puisque* $\left\{\begin{array}{c}\text{BOA est un triangle}\\ \text{OA = OB}\end{array}\right\}$ *alors BOA est un triangle isocèle en O.*

2. Triangle équilatéral :

L'adjectif équilatéral est formé de deux mots latins : *aequus* → égal et *lateris* → côté.

<u>Définition</u> : Un **triangle équilatéral** est un triangle qui a 3 côtés de même *longueur*.

<u>Remarque :</u> Un triangle équilatéral fait donc partie de la famille des triangles *isocèles.*

- <u>Construction</u> :

Pour tracer un triangle équilatéral, il suffit de connaître 1 longueur : celle de n'importe quel côté !

<u>Exemple :</u> On veut tracer un triangle équilatéral NUL tel que NU = 3 cm.

<u>Plan de construction en 3 étapes</u>

① Tracer le côté *[NU]* de longueur *3 cm*.

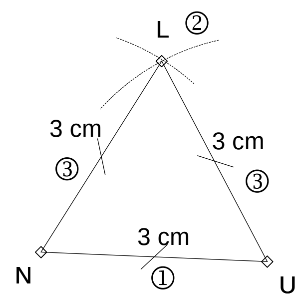
② Construire le sommet *L* tel que :

LN = 3 cm

et *LU = 3 cm*

③ Tracer les côtés *[LN]* et *[LU].*

<u>Figure</u> *(croquis d'abord !)*



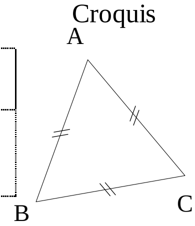
Codage !

<u>Traduction mathématique de la définition des triangles équilatéraux :</u> (faites d'abord un petit croquis codé)

❶ Utiliser l'égalité des 3 longueurs d'un triangle équilatéral :

	(*1* condition ou hypothèse)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle équilatéral	alors	*AB = BC = AC*

Croquis



Autrement dit : Lorsqu'un triangle est équilatéral, alors ses 3 côtés ont la même longueur.

❷ Prouver qu'un triangle est équilatéral (réciproque) :

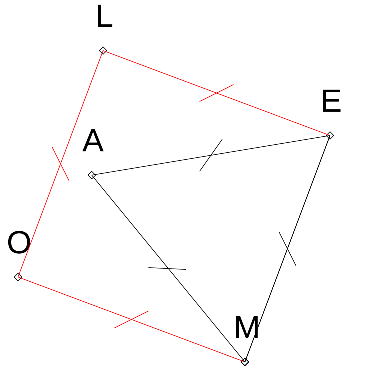
	(*2* conditions ou hypothèses)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	{① ABC est un triangle ② AB = AC = BC}	alors	Le triangle ABC est *équilatéral.*

Autrement dit : Lorsqu'un triangle a ses 3 côtés de même longueur, alors il est équilatéral.

➢ Exercice : Sur la figure ci contre, **MELO est un carré**. Rajouter le codage manquant.

D'après le codage AME est un triangle *équilatéral.*

Prouver que LO = AE.



• *Puisque MELO est un carré alors LO = EM.*

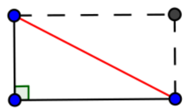
• *Puisque AME est un triangle équilatéral alors AE = EM.*

• *Puisque* $\left\{\begin{array}{l}\text{LO = EM}\\ \text{AE = EM}\end{array}\right\}$ *alors LO = AE.*

3. Triangle rectangle :

L'adjectif rectangle est formé à partir de deux mots latins : *rectus* → droit et *angulus* → angle.

Deux définitions pour le triangle rectangle :



- Un triangle rectangle est un triangle qui a *2* côtés *perpendiculaires*.
- Le **plus grand côté**, opposé à l'angle droit, s'appelle **« l'hypoténuse »**.

Pour tracer un triangle rectangle, il suffit de connaître 2 longueurs : celles de deux de ses 3 côtés.

➢ **Méthode ① : Connaissant les deux côtés de l'angle droit.**

Exemple : On veut tracer un triangle FOL rectangle en F tel que FO = 3 cm et FL = 5 cm.

Plan de construction en *3* étapes

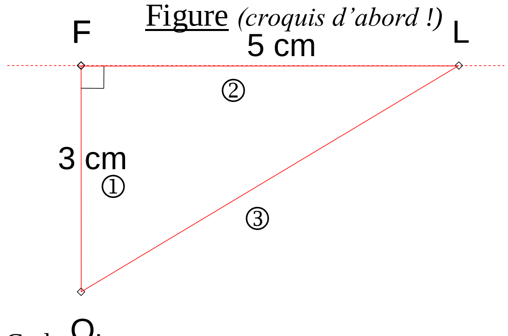
① Tracer le côté *[FO]* de l'angle droit de longueur *3 cm.*

② Tracer l'autre côté *[FL]* de l'angle droit perpendiculairement au côté *[FO]* tel que :

FL = 5 cm

③ Tracer l'hypoténuse *[LO].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

➢ **Méthode ② : Connaissant un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.**

Exemple : On veut tracer un triangle CIL **rectangle en C** tel que CI = 3 cm et IL = 5 cm

Plan de construction en *3* étapes

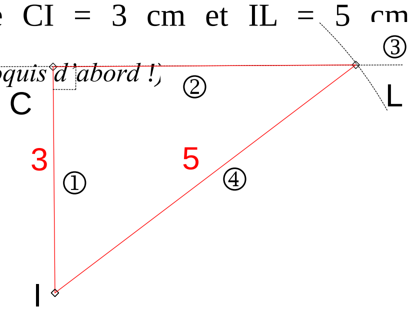
① Tracer le côté *[CI]* de l'angle droit de longueur *3 cm.*

② Tracer la perpendiculaire à (CI) passant par C.

③ Sur cette perpendiculaire, placer le troisième sommet *L* à 5 cm de I.

④ Tracer l'hypoténuse *[LI]*.

Figure *(croquis d'abord !)*

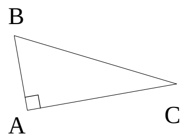


Codage !

Traduction mathématique de la définition des triangles rectangles : (faites d'abord un petit croquis codé à droite)

❶ Utiliser la perpendicularité d'un triangle rectangle :

Croquis



	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle **rectangle** en A	alors	*(AB)* ⊥ *(AC)*

Autrement dit : Lorsqu'un triangle est rectangle, alors deux de ses côtés sont perpendiculaires.

❷ Prouver qu'un triangle est rectangle en un point (réciproque) :

	(2 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	$\begin{cases} \text{① ABC est un triangle} \\ \text{② } (AB) \perp (AC) \end{cases}$	alors	Le triangle ABC est *rectangle* en *A*.

Autrement dit : Un triangle ayant 2 côtés perpendiculaires est un triangle rectangle.

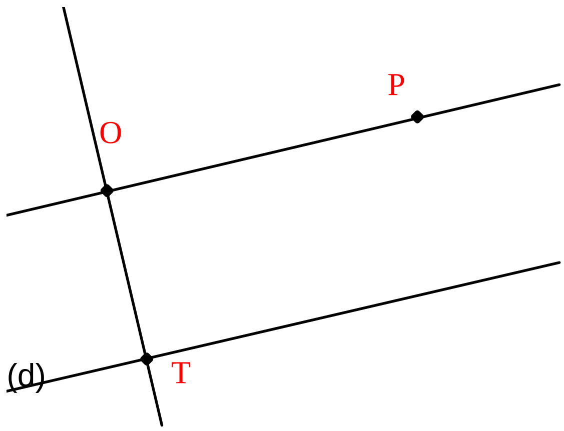
➢ Exercice ① :

Sur la figure ci contre on sait que :

(PO) // (d) et (TO) ⊥ (OP).

1) Placer les noms des 3 points et le codage manquants.

2) Quelle est la nature de TOP ? Justifier.



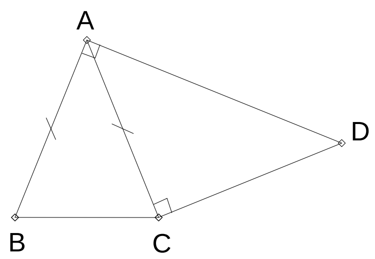
Puisque $\begin{cases} \text{TOP triangle} \\ (TO) \perp (OP) \end{cases}$ *alors TOP est un triangle rectangle en O.*

➢ Exercice ② : Contrôle 2005.

Sur la figure codée et réduite ci contre, on sait aussi que :

AB = 4 cm et BC = 3 cm.

1. Refaire la figure en vraie grandeur.
2. Donner le programme de construction. (…………..... / 2 pts)
3. Justifier que A est sur la médiatrice de [BC]. (……. / 0,5 pts)



2.

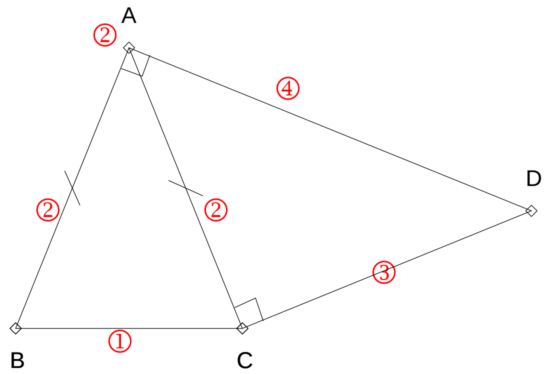
① Tracer [BC] de longueur 3 cm.

② Construire le point A tel que BA = CA = 4 cm. Tracer [BA] et [CA].

③ Tracer la perpendiculaire à [CA] passant par C.

④ Tracer la perpendiculaire à [BA] passant par A. Celle ci coupe l'autre perpendiculaire en D.

Figure taille réelle en dessous (……….... / 2 pts)



3. D'après le codage, AB = AC.

Donc le point A est équidistant des points B et C.

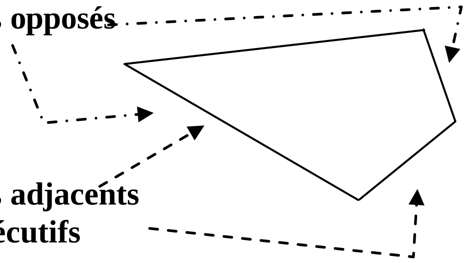
Donc A est sur la médiatrice du segment [BC].

III. LES QUADRILATERES.

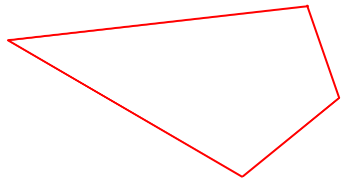
Définition :	Un **quadrilatère** est un polygone à 4 côtés.

- Exercice : En appliquant la méthode vue p.2, reproduire exactement le quadrilatère ci-dessous.

2 côtés dits **opposés**



2 côtés dits **adjacents**
ou consécutifs



- Question :

Comment rendre particulier un quadrilatère quelconque comme celui que vous venez de reproduire ?

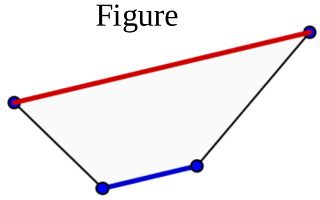
En agissant sur la position relative des côtés ou/et sur les longueurs des côtés bien sûr !

Commençons par rendre *deux côtés* ***parallèles.***

A. Trapèze :

Trois définitions pour le trapèze :

Figure



- Un **trapèze** est un quadrilatère *non croisé* qui a 2 côtés opposés *parallèles*
- Le petit côté parallèle s'appelle la **petite base.**
- Le grand côté parallèle s'appelle la ***grande*** **base**.

- Exemple : On veut tracer un trapèze MATH tel que :

[MA] soit la petite base et MA = 2 cm ; [TH] soit la grande base et TH = 5 cm ; TA = 3 cm et HA = 7 cm.

Plan de construction en 4 étapes

① Tracer la grande base *[TH]* de longueur *4* cm.

② • Construire au compas le point A tel que :

TA = 3 cm et HA = 7 cm.

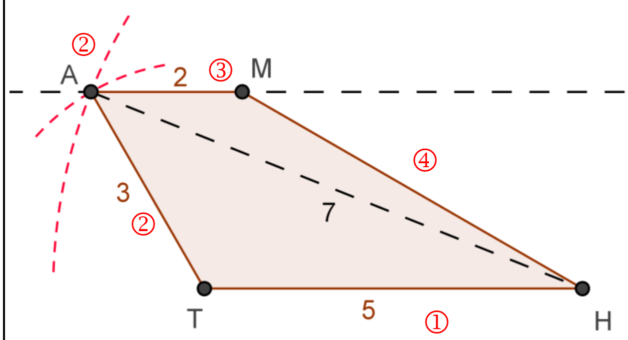
• Puis tracer le côté [AT].

③ Tracer la petite base *[AM]* passant par A telle que :

• (MA) // (TH)
• *MA* = 2 cm.

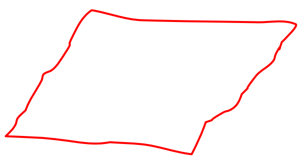
④ Tracer le dernier côté *[MH].*

Figure *(croquis d'abord !)*



- Et maintenant, si au lieu d'avoir seulement 2 côtés parallèles dans notre trapèze, on en avait 4 ? Génial ! Essayez de dessiner à main levée un trapèze avec les côtés opposés parallèles 2 à 2 (et sans angles droits dans le cas général).

A quoi ressemble ce quadrilatère ? *Un parallélogramme (!)*



B. Parallélogramme :

1. Définition du parallélogramme :

Un **parallélogramme** est un trapèze qui a ses côtés opposés *parallèles* deux à deux.

Remarque : Puisqu'un parallélogramme a ses côtés opposés *parallèles* 2 à 2, alors il a au moins deux côtés parallèles. Donc les parallélogrammes font partie de la famille des trapèzes.

2. Construction d'un parallélogramme à partir des côtés :

Pour tracer un parallélogramme, il suffit de connaître 2 longueurs : celles de deux côtés consécutifs.

Exemple : On veut tracer un parallélogramme CILS tel que CI = 3 cm et CS = 5 cm.

On a deux méthodes :

- **Méthode ① : En traçant des parallèles (parallélisme des côtés opposés d'un parallélogramme).**

Plan de construction en *4* étapes

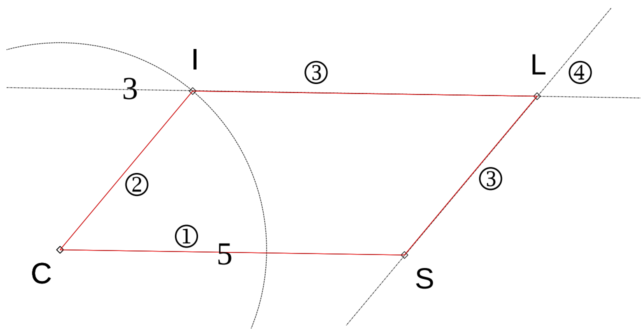
① Tracer le côté *[CS]* de longueur 5 cm.

② Tracer le côté *[CI]* de longueur *3* cm.

③ Tracer la parallèle à (CI) passant par S
et la parallèle à (CS) passant par I.

④ Appeler *L* le point d'intersection de ces 2 parallèles.

Figure *(croquis d'abord !)*



Remarque : Ce plan de construction ne donne pas un parallélogramme unique à cause de l'étape n° *②*.

- **Méthode ② : Au compas (égalité des longueurs des côtés opposés d'un parallélogramme).**

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté *[CS]* de longueur 5 cm.

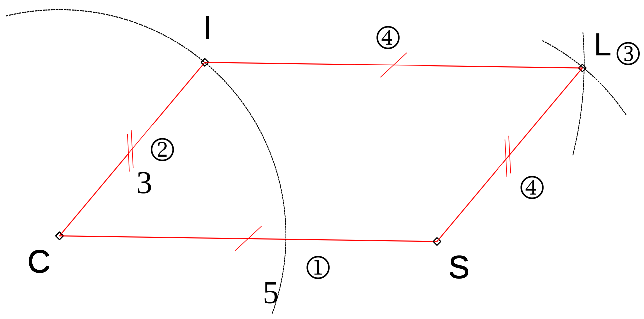
② Tracer le côté *[CI]* de longueur *3* cm.

③ Construire au compas le point *L* tel que :

LS = 5 cm et *LI = 3 cm*

④ Tracer les 2 côtés restants *[LS] et [LI]*.

Figure *(croquis d'abord !)*



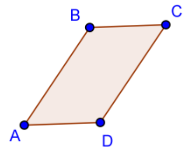
Remarque : Ce plan de construction ne donne pas un parallélogramme unique à cause de l'étape n° *②*.

3. Propriétés du parallélogramme :

<u>Traduction mathématique de la définition des parallélogrammes :</u> (faites d'abord un petit croquis codé à droite)

❶ Utiliser le parallélisme dans un parallélogramme :

<u>Croquis</u>



	(*1* condition ou hypothèse)		(*2* résultats ou conclusions)
Quand	ABCD est un **parallélogramme**	alors	① (AB) // (DC) ② (BC) // (DA)

Autrement dit : Lorsqu'un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés sont parallèles deux à deux.

<u>Utilité</u> : Cette propriété peut servir à prouver que des droites sont *parallèles*.

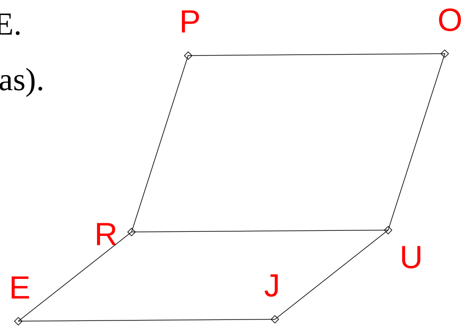
❷ Prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme (réciproque) :

	(*2* conditions ou hypothèses)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	① (AB) // (DC) ② (BC) // (DA)	alors	ABCD est un *parallélogramme.*

Autrement dit : Lorsqu'un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles 2 à 2, alors c'est un parallélogramme.

<u>Utilité :</u> Cette propriété peut servir à prouver qu'un *quadrilatère est un parallélogramme.*

➢ <u>Exercice :</u> Voici deux parallélogrammes adjacents POUR et JURE.

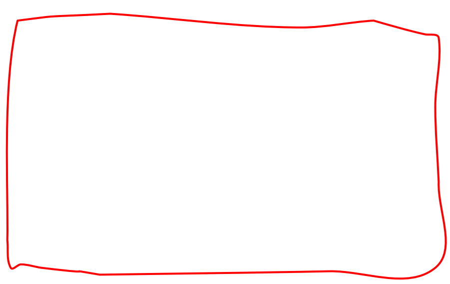


1. Placer les noms manquants des 6 points (POUR en haut, JURE en bas).
2. Comment sont les droites (PO) et (JE) ? Justifier évidemment !

- *Puisque POUR est un parallélogramme alors (PO) // (RU).*
- *Puisque JURE est un parallélogramme alors (EJ) // (RU).*
- *Puisque* $\left\{\begin{array}{l}(PO) \;//\; (RU)\\ (EJ) \;//\; (RU)\end{array}\right\}$ *alors (PO) // (EJ).*

➢ Et maintenant, si au lieu d'avoir seulement les côtés opposés parallèles 2 à 2 dans notre parallélogramme, on ajoutait un angle droit ? Chiche ?

Essayez de dessiner à main levée un parallélogramme avec en plus un angle droit.



A quoi cela ressemble-t-il ? *A un rectangle (!)*

C. Rectangle :

1. Définition du rectangle :

Un **rectangle** est un parallélogramme particulier avec un **angle** ***droit.***

Conséquence de la définition : Puisqu'un rectangle fait partie de la famille des parallélogrammes alors, en particulier, les côtés opposés d'un rectangle sont aussi parallèles 2 à 2.

2. Construction d'un rectangle à partir des côtés :

Pour tracer précisément un rectangle, il suffit de connaître 2 mesures : celles de deux côtés consécutifs (qu'on appelle en général longueur et largeur).

Exemple : On veut tracer le rectangle BOUC tel que BO = 3 cm et BC = 5 cm.

On a deux méthodes :

- **Méthode ① : En traçant des parallèles (parallélisme des côtés opposés d'un rectangle).**

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté [BC] de longueur *5* cm.

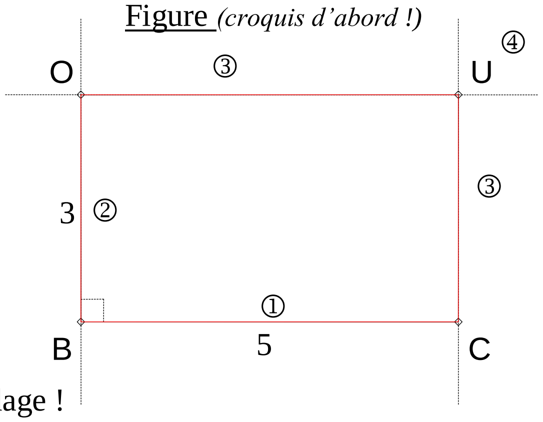
② Tracer perpendiculairement au côté [BC], le côté *[BO]* de longueur *3* cm.

③ Tracer la parallèle à (BO) passant par C

et la parallèle à (BC) passant par O.

④ Appeler *U* le point d'intersection de ces 2 parallèles.

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

- **Méthode ② : Au compas (égalité des longueurs des côtés opposés d'un rectangle).**

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté [BC] de longueur *5* cm.

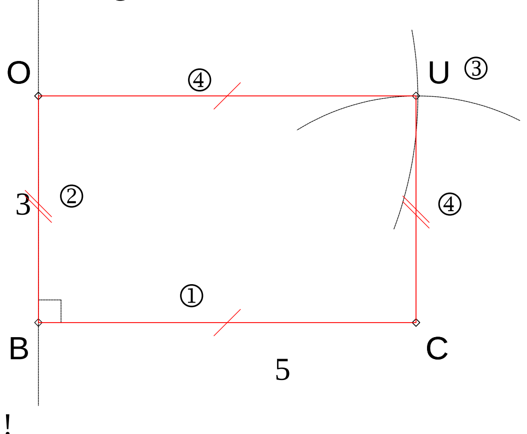
② Tracer perpendiculairement à [BC], le côté *[BO]* de longueur *3* cm.

③ Construire au compas le point *U* tel que :

OU = 5 cm et CU = 3 cm

④ Tracer les 2 côtés restants *[OU] et [CU].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

Ces deux méthodes de construction du rectangle sont quasi-identiques à celles du parallélogramme.

3. Construction d'un rectangle à partir d'un côté et d'une diagonale :

On peut aussi tracer un rectangle connaissant la longueur d'un côté et la longueur des diagonales.

Exemple : Construire le rectangle EURP tel que PE = 4 cm et PU = 5 cm.

➢ **Méthode ③ qui s'appuie sur les longueurs d'un côté et d'une diagonale d'un rectangle.**

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté *[PE]* de longueur 4 cm.

② Tracer la perpendiculaire au côté [PE] passant par E.

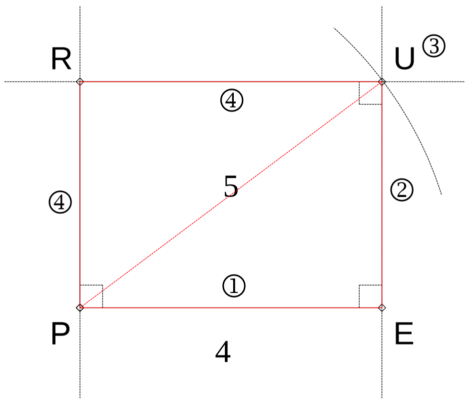
③ *Sur cette perpendiculaire*, construire au compas le point U tel que : *PU* = 5 cm

④ Tracer la perpendiculaire à [PE] passant par P.

Tracer la perpendiculaire à [EU] passant par U.

Ces 2 perpendiculaires sont sécantes en *R*.

Figure *(croquis d'abord !)*

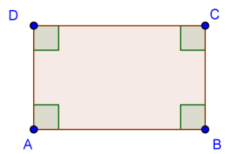


4. Propriétés angulaires du rectangle :

Propriétés angulaires du rectangle : (faites un petit croquis codé à droite.)

❶ Utiliser la perpendicularité dans un rectangle :

Croquis



	(*1* condition ou hypothèse)		(*4* résultats ou conclusions)
Quand	ABCD est un **rectangle**	alors	ABCD a *4* angles droits[2].

Autrement dit : Lorsqu'un quadrilatère est un rectangle, alors il possède 4 angles droits.

Utilité : Cette propriété peut servir à prouver que deux droites sont *perpendiculaires*.

❷ Reconnaître un rectangle grâce aux angles droits (réciproque) :

	(4 conditions ou hypothèses)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	ABCD est un quadrilatère avec ***3*** angles droits	alors	ABCD est un *rectangle*.

Autrement dit : Il suffit qu'un quadrilatère ait 3 angles droits, pour que ce soit un rectangle.

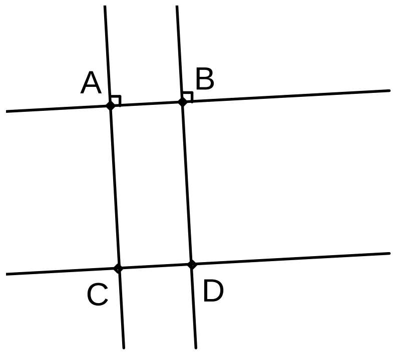
Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un quadrilatère est *un rectangle.*

[2] On retrouve la définition du rectangle donnée en primaire : **un rectangle est un quadrilatère avec 4 angles droits.**

➢ <u>Exercice :</u> On a construit la figure ci-dessous, sachant que :

(AB) // (CD) (AB) $\perp$ (AC) (AB) $\perp$ (BD)

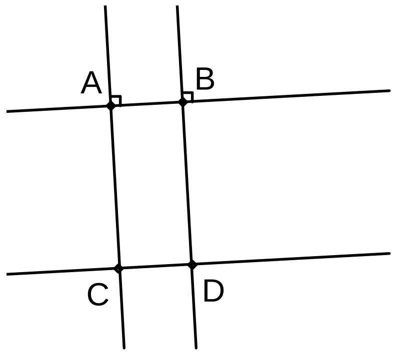
Le but de l'exercice est de prouver de 2 manières que le quadrilatère ABDC est un rectangle.



- <u>Première façon : en montrant directement que c'est un rectangle.</u>
  1. Montrer que *(AC) $\perp$ (CD).*
  2. En déduire que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

• *Puisque* $\begin{cases} (AB) \perp (AC) \\ (AB) \ // \ (CD) \end{cases}$ *alors (AC) $\perp$ (CD).*

• *Puisque ABDC a 3 angles droits en A, B et C alors c'est un rectangle.*



- <u>Seconde façon : en passant par le parallélogramme.</u>
  1. Montrer que *(AC) // (BD).*
  2. En déduire qu'ABDC est un parallélogramme.
  3. Puis en déduire qu'ABDC est un rectangle.

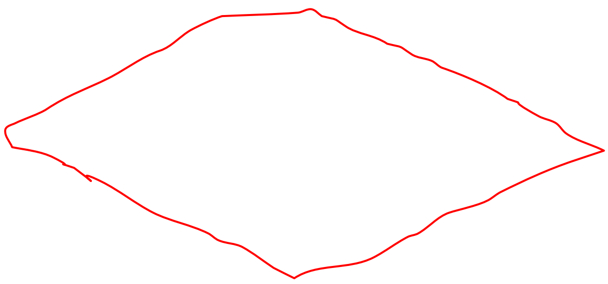
• *Puisque* $\begin{cases} (AB) \perp (AC) \\ (AB) \perp (BD) \end{cases}$ *alors (AC) // (BD).*

• *Puisque* $\begin{cases} (AB) \ // \ (CD) \\ (AC) \ // \ (BD) \end{cases}$ *alors ABDC est un parallélogramme.*

• *Puisque ABDC parallélogramme avec au moins 1 angle droit (en A par exemple) alors ABCD est un rectangle.*

➢ Et maintenant, si dans un parallélogramme, au lieu d'ajouter un angle droit (ce qui a donné le rectangle), les 4 côtés avaient subitement la même longueur, comme par magie ?

Essayez de dessiner à main levée un parallélogramme avec en plus tous ses côtés de même longueur.



A quoi cela ressemble-t-il ? *A un losange.*

D. Losange :

1. Définition du losange :

Un **losange** est un parallélogramme particulier avec ses 4 côtés de même *longueur.*

Conséquence de la définition : Puisqu'un losange fait partie de la famille des parallélogrammes alors, en particulier, les côtés opposés d'un losange sont aussi *parallèles* 2 à 2.

2. Construction d'un losange:

- **Méthode ① à partir des côtés :**

Pour tracer un losange quelconque, il suffit de connaître 1 longueur : celle d'un des 4 côtés.

Exemple : On veut tracer un losange PUNK tel que PU = 3 cm.

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté [PU] de longueur 3 cm.

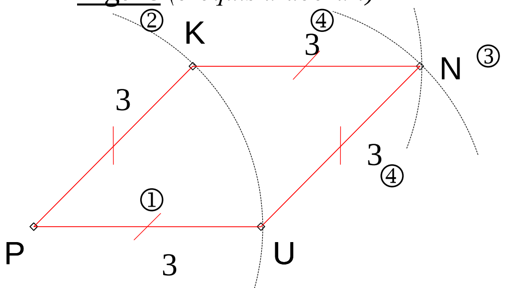
② Tracer le côté [PK] de longueur 3 cm.

③ Construire au compas le point *N* tel que :

UN = 3 cm et *KN = 3 cm*

④ Tracer les 2 côtés manquants *[UN]* et *[KN].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

Remarque : Ce plan de construction ne donne pas un losange unique à cause de l'étape n° *②*.

- **Méthode ② à partir d'un côté et d'une diagonale :**

Pour tracer un losange bien précis, il suffit de connaître la longueur d'un côté et la longueur d'une des 2 diagonales.

Exemple : On veut tracer un losange FUNK tel que FU = 3 cm et FN = 5 cm.

Plan de construction en *3* étapes

① Tracer la diagonale *[FN]* de longueur 5 cm.

② Construire au compas le point U tel que :

FU = *3* cm et NU = *3* cm

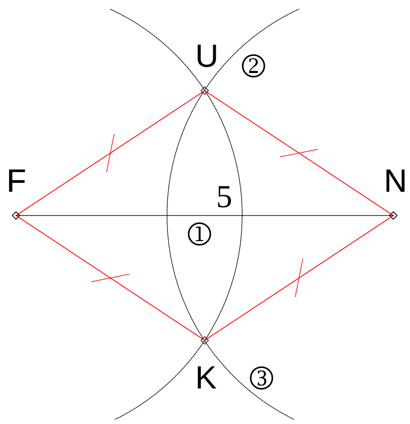
Tracer *[FU]* et *[NU]*.

③ Construire au compas le point *K* tel que :

FK = 3 cm et *NK = 3 cm*

Tracer les 2 côtés manquants *[FK]* et *[NK].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage !

Remarque :

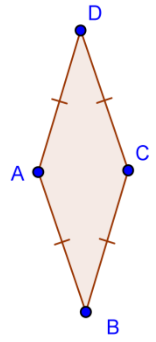
Ce plan de construction donne cette fois ci un losange unique.

3. Propriétés métriques du losange :

Traduction mathématique de la définition du losange : (faites d'abord un petit croquis codé à droite)

❶ Utiliser les égalités des longueurs dans un losange :

Croquis



	(1 condition ou hypothèse)		(4 résultats ou conclusions)
Quand	ABCD est un losange	alors	AB = BC = CD = DA

Autrement dit : Lorsqu'un quadrilatère est un losange, alors ses 4 côtés sont de même longueur.

Utilité : Cette propriété sert à montrer que des *longueurs* sont égales.

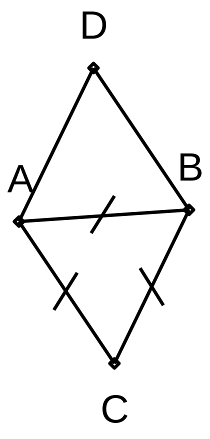
Réciproque : **❷ Reconnaître un losange grâce aux longueurs:**

	(4 conditions ou hypothèses)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	*AB = BC = CD = DA*	alors	ABCD est un *losange*.

Autrement dit : Lorsqu'un quadrilatère a 4 côtés de même longueur alors c'est un losange.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un quadrilatère est un *losange*.

Exercice :



1) Sur la figure ci contre, BAD est un triangle équilatéral. Placer le codage manquant.

Compléter la phrase suivante :

« D'après le codage, AB = AC = BC. Donc ABC est un triangle équilatéral. »

2) Prouver qu'ADBC est un losange.

- *Puisque BAD est un triangle équilatéral alors AD = AB = BD.*
  Puisque ABC est un triangle équilatéral alors AB = AC = BC.
- *Puisque le quadrilatère ADBC a 4 côtés de même longueur (AD = DB =BC =CA)*

alors ADBC est un losange.

- Et pour finir, si on fusionnait un losange et un rectangle ?

① Essayez de dessiner à main levée un rectangle qui soit en même temps un losange.

② Essayez de dessiner à main levée un losange qui soit en même temps un rectangle.

Figure ①

Figure ②

A quoi ressemblent les deux figures ? *A des carrés.*

E. Carré :

1. Définition du carré :

Un **carré** est un parallélogramme particulier **à la fois losange et rectangle.**

2. Conséquences de la définition du carré :

Un carré vérifie tout ce que le parallélogramme, le losange et le rectangle vérifient. En particulier :

- Puisqu'un carré fait partie de la famille des parallélogrammes, alors les côtés opposés d'un carré sont aussi *parallèles* 2 à 2.
- Puisqu'un carré fait partie de la famille des *rectangles*, alors le carré possède aussi 4 angles *droits.*
- Puisqu'un carré fait partie de la famille des *losanges*, alors les 4 côtés d'un carré sont aussi de même *longueur*.

3. Construction d'un carré à partir des côtés :

Pour tracer précisément un carré, il suffit de connaître 1 longueur : celle d'un des 4 côtés.

Exemple : On veut tracer le carré ROCK tel que RO = 3 cm.

Plan de construction en *4* étapes

① Tracer le côté [RO] de longueur 3 cm.

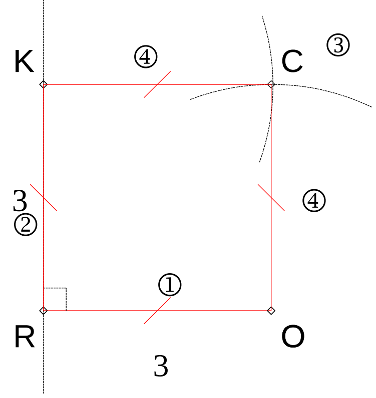
② Tracer le côté [RK] de longueur 3 cm perpendiculairement à [RO].

③ Construire au compas le point C tel que :

OC = 3 cm et *KC = 3 cm*

④ Tracer les 2 côtés manquants *[OC]* et *[KC].*

Figure *(croquis d'abord !)*



Codage complet !

Cette construction est en fait exactement la même que celle de la méthode ② pour le rectangle (p.10), ce qui n'est pas étonnant puisqu'un carré fait partie de la famille des rectangles.

La méthode ① pour le rectangle (p.10) marche aussi pour le carré mais elle est moins pratique.

F. Récapitulatif : comment prouver qu'un quadrilatère ABCD est :

1. Un trapèze ?

• Il faut prouver qu'ABCD a 2 côtés *parallèles*.

2. Un parallélogramme ?

• Soit vous prouvez qu'ABCD a ses côtés opposés *parallèles* 2 à 2.

• Soit vous prouvez qu'ABCD a ses côtés opposés de même *longueur*.

3. Un rectangle ?

• Soit vous montrez *d'abord* qu'ABCD est un parallélogramme *puis* qu'il a *en plus un angle droit*.

• Soit vous montrez *directement* qu'ABCD a ***3*** angles droits.

4. Un losange ?

• Soit vous prouvez *d'abord* qu'ABCD est un parallélogramme *puis* qu'il a en plus 2 côtés consécutifs de même longueur.

• Soit vous prouvez *directement* qu'ABCD a 4 côtés de même longueur.

5. Un carré ?

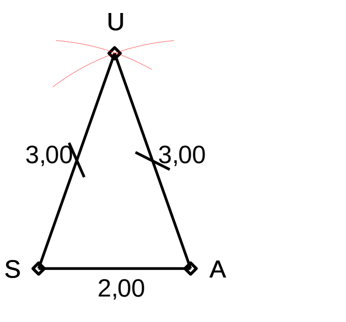
• Soit vous prouvez *d'abord* qu'ABCD est un losange *puis* qu'il a *en plus un angle droit.*

• Soit vous prouvez *d'abord* qu'ABCD est un rectangle *puis* qu'il a en plus *2 côtés consécutifs de même longueur.*

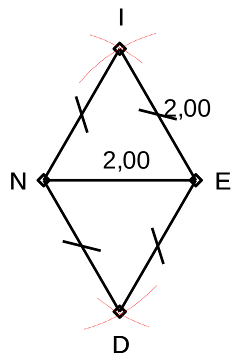
G. Exercices :

❶ Contrôle 2008 (……………..……...…. / 3 points) : **Croquis ! Traits de construction visibles.**

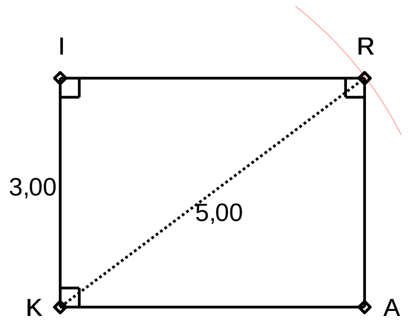
① Tracer un triangle USA isocèle en U tel que : SA = 2 cm et SU = 3 cm.



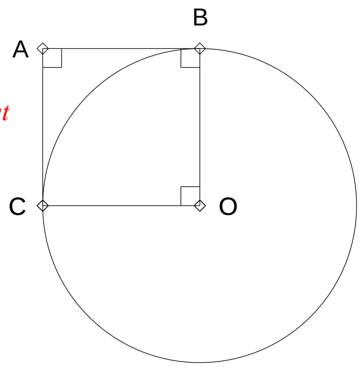
② Tracer un losange INDE tel que : IE = 2 cm et NE = 2 cm.



③ Tracer un rectangle IRAK tel que : IK = 3 cm et KR = 5 cm.



❷ Quelle est la nature d'ABOC ? Justifiez !



En regardant bien la figure, il semble qu'ABOC soit un carré. On va donc d'abord montrer que c'est un rectangle puis qu'il a 2 côtés consécutifs de même longueur.

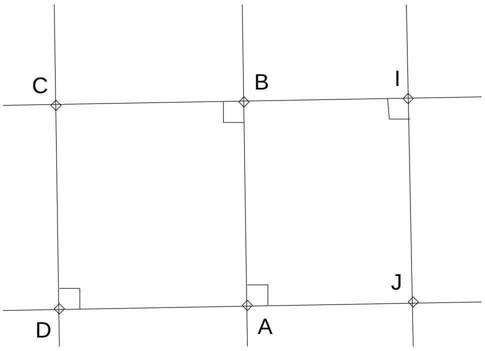
• Puisque ABOC est un quadrilatère avec 3 angles droits (codage), alors ABOC est un rectangle.

• Comme C et B sont sur le cercle de centre O, alors OC = OB.

• Puisque { ①ABOC est un rectangle ; ②les 2 côtés consécutifs [BO] et [OC] sont de même longueur }, *alors ABOC est un carré.*

❸

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
2. Comment sont (IJ) et (CD) ?



• Puisque ABCD est un quadrilatère qui possède 3 angles droits (codage), alors ABCD est un rectangle.

Donc (CD) ⊥ (CB).

• Puisque $\left\{\begin{array}{c}(CD) \perp (CB) \\ (IJ) // (CB)\end{array}\right\}$ *, alors, d'après le théorème 3, (CD) // (IJ).*

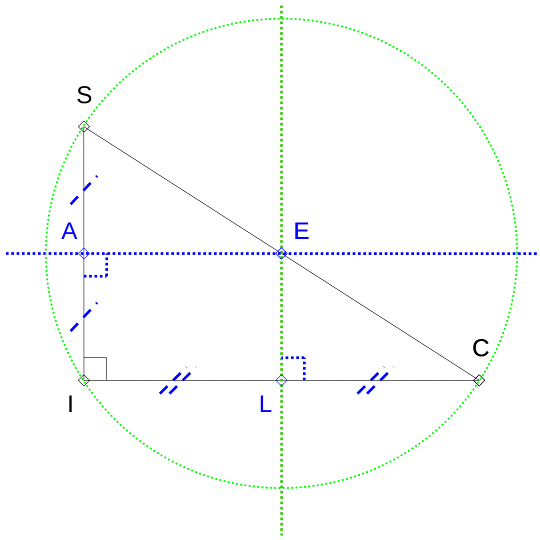
❹ Test 2008 (………………………. / 5 pts).

Soit SIC un triangle rectangle en I.

1. Tracer en vert l'ensemble des points équidistants des points I et C. Cet ensemble vert coupe [IC] en L et coupe [SC] en E. (……………..…..…. / 0,5 pts)

   Tracer en bleu l'ensemble des points équidistants des points S et I. Cet ensemble bleu coupe [SI] en A et [SC] en E. (…...………..……. / 0,5 pts)

On n'oublie surtout pas le double codage des médiatrices !



2. Comment sont les droites (SI) et (EL) ? Justifiez ! (……….………….. / 0,5 + 1 pts)

• Puisque (EL) est la médiatrice du segment [CI], alors (EL) ⊥ (CI).

• Puisque $\left\{\begin{array}{c}(SI) \perp (CI) \\ (EL) \perp (CI)\end{array}\right\}$ *alors, d'après le théorème ②, (SI) // (EL).*

Attention beaucoup de choses inventées ici !

3. Quelle est la nature du quadrilatère AILE ? Justifiez ! (…………………..…. / 1 pt)

• Puisque (EA) est la médiatrice du segment [SI], alors (EA) ⊥ (SI). Donc l'angle en A est droit.

Puisque (EL) est la médiatrice du segment [CI], alors (EL) ⊥ (CI). Donc l'angle en L est droit.

D'après le codage, l'angle en I est droit.

• Puisque le quadrilatère AILE possède 3 angles droits en A, I et L, alors AILE est un rectangle.

3 angles droits suffisent pour avoir un rectangle. Inutile d'inventer d'autres propriétés sur les longueurs ou les angles !

4. Quelle est la nature du triangle ICE ? Justifiez ! (……………..…. / 1 + 0,5 pts)

• *Puisque le point E est sur la médiatrice du segment [CI], alors E est équidistant de C et I donc EC = EI.*

• *Puisque EC = EI, alors le triangle ICE est isocèle en E.* (Soyez précis : isocèle où ?)

Remarque : *Lorsqu'on trace le cercle de centre E, il passe par les trois sommets S, I et C du triangle. Ce qui est normal car le point E est équidistant des trois sommets comme intersection des deux médiatrices.*

On remarque aussi que E est le milieu de l'hypoténuse [SC]. C'est une propriété très importante du triangle rectangle qu'on reverra en détail en classe de 4ème : « Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle rectangle. ».

IV. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

- Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Polygones : définitions, vocabulaire,.			
Reproduire des figures à l'identique.			
Reproduire des figures connaissant les longueurs.			
Triangle isocèle : définition, constructions, propriétés.			
Triangle équilatéral : définition, constructions, propriétés.			
Triangle rectangle : définition, constructions, propriétés.			
Rectangle : définition, constructions, propriétés.			
Losange : définition, constructions, propriétés.			
Carré : définition, constructions, propriétés.			
La différence entre hypothèses et conclusions.			
Rédiger une preuve claire et structurée.			
Aimer les triangles et les quadrilatères.			

- **Pour préparer le test et le contrôle : Livre (Magnard 6ème 2005) p.134 et 135.**

B. Conseils :

- Constructions : Faites des croquis préparatoires complets !
- Théorèmes : Listez les hypothèses données par l'énoncé et le codage.

C. Erreurs classiques :

- Mal lire l'énoncé.
- Théorèmes : Inventer des hypothèses qui nous arrangent !

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? *Les Mesures et les Angles.*

Le mot de la fin sera un mot d'humour :

L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES.

Voici une même situation écrite de différentes manières suivant l'époque.

- Années 60 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10FF. Il lui coûte les 4/5 du prix de vente. Quel est son profit ?
- Début années 70 (maths modernes) : Un paysan échange un ensemble P de pommes de terre contre un ensemble M de pièces de monnaie. Le cardinal de l'ensemble M est égal à 10 et chaque élément de M vaut 1FF. Dessine dix gros points représentant les éléments de M. L'ensemble C des coûts de production est composé de deux gros points de moins que l'ensemble M. Représente l'ensemble C comme un sous-ensemble de l'ensemble M et donnes la réponse à la question : quel est le cardinal de l'ensemble des profits ?
- Fin années 70 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10FF. Il lui coûte les 4/5 du prix de vente, c'est-à-dire 8FF. Quel est son profit ?
- Années 80 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10FF. Ses coûts de production sont de 8FF et son profit de 2FF. Souligne les mots "pommes de terre" et discutes-en avec tes camarades de classe.
- Années 90 : Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 10FF. Ses coûts de production sont de 80% de son revenu. Sur ta calculatrice, trace la représentation graphique de ses coûts de production en fonction de ses revenus. Lance le programme POMDETER pour déterminer le profit. Discute des résultats en groupe de 4 élèves et rédige un compte-rendu qui analyse cet exemple dans le monde réel de l'économie.
- Années 2000 : Un cyber-agriculteur propose à la vente sur un site d'enchères des packs de pommes de terre à 10FF. Le site d'enchères prélève 4/5 du prix de vente en commissions.

En utilisant un moteur de recherche, recherche la signification de FF puis convertis 10FF en €. Sur ta messagerie instantanée, organise une chat session avec tes contacts dans la classe pour valider tes résultats puis poste les sur le blog de la classe. N'oublie pas d'envoyer un mail de confirmation sur les comptes Myspace et Facebook de ton e-prof.

Adapté de The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 5, May 94 (Reprinted by Stan Kelly-Bootle in Unix Review, Oct 94).