LA SYMETRIE AXIALE

« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux. Les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides. » **G.H Hardy**[1]

- ***<u>Matériel</u> : règle, équerre, compas, rapporteur.***
- *<u>Pré-requis pour prendre un bon départ :</u>*

	☹	😐	☺	☺☺
Géométrie de base (droites perpendiculaires ; milieu ; angles).				
Angles : construction, mesure, calcul.				
Triangles isocèle et équilatéral : caractérisation.				
Quadrilatères particuliers (rectangle, losange etc.) : bases.				

[1] G.H Hardy (1877-1947) : Ce mathématicien anglais, génial calculateur, spécialiste en théorie des nombres, enseigna les mathématiques à Oxford et à Cambridge. On le connaît aussi en tant que généticien (évolution des espèces).

NOM et Prénom : ……………………………………………………. 6ème ……

I. DE QUOI S'AGIT-IL ?

Avant de nous plonger dans les délices de la Symétrie Axiale et de la construction de figures symétriques, il est bon d'en avoir une idée intuitive et claire.

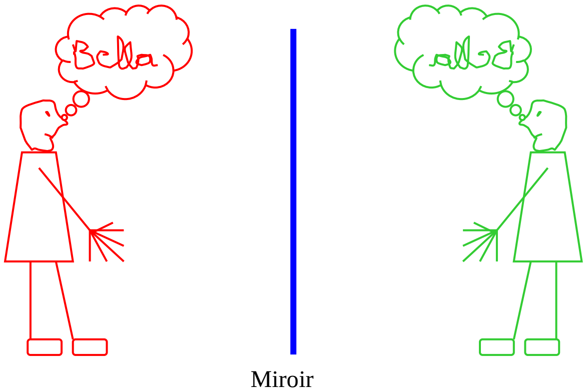
A. Miroir, oh mon beau miroir…

- Souvenez-vous, cette célèbre cantatrice dans les aventures de Tintin[2] : la Castafiore.

Et son méga hit : « Ah ! Je ris de me voir si belle en ce miroir… ». Impérissable !

- Mais que voyait-elle lorsqu'elle se regardait dans un miroir de plein pied ?

Ci-dessous à droite, voici la scène, vue de face :



- Décalquer toute la scène.
- La plier selon l'**axe** représentant le miroir.

La Castafiore et son image sont-elles superposables ? …....

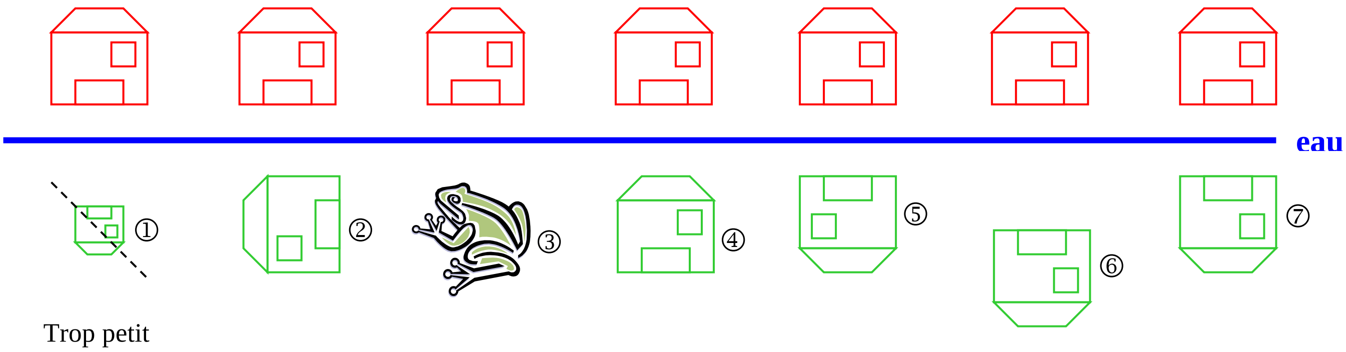
La Castafiore et son image sont parfaitement **superposables après pliage selon l'axe du miroir**.

On dit alors que :« **La Castafiore et son image sont symétriques par rapport à l'axe du miroir. »**

B. Le reflet image :

Voici plusieurs maisons paisibles au bord d'un lac très calme mais aux reflets bizarroïdes.

Barrer les reflets fantaisistes puis **expliquer en dessous pourquoi le reflet ne convient pas**.



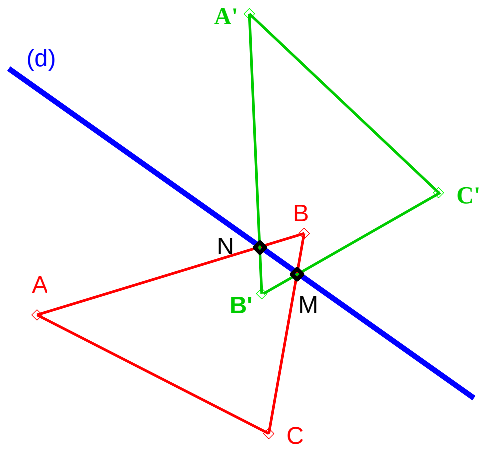
Cette activité précise le sens de l'expression **superposables après pliage selon l'axe représentant l'eau** :

- **L'image ne doit pas être « tournée » dans n'importe quel sens : reflets n° ……………**
- **L'image ne doit pas glisser : reflet n° …… .**
- **L'image ne doit pas être déformée : reflets n° ……………**
- **L'image ne doit pas être placée ni trop près ni trop loin : reflet n° …….**

---

[2] Album « Les Bijoux de la Castafiore » 1963.

C. Effet miroir et Mathématiques :



Voici 2 triangles et une droite (d).

Quand on plie cette figure le long de l'axe (d), les 2 triangles se superposent exactement (à vérifier avec du papier calque.).

On peut donc affirmer :

« Les 2 triangles sont symétriques par rapport à l'axe (d). »

❶ Savez-vous reconnaître des points symétriques ?

Voyons sur la figure, si vous savez repérer à vue d'œil 2 points symétriques par rapport à l'axe (d) :

- Le point A' (*lire « A prime »*) est le symétrique du point ….. par rapport à l'axe (d). En effet, quand on plie la figure selon l'axe (d), ces 2 points A et A' se superposent exactement.

  Le point ……. est le symétrique du point B par rapport à l'axe (d).

  Le point C' (*lire « C prime »*) est le symétrique du point ….. par rapport à l'axe (d).
- Voyons maintenant le cas des points se trouvant sur l'axe (d) :

  Quel est le symétrique du point M par rapport à (d) ? ……… Et le symétrique de N ? ………

❷ Points symétriques, perpendiculaires et milieu :

Un point, son symétrique et l'axe (d) de la symétrie sont-ils tous les 3 placés n'importe comment ?

Mon petit doigt me dit que non ! Voyons cela :

En reprenant la figure, *tracer en pointillés noirs les droites (AA') et (CC').*

Placer sur la figure H, le point d'intersection de (d) et (AA') et K, le point d'intersection de (d) et (CC').

Bien observer la figure puis compléter :

- • Les droites (d) et (AA') sont ……………..………..…..………….. c-à-d (d) ….. (AA').

  • Les segments [HA] et [HA'] ont la même ……..…………………….. c-à-d HA = ……...

  Donc le point H est le ………………………….. du segment [AA'].
- • Les droites (d) et (CC') sont ……………………….……….…...…….. c-à-d ………………

  • Les segments [KC] et [KC'] ont la ………………..……….………………. c-à-d …………………..

  Donc le point …… est le …………………..…….. du segment [CC'].
- Comment seront l'axe (d) et la droite (BB') ? ………………………………

  L'axe (d) coupe perpendiculairement le segment [BB'] pile au …………………………..

❸ Double Codage induit par la symétrie axiale :

Grâce au ❷, rajouter **en bleu sur la figure les *codages manquants*** :

- entre (d) et (AA') et entre A, H et A'.
- entre (d) et (CC') et entre C, K et C'.

A quel objet géométrique nous fait penser ce double codage ? ………………………………………

II. LA SYMETRIE AXIALE – INTRODUCTION.

A. Sens commun de la symétrie axiale :

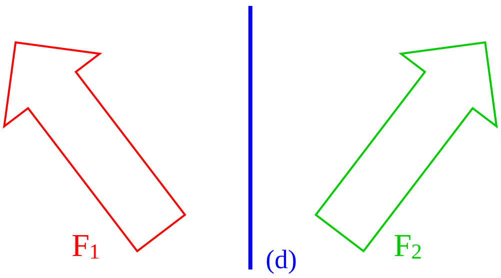
Les 3 activités précédentes p.2 et p.3 nous permettent d'affirmer :

La **Symétrie Axiale**, c'est ce qui se passe dans un miroir : c'est l'**effet miroir !**

Plus précisément :

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite lorsqu'elles se superposent parfaitement après pliage selon cette droite.

B. Vocabulaire et notations :



Voici 2 flèches F_1 et F_2 superposables après pliage selon la droite (d).
Ces 2 flèches sont donc symétriques par rapport à l'axe (d).

Voyons un peu le vocabulaire associé à cette situation.

❶ La droite (d) prend le nom d'**Axe de symétrie**.

❷ On parle ici de **Symétrie axiale d'axe (d)**.

On emploie aussi les 3 expressions équivalentes :

- *Symétrie **par rapport à** la droite (d).*
- *Symétrie **orthogonale** d'axe (d) (car on trace des perpendiculaires - voir activité ③ p.3).*
- ***Réflexion** d'axe (d) (en rapport avec le reflet dans un miroir ou dans l'eau).*

Quel que soit le nom utilisé, cette symétrie d'axe (d) se note : $s_{(d)}$ L'axe écrit bien en dessous du S.

❸ On dit que :

- F_1 ***a pour symétrique / a pour image*** F_2 ***par rapport à (d) / par la symétrie axiale*** $s_{(d)}$.
- ou bien que F_2 ***est le symétrique / est l'image de*** F_1 ***par rapport à (d) / par la symétrie axiale*** $s_{(d)}$.

  ⚠ ici, le verbe être inverse l'ordre logique des objets !
- ou bien que F_1 et F_2 **sont symétriques** par rapport à l'axe (d) / par la symétrie axiale $s_{(d)}$.

➢ Applications : vocabulaire et notations :

① En vous inspirant du ❷ de l'encadré ci-dessus :

• Traduire mathématiquement :

La symétrie axiale d'axe la droite (AB) : ……. La symétrie par rapport à l'axe (JK) : ……

La symétrie orthogonale d'axe (LM) : …….. La réflexion d'axe (Δ) (lire « delta ») : …….

• Traduire en bon français : $s_{(MJ)}$: ………………………………………………………

Traduire en bon français : $s_{(d')}$: ………………………………………………………

② Pour chaque phrase suivante, indiquer qui est l'axe de symétrie, qui est l'antécédent (l'objet initial de départ) et qui est l'image (l'objet final d'arrivée, le résultat, le symétrique) :

Phrases	*Axe ?*	*Antécédent ?*	*Image ?*
Exemple 1 : La droite (IJ) est la symétrique de la droite (LP) par rapport à (TH).	*(TH)*	*(LP)*	*(IJ)*
Exemple 2 : La symétrie axiale $\mathbf{s}_{(AB)}$ *transforme le point F en le point K.*	*(AB)*	*F*	*K*
① L'objet ② a pour image l'objet ① par la symétrie d'axe (AB).			
② La droite (KL) est la symétrique de la droite (TR) par la symétrie $\mathbf{s}_{(MJ)}$.			
③ La symétrie par rapport à (PR) transforme G en T.			
④ Le point M a pour antécédent le point H par $s_{(\Delta)}$.			
⑤ La droite (AB) a pour antécédent la droite (CD) par rapport à (EF).			
⑥ L'image de la droite (ML) par rapport à (HJ) est (ZD).			
⑦ L'antécédent par rapport à (ZL) de la droite (PK) est (AB).			

C. Etymologie du mot symétrie :

Le mot grec *summettria* (*juste mesure)* est formé de *sym* (*avec)* que l'on retrouve dans sympathique, et de *metron* (*mesure*). Pour les architectes romains, *symmetria* signifie *proportion* mais parfois déjà *symétrie*, considérée à l'époque comme les justes mesures.

Le mot *symmétrie*, apparaît à la Renaissance et a le même sens que pour les romains. Ce terme insiste sur les bonnes proportions d'un édifice pour le rendre plus esthétique.

Au $18^{\text{ème}}$ siècle, le mot *symmétrie* perd définitivement une lettre *m* et s'étend à d'autres disciplines comme la littérature ou la peinture pour désigner la régularité dans les motifs d'une œuvre. L'adjectif *symétrique* apparaît en architecture au $18^{\text{ème}}$ siècle.

Le sens d'aujourd'hui se développe vers la fin du $18^{\text{ème}}$ siècle.

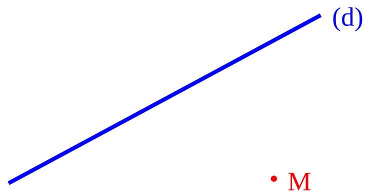
Maintenant que le vocabulaire et les notations sont en place, on va définir « proprement » (mathématiquement) ce qu'est une symétrie axiale !

Soient donc un point M et une droite (d) donnés :

« Définir la symétrie $\mathbf{s}_{(d)}$ *d'axe (d), c'est être capable de donner (construire) sans aucun doute possible l'image de n'importe quel point M par cette symétrie. »*

D'où les définitions des pages suivantes :

III. POINTS SYMETRIQUES.



Situation :

Une droite (d) est donnée. On considère donc la symétrie $\mathbf{s}_{(d)}$ d'axe (d).

Puis un point M est placé.

A. Définition de 2 points symétriques :

Il s'agit de définir mathématiquement ce qu'est le symétrique du point M par rapport à l'axe (d).

On va y arriver grâce à l'activité C] p.3. Il n'y a que 2 cas possibles :

❶ Cas très particulier : le point **M est sur l'axe de symétrie (d).**

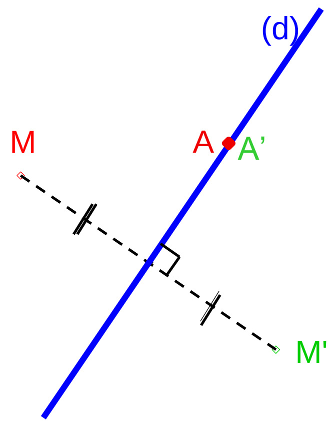
Lorsque le point **M est sur l'axe** de symétrie, M a pour symétrique **lui-même** !

❷ Cas général : le point **M est en dehors de l'axe de symétrie (d).**

Lorsque le point M n'est pas sur l'axe de symétrie, M a pour image l'unique point M' qui vérifie les 2 conditions suivantes :

① (d) ⊥ [MM'].
② (d) coupe [MM'] en son milieu.

➢ Figure :



• Cas particulier ❶ : le point est sur l'axe (d) de symétrie.

Puisque A est sur l'axe (d), le symétrique A' du point A est ………………..……. !

*Comme le symétrique du point A est lui-même, on dit que A est un **point invariant**.*

• Cas général ❷ : Le point est en dehors de l'axe (d) de symétrie.

le symétrique du point M par rapport à l'axe (d) est alors le seul point M' tel que :

① (d) ……. [MM'].
② (d) coupe [MM'] en son ………………

***Sur la figure, repasser en bleu le double codage* introduit par la symétrie axiale dans ce 2ème cas.**

➢ Remarque :

La symétrie est l'action qui permet de transformer un point en un autre à la façon d'un miroir. La symétrie axiale est donc une **transformation**. On ne voit donc pas la symétrie axiale : la symétrie n'est pas un objet ! Ce que l'on voit, c'est le résultat de cette symétrie axiale. **C'est l'effet Miroir.**

B. Vocabulaire et notations :

On dit que (en reprenant la figure ci-dessus) :

- M ***a pour symétrique / a pour image*** M' ***par rapport à (d) / par la symétrie axiale*** $\boldsymbol{s}_{(d)}$.
- ou bien que **…..** ***est le symétrique / est l'image de*** **……** ***par rapport à (d) / par la symétrie axiale*** $\boldsymbol{s}_{(d)}$.
- ou bien que M et M' **sont …………………………..** par rapport à l'axe **…….** / par la symétrie axiale $\mathbf{s}_{(d)}$.

Maintenant que l'on a défini mathématiquement le symétrique d'un point, on veut pouvoir le construire !

C. Construction du symétrique d'un point :

On veut construire le symétrique d'un point A par rapport à une droite (d).

1. Cas particulier ❶ : A ∈ (d). Autrement dit, le point A est sur l'axe (d) :

Inutile de réfléchir très longtemps[3] ! Le symétrique de A par rapport à l'axe (d) est ……. !

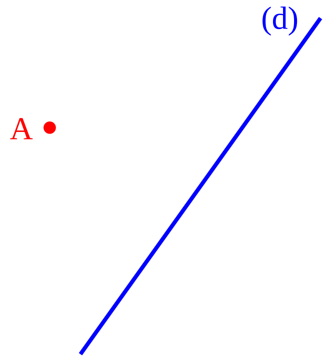
Un point *sur l'axe de symétrie* a pour symétrique ………………………..….. !
Les seuls points laissés invariants par une symétrie axiale sont les points sur l'axe de symétrie.

2. Cas g$^{\text{al}}$ ❷ : A ∉ (d). Autrement dit, le point A n'est pas sur l'axe (d) :

Ce $2^{\text{ème}}$ cas est le cas le plus général. On a 3 méthodes de construction.

➢ **<u>Méthode ① :</u> Construction avec l'équerre du symétrique d'un point.**

Cette construction s'appuie sur les 2 conditions géométriques (perpendicularité + milieu) données dans la définition p.6.

Programme de construction en ……. étapes.	Construction à l'équerre.
① • Tracer à l'équerre, ***<u>en pointillés,</u>*** **la perpendiculaire** à l'axe (d) passant par le point A et traversant (d). *(codage en bleu !)* • Cette perpendiculaire coupe (d) en H. Placer le point H. ② Sur cette droite (AH) en pointillés *(prolonger si besoin)* : Placer en vert le point A' de telle sorte que AH = HA'. (d) passe bien par le milieu de [AA']. *(codage en bleu !)* A a pour symétrique le point A' par rapport à (d).	 *Effacer H.* *Double codage en bleu sur les pointillés !*

➢ <u>Application :</u> **En appliquant rigoureusement la méthode ci-dessus :**

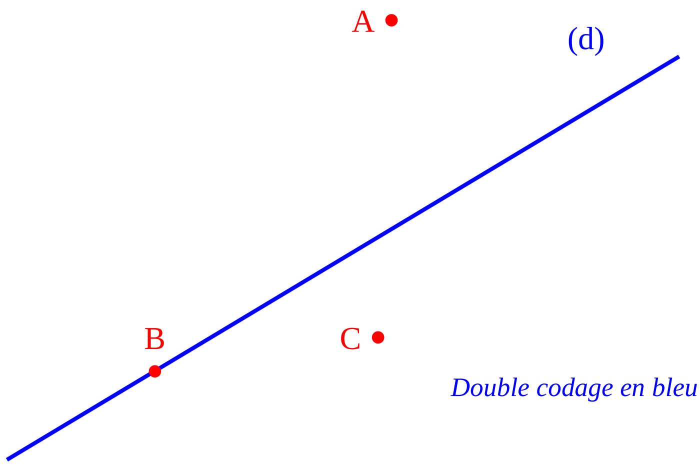
Construire avec l'équerre graduée les symétriques A', B' et C' des 3 points A, B, et C par rapport à (d).

<u>3 conseils :</u>

① Le symétrique d'un point est toujours de l'autre côté de l'axe, « bien en face » de son antécédent (c'est l'« effet miroir »).

② Pour faciliter la construction, ***on a toujours intérêt à placer bien verticalement en face de soi l'axe****, en tournant la feuille !*

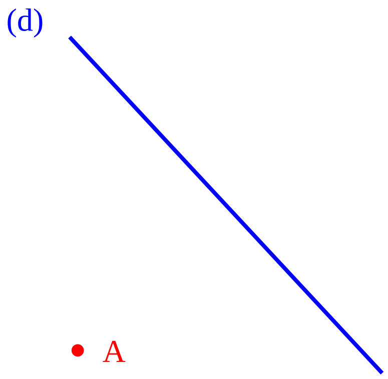
③ Traits légers de construction en pointillés !



Double codage en bleu sur les pointillés

[3] Cela ne changera pas beaucoup de d'habitude n'est-ce pas ? ………

➢ **<u>Méthode ② :</u> Construction au compas du symétrique d'un point.**

<table>
<tr><th>Programme de construction en …… étapes.</th><th>Construction au compas.</th></tr>
<tr><td>① Tracer au compas en pointillés un arc de cercle de centre A qui va couper l'axe (d) en 2 points M et N.
Placer ces 2 points M et N.
② A partir de ces points de coupure M et N, tracer au compas en pointillés et de l'autre côté de l'axe, 2 petits arcs de cercle de même rayon qu'à l'étape ①.
Placer l'image A' à l'intersection de ces 2 petits arcs.
A et A' sont bien symétriques par rapport à (d).
③ Tracer en pointillés [AA']. Placer le double codage.</td><td>Traits de construction légers !


Effacer M et N.
Double codage en bleu
sur les pointillés</td></tr>
</table>

➢ <u>Remarque</u> : Cette construction s'appuie sur la propriété suivante du losange : « les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. ». Quel losange a-t-on tracé ci-dessus ? ……….

➢ <u>Application</u> : **En appliquant rigoureusement la méthode ci-dessus :**

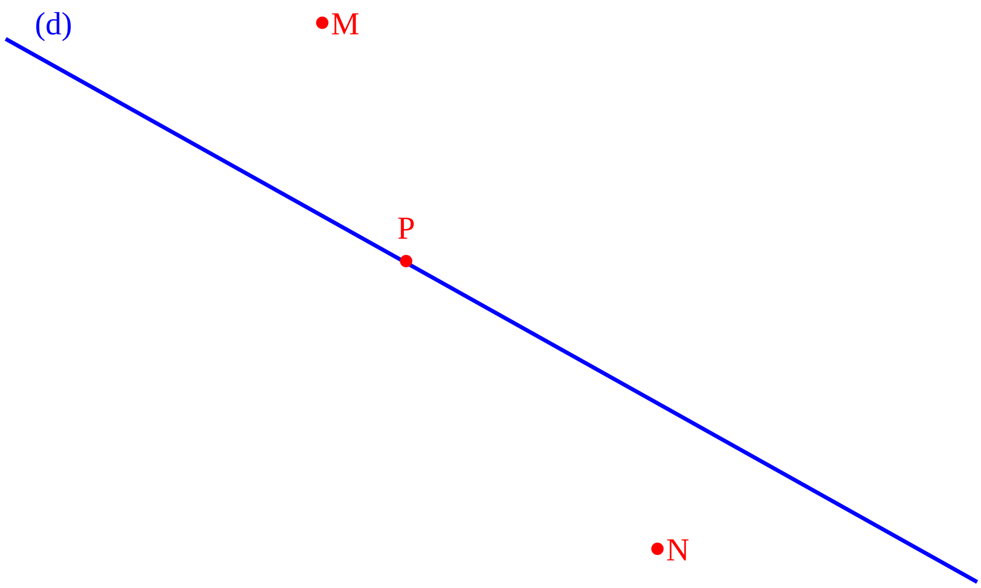
Construire au compas les symétriques M', N' et P' des 3 points M, N, et P par rapport à l'axe (d).

<u>3 conseils :</u>

① Le symétrique d'un point est toujours de l'autre côté de l'axe, « bien en face » de son antécédent (c'est l'« effet miroir »).

*② Pour faciliter la construction, **on a toujours intérêt à placer bien verticalement en face de soi l'axe**, quitte à tourner un peu la feuille !*

③ Traits légers de construction en pointillés ! Double codage en bleu sur les pointillés.

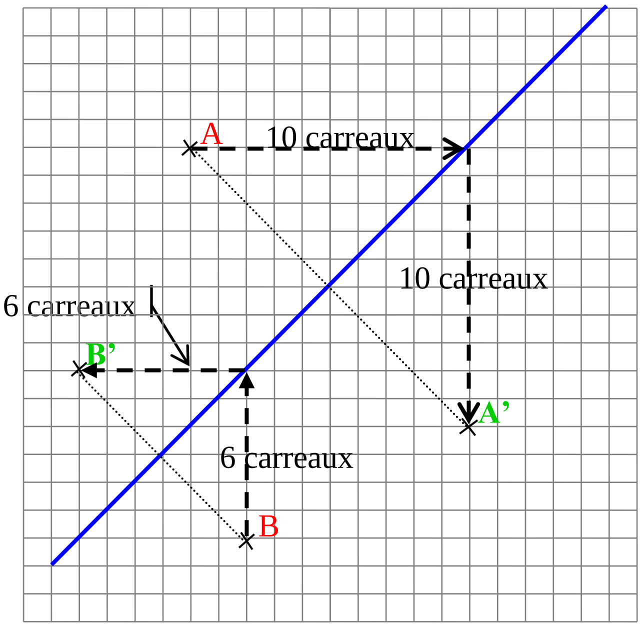


<u>Remarque</u> : S'il y a le choix lors d'une construction, privilégier la construction à l'équerre qui est plus naturelle et plus rapide.

- **<u>Méthode ③ :</u> Construction utilisant le quadrillage de la feuille.**

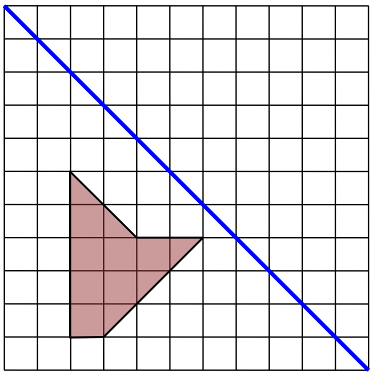
Cette méthode n'utilise ni équerre, ni compas mais seulement des déplacements sur un quadrillage.

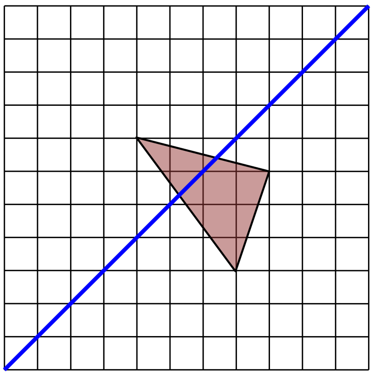
Soient donc **un axe (d) qui est l'une des diagonales des carreaux** du quadrillage[4], et un point A sur le quadrillage. Pour placer le symétrique A' de A par rapport à cet axe (d), on procède ainsi :

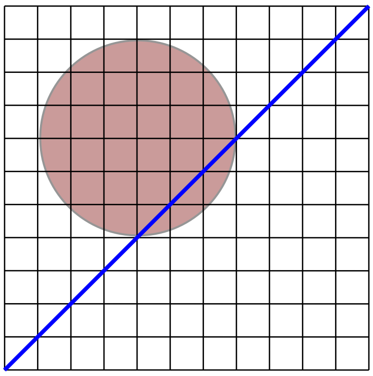
<table>
<tr><th>Programme de construction en …… étapes.</th><th>Construction utilisant le quadrillage.</th></tr>
<tr><td>① A partir du point A, on se déplace horizontalement sur le quadrillage jusqu'à l'axe (d), en comptant le nombre de carreaux du point A jusqu'à cet axe.
② Puis, à partir de ce point de l'axe, on traverse l'axe et on se déplace verticalement sur le quadrillage du même nombre de carreaux qu'à l'étape 1.
③ Là, on place l'image A'.
A et A' sont symétriques par rapport à (d).
<u>Remarques :</u>
• On est parti horizontalement pour le point A, on peut partir aussi verticalement ! C'est le cas ici pour le point B.
• Il faut traverser l'axe pour se retrouver de l'autre côté ! Et non aller tout droit !</td><td></td></tr>
</table>

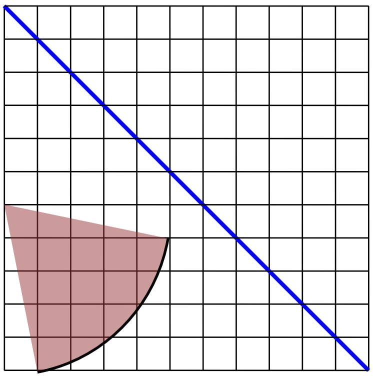
<u>Application :</u>

En utilisant uniquement le quadrillage, tracer en vert les symétriques des figures par rapport à l'axe oblique.









[4] Les cas où l'axe n'est ni horizontal, ni vertical, ni dans la diagonale sont plus compliqués qu'une bonne utilisation de l'équerre ou du compas !

Maintenant que nous savons les bases (définitions, vocabulaire et constructions), nous allons voir quelques propriétés des symétries axiales.

IV. PROPRIETES DES SYMETRIES AXIALES.

A. Transformation des figures de base par les symétries axiales :

➢ A l'équerre, construire *en vert* les symétriques par rapport à l'axe (d) des 3 figures suivantes :

Traits légers de construction en pointillés et doubles codages en bleu sur les pointillés !

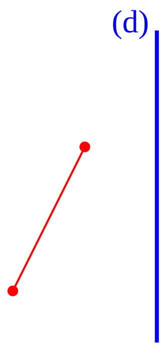


Image d'un segment

• Le symétrique d'un segment est aussi un ……………………… de même ………………….

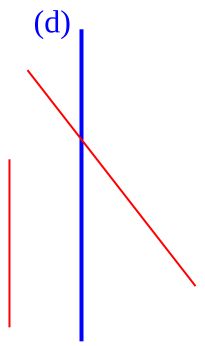


Image de droites

• Le symétrique d'une droite est aussi une ……………………

• *Si une droite coupe l'axe, alors sa droite image coupe aussi l'axe au même endroit* (SAUF si la 1ère droite est ……………….. à l'axe).

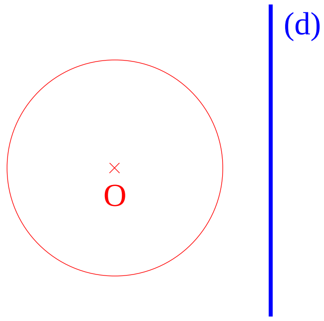


Image d'un cercle

• Le symétrique d'un cercle est aussi un …………………… :

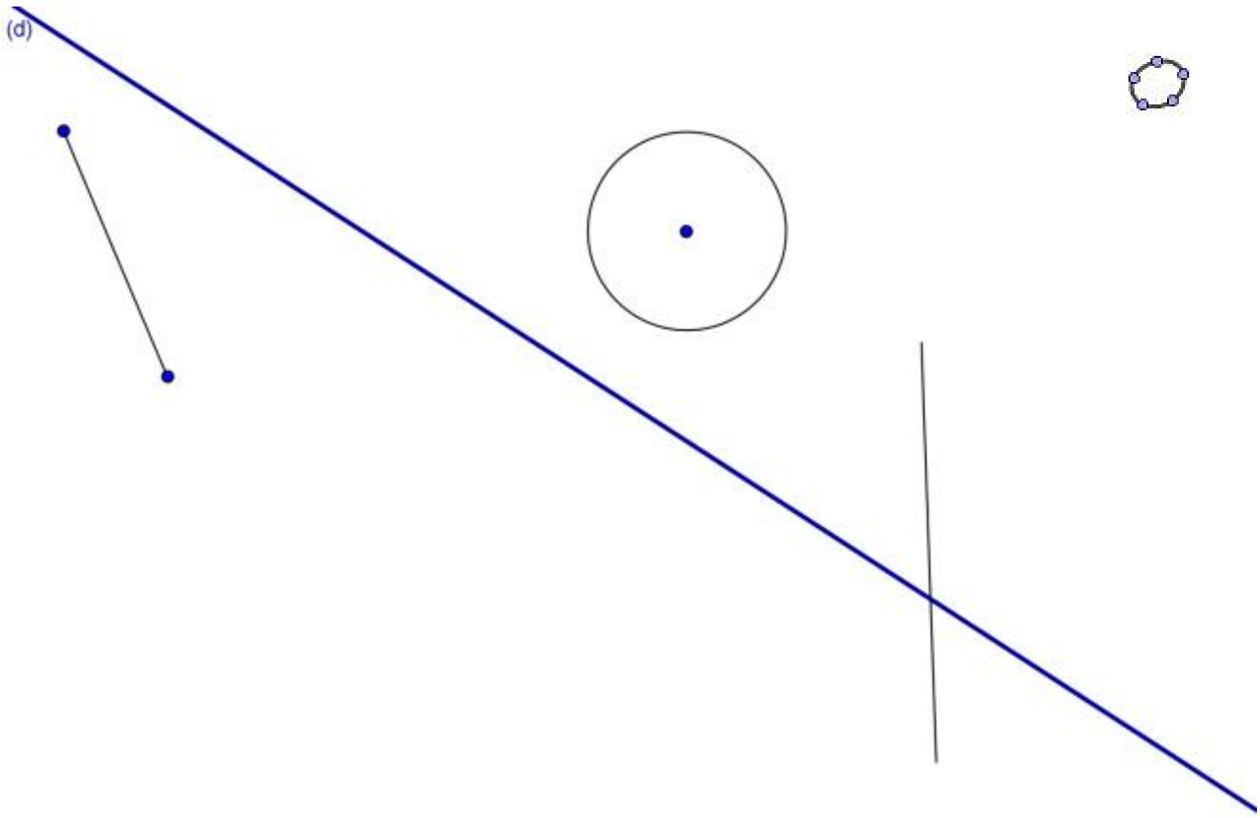
① de même ……………..

② le centre du cercle image est le …………………….………. du centre du cercle initial.

➢ Application :

Au compas, construire en vert les symétriques de ce segment, de cette droite et de ce cercle par rapport à (d).

Traits légers de construction en pointillés et doubles codages en bleu sur les pointillés !



B. 4 propriétés de conservation des symétries axiales :

Les 4 propriétés de conservation qui vont suivre sont la traduction mathématique de la non-déformation des objets lors d'un effet miroir !

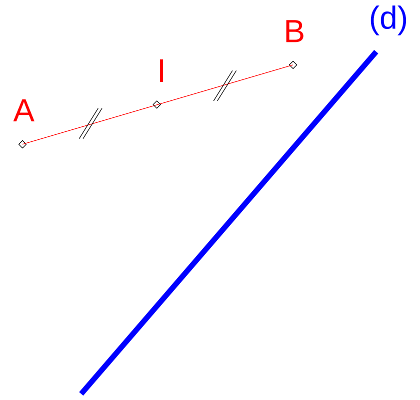
Conservation ❶ : Les symétries axiales conservent les Longueurs donc le Milieu :

① Le symétrique d'un segment est aussi un ……………..……..………. de même …………………
② En conséquence, les symétries axiales conservent aussi le m……………..……… :
« Le symétrique du milieu d'un segment est le ………………………… du segment image. »

- Figure :

Tracer en vert [A'B'], le symétrique du segment [AB] et I', le symétrique du milieu I du segment [AB].

Doubles codages en bleu sur les pointillés !



Vous remarquez que l'image **I'** est aussi le …..……………….……….. de [………].

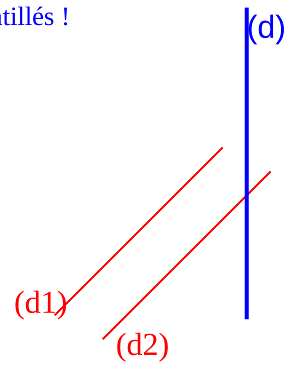
Rédaction : *Puisque I est le …………….. du segment [AB], alors, par conservation du milieu, son ……………………......….. **I'** est aussi le ………………………… du segment image [……….].*

Conservation ❷ : Les symétries axiales conservent le Parallélisme :

Les symétriques de 2 droites parallèles sont 2 ………….. qui sont aussi ………………….... entre elles.

- Figure : Tracer en vert les symétriques (d'1) et (d'2) des 2 droites parallèles (d1) et (d2).

Doubles codages en bleu sur les pointillés !



Vous remarquez que les 2 droites images (d'1) et (d'2) sont aussi ……………….……..……. entre elles !

Rédaction : *Puisque (d1) …. (d2) alors, par conservation du parallélisme, leurs ……………………. (d'1) et (d'2) seront aussi ……………………........*

Attention !

Il n'est nulle part dit qu'une droite et son image sont parallèles, ce qui est presque toujours faux : voir (d1) et (d'1) sur la figure ! (Vrai seulement dans les cas très rares où la 1ère droite est …..…. ou …..….. à l'axe).

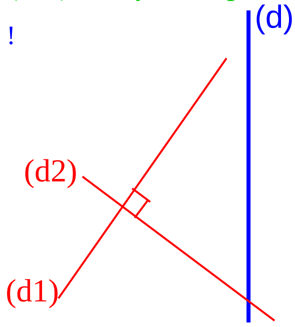
Conservation ❸ : Les symétries axiales conservent les Mesures d'Angle donc la Perpendicularité :

① Le symétrique d'un angle est aussi un angle de même ……………..……

② En conséquence, les symétriques de 2 droites perpendiculaires sont 2 droites qui sont aussi ………………………………………… entre elles.

➢ Figure : Tracer en vert (d'1) et (d'2) les symétriques des 2 droites perpendiculaires (d1) et (d2).

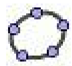
Doubles codages en bleu sur les pointillés !



Vous remarquez que les 2 droites images (d'1) et (d'2) sont aussi ……………………..…… entre elles !

Rédaction : *Puisque (d1) …. (d2) alors, par conservation de la mesure d'angle (de la perpendicularité), leurs ……………………….…. (d'1) et (d'2) seront aussi ………………………..*

Attention !

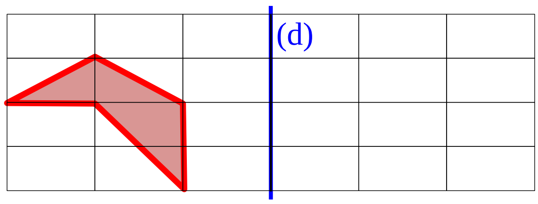


Il n'est nulle part dit qu'une droite et son image sont perpendiculaires, **ce qui est presque toujours faux !** Voir (d1) et (d'1) sur la figure.

Conservation ❹ : Les symétries axiales conservent le Périmètre et l'Aire :

Une figure et sa figure symétrique ont le même …………………………….. et la même ……………..

Sans compas ni pointillés mais en vous aidant du quadrillage, tracer *en vert la symétrique* de la figure rouge par rapport à l'axe (d). Ont-elles la même aire ?



Rédaction : *Puisque la figure verte est la ……………….………………….. de la figure rouge, alors, par conservation du périmètre et de l'aire :* *𝒫(Figure verte) = ……………………………*

𝒜(Figure verte) = ………………..……………….

Donc pour connaître le périmètre ou l'aire d'une figure symétrique, il suffit de connaître le périmètre ou l'aire de la figure initiale.

❺ Conséquences des 4 propriétés de conservation :

Puisque les symétries axiales conservent les distances, le parallélisme, les mesures d'angles, la perpendicularité, le périmètre, l'aire etc. alors quelle est l'image par une symétrie axiale :

d'un triangle isocèle ? d'un triangle équilatéral ? d'un parallélogramme ? d'un

➢ **Exercice 1 fondamental : Propriétés de conservation ; Construction du symétrique d'une figure.**

Sur la figure en bas, on sait que : ***OB = 2 cm, (d_3) // (d_4) et que (d_3) ⊥ (Ax), Codage !***

Placer L, le milieu du segment [OC], Codage !

1. ***Sans rien tracer et en appliquant l'une des propriétés de conservation p.11 ou 12,* compléter :**

a. Montrer que L', l'image du point L, sera le milieu de [O'C'], le symétrique de [OC] ? …………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b. Comment seront (d'_3) et (A'x'), les images de (d_3) et (Ax) ? ………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

c. Comment seront (d'_3) et (d'_4), les images de (d_3) et (d_4) ? ……………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

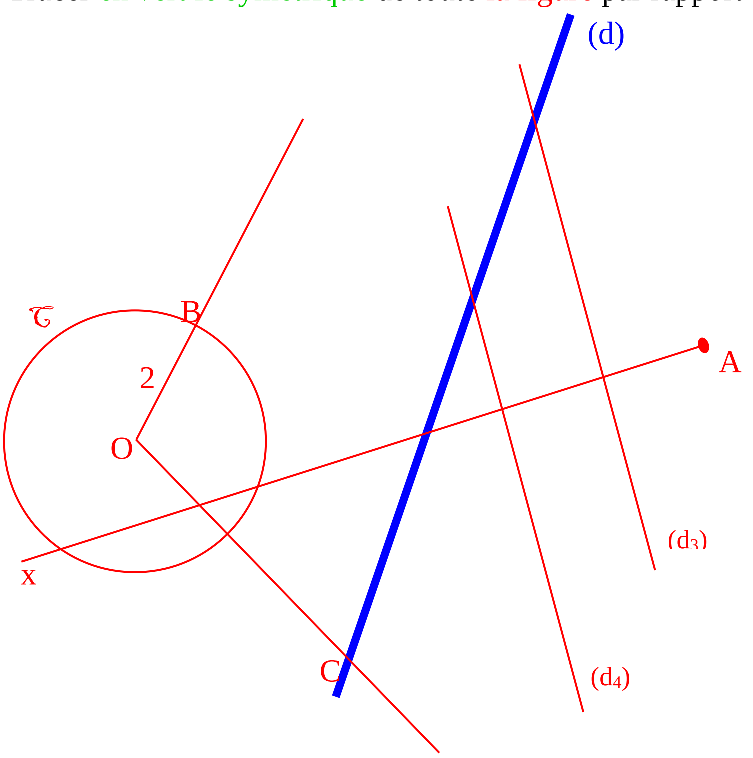
d. Comment seront les mesures de $\widehat{BOC}$ et de son symétrique $\widehat{B'O'C'}$? ……………………………….

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

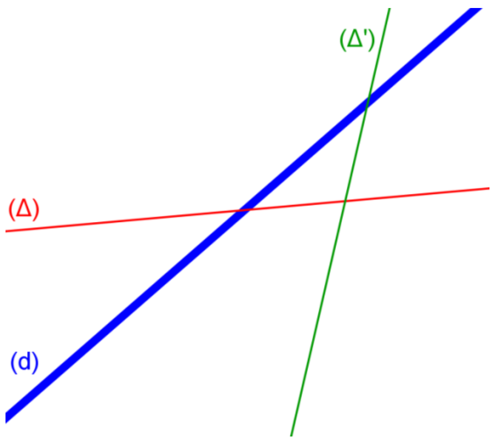
e. Calculer la valeur exacte de la longueur de $\mathcal{C}$', le symétrique du cercle $\mathcal{C}$:

2. Tracer en vert le symétrique de toute la figure par rapport à (d) en plaçant bien l'axe en face de vous :



➢ <u>Exercice 2</u> : Intersection d'une droite avec l'axe de symétrie.

Supposons que 2 droites (Δ) et (Δ') sont symétriques par rapport à un axe (d) <u>mais</u> qu'elles se coupent en un point qui est en dehors de l'axe de symétrie (d) (voir figure ci-contre).



Prouvons que cela est impossible ! Il y a forcément une contradiction !

Pour cela, nous allons utiliser un nouveau type de raisonnement : le **raisonnement par l'absurde**.

Soit donc E le point d'intersection de (Δ) avec l'axe (d). *Placer E sur la figure.*

• D'une part :

Puisque E est sur l'axe de symétrie (d), alors son symétrique est …………………………… ! Donc le symétrique de E est E.

• Mais d'autre part :

Comme E est sur l'axe de symétrie (d) alors son symétrique E' est aussi sur l'axe (d).

Comme E est aussi un point de (Δ) alors son symétrique E' est aussi sur la droite image (Δ').

Donc E' doit se trouver à l'intersection de (d) et de (Δ'). *Placez E' sur la figure.*

• D'après le dessin, le symétrique du point E aurait donc 2 positions distinctes : en E et en E', ce qui est absurde !

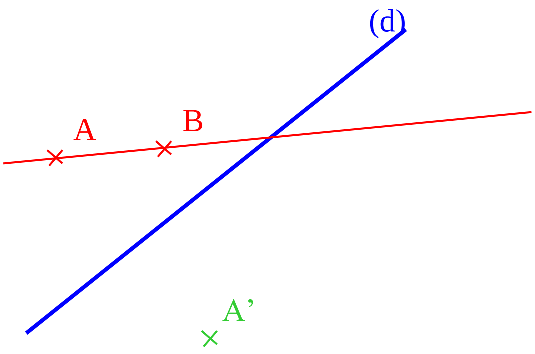
Donc la supposition de départ « (Δ) et (Δ') sont symétriques <u>mais</u> se coupent en dehors de l'axe (d) » est fausse ! Concluons :

Lorsqu'une droite coupe l'axe de symétrie en un point, alors l'image de cette droite coupe aussi l'axe **en ce même point (c-à-d au même endroit).**

<u>Application</u> :

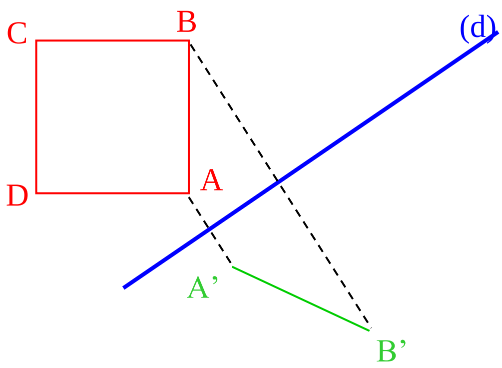
Sur cette figure, A et A' sont symétriques par rapport à (d).

Sans rien construire, tracer la symétrique de (AB) par rapport à (d).



➢ <u>Exercice 3</u> : Propriétés de conservation.

Soit un carré ABCD dont on a commencé à tracer le symétrique. Sans tracer aucun pointillé, terminer de construire le symétrique du carré ABCD. Puis justifier votre construction à l'aide des propriétés de conservation.



V. AXES DE SYMETRIE D'UNE FIGURE.

Avez-vous remarqué que foule d'objets de la vie quotidienne (vêtements, bâtiments, tables, etc.) ont « une partie gauche et une partie droite identiques ». Ils possèdent en fait un ou plusieurs axes de symétrie.

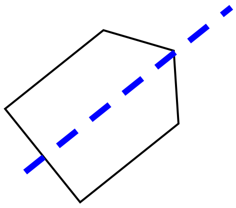
A. Définition d'un axe de symétrie (ou ligne de partage égal) :

Une droite (d) est **un axe de symétrie d'une figure** :

- lorsque le symétrique de cette figure par rapport à (d) est la figure elle-même !
- autrement dit lorsqu'on plie la figure selon cet axe (d), la figure se replie sur elle-même parfaitement.

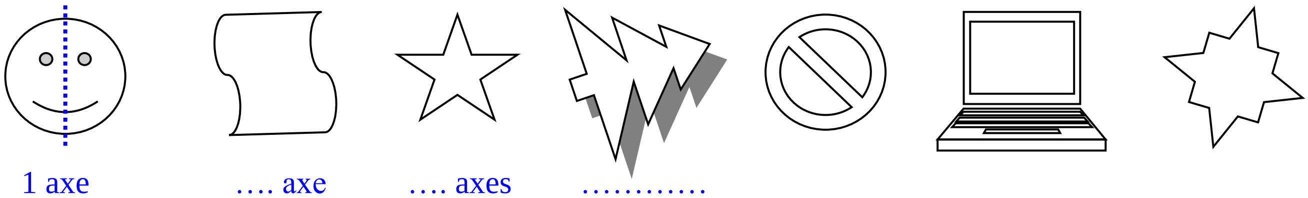
On parle aussi de « ligne de partage » : la figure est partagée par cet axe (d) en 2 parties « identiques ».

- Exemple : La flèche ci-contre possède 1 seul axe de symétrie (en pointillés) : en effet, les parties « à gauche » et « à droite » de l'axe sont exactement superposables après pliage selon cet axe. Il n'y a pas d'autre axe de symétrie !



B. Exercices sur les axes de symétrie :

① Pour les 7 figures suivantes, tracer en bleu le ou les axes de symétrie puis ***indiquer leur nombre.***

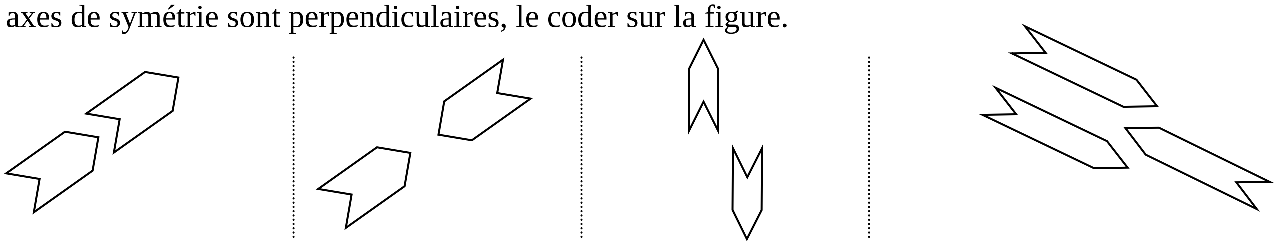


1 axe …. axe …. axes ………..

② Parmi les 10 chiffres quels sont ceux avec :

- *exactement* 1 axe de symétrie :
- *exactement* 2 axes de symétrie :

③ Pour chacune des 4 figures suivantes, tracer en bleu les axes de symétrie puis ***indiquer leur nombre.*** Si 2 axes de symétrie sont perpendiculaires, le coder sur la figure.

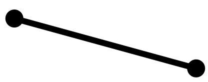
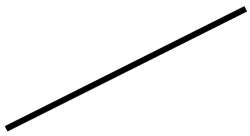
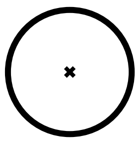
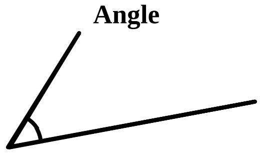


Remarques : Lorsqu'une figure a *exactement 2 axes de symétrie*, alors ces 2 axes sont ……………………..

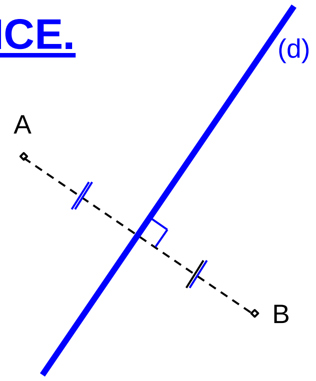
Une figure peut-elle avoir *exactement 2 axes de symétrie parallèles* ? ……………..

C. Axes de symétrie des figures de base :

Tracer s'ils existent : le ou les axes de symétrie *en bleu*. *Coder les axes perpendiculaires.*

	Segment	**Droite**	**Cercle**	**Angle**
				
Nombre d'axe(s) :				

VI. AXE DE SYMETRIE ET SEGMENT : MEDIATRICE.



Soient A et B 2 points symétriques par rapport à une droite (d).

D'après la page précédente, le segment [AB] possède 2 axes de symétrie :

- la droite (AB) elle-même.
- et la droite (d).

A. Médiatrice d'un segment : nouvelle définition.

La médiatrice d'un segment est l'un des 2 axes de symétrie de ce segment :
celui qui ne contient pas le segment (voir figure ci-dessus, repasser en bleu le double codage).

En conséquence de la définition que nous avons donnée de 2 points symétriques (p.III.A]), on va retrouver les propriétés géométriques (B]) et métriques (C]) de la médiatrice d'un segment vues au contrat 2.

B. Propriétés géométriques de la médiatrice d'un segment :

Propriétés géométriques caractéristiques de la médiatrice d'un segment.

	(….. condition ou hypothèse)		(……. résultats ou conclusions)
Quand	(d) est la médiatrice de [AB]	alors	① (d) passe par le ………….………. de [AB] ② (d) …….. [AB]

Autrement dit : Lorsqu' une droite (d) est la .... d'un segment, alors elle coupe ce segment en son .... et ....

Utilité : Cette propriété peut servir à prouver directement :

- soit qu'une droite passe par le ………….……….. d'un segment.
- soit qu'une droite est …………….…………………………. à une autre.

La réciproque (l'inverse) de la propriété ci-dessus est vraie aussi et permet de reconnaître géométriquement la médiatrice d'un segment :

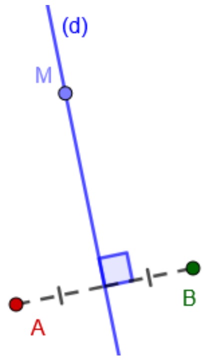
Reconnaître géométriquement la médiatrice d'un segment.

	(….. conditions ou hypothèses)		(……. résultat ou conclusion)
Quand	① (d) passe par le …………….. de [AB] ② (d) ……… [AB]	alors	(d) est la ……………………….. de [AB].

Autrement dit : Lorsqu'une droite coupe un segment en son .... et ....,
alors cette droite est la .... de ce segment.

Utilité : Cette réciproque peut servir à prouver qu'une droite est la …………………………………. d'un segment.

C. Équidistance entre 2 points et Médiatrice d'un segment :



➢ *Soit (d) la médiatrice d'un segment [AB] et M un point sur cette médiatrice (voir figure).*

Prouvons que ce point M est bien équidistant de A et B les 2 extrémités du segment :

- *Le symétrique de M par rapport à la droite (d) est ………………………….............. : c'est M !*
- *Par définition de la médiatrice comme axe de symétrie du segment, A et B symétriques par rapport à (d).*
  Donc les segments [MA] et [MB] sont symétriques par rapport à l'axe (d).
  Donc par conservation des longueurs, ces 2 segments [MA] et [MB] ont la même longueur.
- *En résumé, lorsqu'un point M est sur la médiatrice d'un segment [AB], alors MA = MB.*

On vient de prouver la propriété suivante :

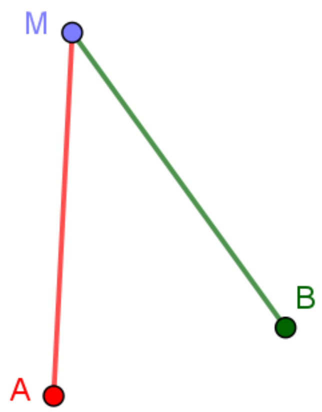
Propriété métrique caractéristique d'équidistance de la médiatrice d'un segment :

	(….. condition ou hypothèse)		(… résultat ou conclusion)
Quand	un point M est sur la …………………….. d'un segment [AB]	alors	MA ….. MB

Autremement dit : voir ci-dessous

Autrement dit : Lorsqu'un point appartient à la ………..…………………….. d'un segment, alors il est situé à la même distance des 2……………………………………… de ce segment.

Utilité : Cette propriété peut servir à prouver une égalité de …………………..



➢ *Étudions la situation réciproque :*

Soit un point M tel que MA = MB. Donc M est à ***égale ………………………..*** *de A et B.* ***Codage !***

Prouvons que ce point M est bien sur la médiatrice du segment [AB] :

- *Placer I le milieu du segment [AB].**Codage !** Puis tracer la droite (MI).*
- *On remarque que les 2 triangles AMI et BMI ont leurs 3 côtés 2 à 2 de même longueur.*
  Donc AMI et BMI sont superposables par pliage le long de la droite (MI).
  Donc (MI) axe de symétrie du triangle AMB. Donc A et B symétriques par rapport à (MI).
- *Donc la droite (MI) est un axe de symétrie du segment [AB].*
  Donc (MI) est la médiatrice du segment [AB].

On vient de prouver la réciproque de la propriété métrique de la médiatrice :

Réciproque de la propriété métrique caractéristique d'équidistance de la médiatrice d'un segment :

	(….. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	…….. = ……..	alors	M est sur la ……………………..….. du segment [AB].

Autrement dit : Lorsqu'un point est ………………………………………… des extrémités d'un segment, alors ce point est sur la ……………………………………………….. de ce segment.

Utilité : Cette propriété peut servir à prouver qu'un point est sur une …………………..

Deux remarques importantes sur le lien Médiatrice ↔ Equidistance :

① Puisque la propriété métrique d'équidistance et sa réciproque sont vraies toutes les deux, on dit que cette propriété métrique caractérise la médiatrice. **En gros, dès que vous voyez « médiatrice », il faut penser « équidistance entre 2 points » et inversement !**

② **En conséquence, rechercher l'ensemble des points qui sont équidistants de 2 points fixés, revient à tracer la ……………………………………..…….. du segment reliant ces 2 points.**

D. Lien « Médiatrice ↔ Symétrie axiale » :

D'après la définition de la médiatrice p.16, un **lien profond** unit Points symétriques et Médiatrice.

Passage Symétrie axiale → Médiatrice :

	(….. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	Les points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d)	alors	(d) est la ……………….….………… du segment [AB].

Utilité : Cette propriété peut servir à montrer qu'une droite est une ……………………………………

Réciproquement :

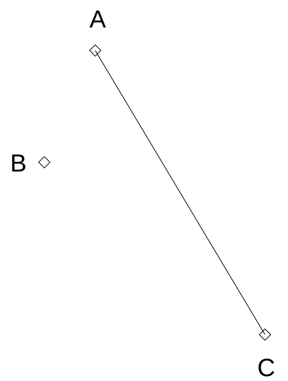
Passage Médiatrice → Symétrie axiale :

	(….. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	(d) est la ………………..……………. du segment [AB]	alors	A et B sont ……………………….. par rapport à ………

Utilité : Cette réciproque peut servir à montrer que 2 points sont ……………………………..

Ce lien profond dit une chose très importante : **quand vous voyez « symétrie axiale », il faut tout de suite penser « médiatrice ». Quand vous voyez « médiatrice », il faut savoir traduire « symétrie axiale » !**
Ce lien profond est souvent mis en jeu dans les problèmes de construction ou de raisonnement.

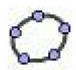
E. Exercices :



❶ Sur la figure ci-contre, construire D le symétrique de B par rapport à (AC).
Placer O le point d'intersection de (AC) et (BD).

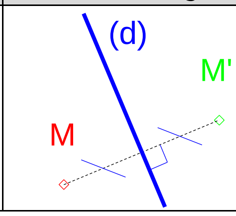
1. Que représente la droite (AC) pour le segment [BD] ? Justifier.
2. En déduire que ABCD est un cerf-volant. Justifier.
3. Quelle est la nature du triangle CBD puis du triangle ABO ? Justifier.

❷ 1. Tracer un triangle BOL tel que BO = 6 cm, OL = 5 cm et $\widehat{BOL} = 60°$.



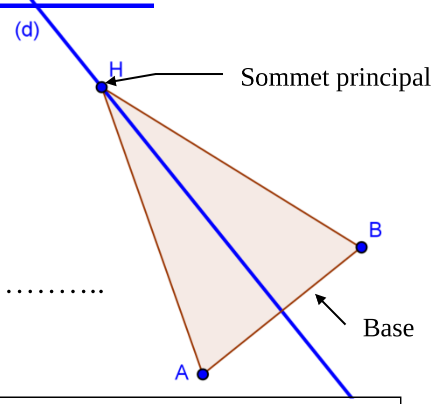
2. Tracer les médiatrices de chacun des 3 côtés.
3. A l'intérieur de ce triangle, hachurer la zone des points qui sont plus proches de B et de O que de L.

VII. TABLEAU RECAPITULATIF SUR LA SYMETRIE AXIALE.

Transformation	*Sens commun*	*Elément caractéristique*	*Figure et double codage*	*Objet géométrique associé*	*Points invariants*
Symétrie …………..	Effet ………… ou Réflexion ou Renversement	Son ………. de symétrie		La ………..……… d'un segment	……………… ………………

VIII. AXE DE SYMETRIE ET TRIANGLES PARTICULIERS.

A. Axe de symétrie et triangle isocèle :



Soient une droite (d), un point H sur (d), et un point A qui n'est pas sur (d).

On a placé le point B, le symétrique de A par rapport à (d). Codage ?

La droite (d) est ainsi un axe de symétrie du triangle AHB.

Que représente la droite (d) pour le segment [AB] ? …………………………………..

1. Autre définition du triangle isocèle :

Autre définition : Un triangle qui a au moins **un axe de symétrie** s'appelle un triangle **isocèle.**

2. Propriétés géométriques directes des triangles isocèles :

Grâce aux propriétés de conservation de la symétrie axiale, le triangle isocèle possède certaines propriétés.

En utilisant les notations de la figure ci-dessus :

❶ Le triangle isocèle a 2 côtés de même longueur : ………. = ……….. Codages ?

❷ Le triangle isocèle a 2 angles « à la base » de même mesure : $\widehat{HAB}$ = ………… Codages ?

❸ L'axe (d) est donc à la fois la bissectrice de $\widehat{AHB}$ et la médiatrice de [AB]. Codages ?

3. Comment reconnaître un triangle isocèle : propriétés réciproques.

❹ Si un triangle a 2 côtés de même …………………………..., alors il est ……………………..

❺ Si un triangle a 2 angles de même …………………………., alors il est ……………………

B. Axe de symétrie et triangle équilatéral :

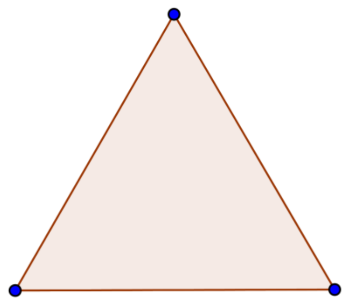
- Parmi les triangles isocèles, il y a ceux qui sont « isocèles partout » ! C-à-d ceux qui ont **en plus** la particularité d'avoir la base de même longueur que les 2 autres côtés.

Ces triangles ont alors ***3*** axes de symétrie.

Autre définition : Un triangle qui a **……. axes de symétrie** s'appelle un **triangle équilatéral.**

Propriété : Chacun des 3 axes de symétrie du triangle équilatéral est donc à la fois médiatrice et bissectrice.

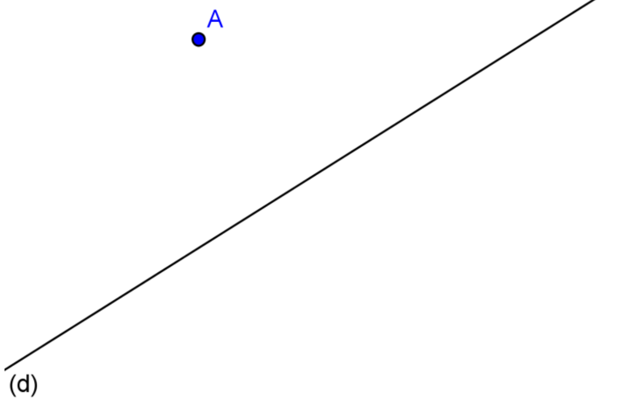
- Figure : Tracer les 3 axes de symétrie de ce triangle équilatéral. **Codages sur ces 3 axes de symétries !**



C. Exercices sur Axes de symétrie et Triangles :

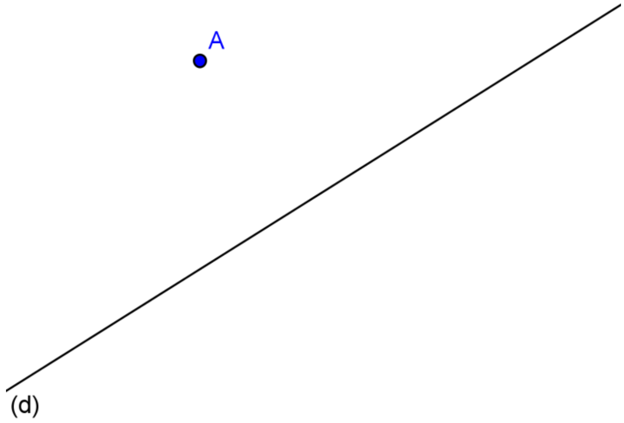
➢ Exercice 1 : Contrôle 2005. Problèmes de construction. **Croquis lisible et complet. Numéros d'étape !**

1. Construire 2 points B et O *sur la droite (d)* tels que :
   - le triangle BOA soit isocèle en A.
   - BO = 6 cm



codage ?

2. Construire 2 points I et J tels que :
   - (d) soit un axe de symétrie du triangle AIJ.
   - I sur (d) et AI = 3 cm.



codage ?

➢ Exercice 2 :

Sur la figure ci-contre, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de diamètre [AB] et (d) est la médiatrice du segment [AO].

1. Placer un point C sur la médiatrice (d), mais pas sur $\mathcal{C}$.

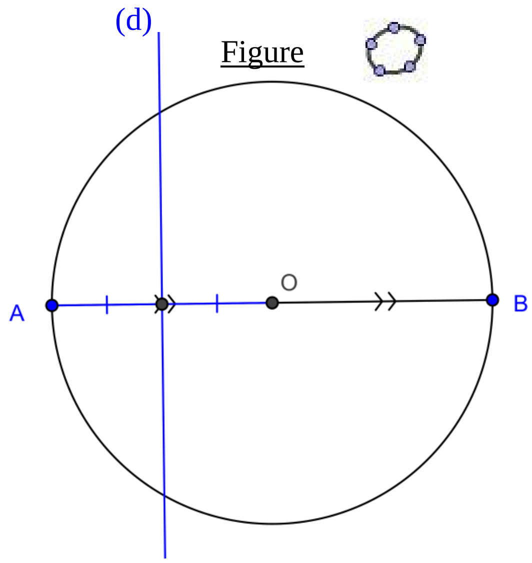
Quelle est la nature du triangle AOC ? Justifier !

2. Soit D l'un des 2 points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec (d).

Quelle est la nature du triangle AOD ? Justifier !

1.

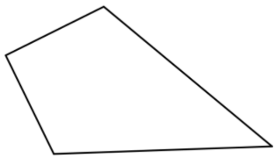
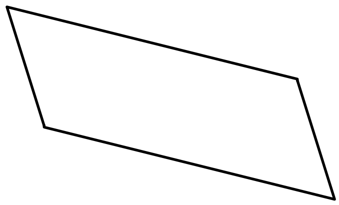
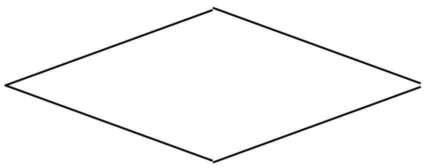
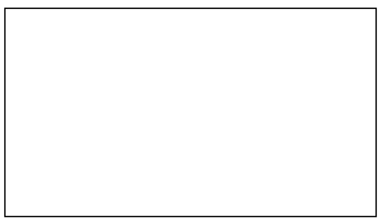
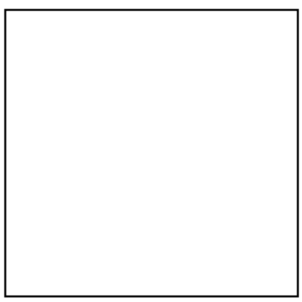
Figure



IX. AXES DE SYMETRIE ET QUADRILATERES PARTICULIERS.

Pour chaque quadrilatère particulier, **tracer son ou ses axes de symétrie en bleu.**.

Placer tous les codages sur les longueurs résultant de ces axes de symétrie.

 Nb d'axes de symétrie = ………..	**<u>Le Cerf volant</u>** **…….. seul axe de symétrie.** **L'une des 2 diagonales qui est la ………………………… de l'autre diagonale.**
 Nb d'axes de symétrie = …………..	**<u>Le Parallélogramme</u>** ⚠ **…….. axe de symétrie !** *C'est une erreur assez courante de penser aux diagonales mais si on imagine le pliage le long de l'une de ces diagonales, les sommets ne se superposent pas !*
 Nb d'axes de symétrie = …………..	**<u>Le Losange</u>** **……. axes de symétrie : les 2 …………………..** Les 2 diagonales sont …………………….. l'une de l'autre donc sont : • perpendiculaires entre elles. • et se coupent en leur milieu.
 Nb d'axes de symétrie = …………..	**<u>Le Rectangle</u>** **…. axes de symétrie : les 2 médiatrices des paires de côtés opposés.** Ces 2 médiatrices sont aussi « médiatrices » l'une de l'autre donc elles sont : • perpendiculaires entre elles. • et se coupent en leur milieu. ⚠ *Comme pour le parallélogramme, les diagonales ne sont pas des axes de symétrie !*
 Nb d'axes de symétrie : …………..	**<u>Le Carré</u>** Comme un carré est losange et rectangle en même temps, il possède les axes de symétrie du losange ainsi que ceux du rectangle. **………. axes de symétrie :** ○ **les 2 ……………………….. :** • perpendiculaires entre elles. • et se coupant en leur milieu. ○ **les 2 …………………………….. des paires de côtés opposés :** • perpendiculaires entre elles. • et se coupant en leur milieu.

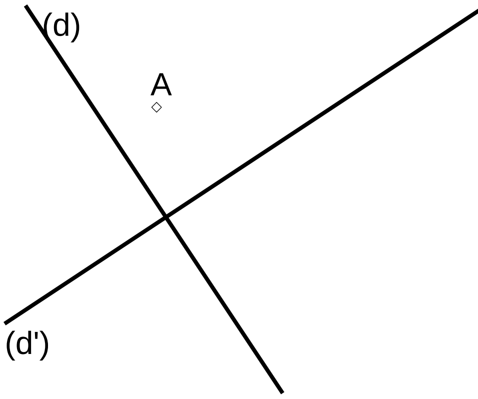
⚠ Les diagonales du « vrai » parallélogramme et du « vrai » rectangle **ne sont pas** des axes de symétrie pour ces 2 quadrilatères.

➢ <u>Problèmes de construction</u> : **Croquis s'il vous plait ! Etapes de construction numérotées.**

❶ 1) Sur la figure suivante, construire les points B, C et D de tels que :

- ABCD soit un rectangle.
- (d) et (d') soient les 2 axes de symétrie de ce rectangle.

2) Comment sont les droites (d) et (d') ?



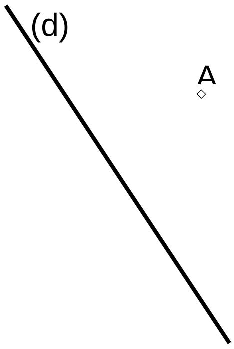
3) Que représentent (d) et (d') pour les paires de côtés opposés ?

codage !

❷ 1) Sur la figure suivante, construire *<u>sans compas</u>* les points B, C et D de telle sorte que :

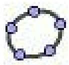
- ABCD soit un losange.
- (d) soit un axe de symétrie de ce losange.

2) Comment sont les droites (AC) et (BD) ?



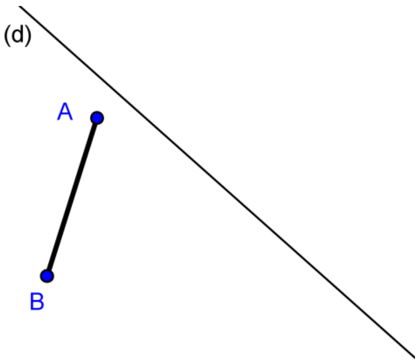
Codage !

❸ Contrôle 2010 :



Construire un cerf-volant (non losange) ABCD tel que :

- le point D soit sur la droite (d).
- (AC) soit l'axe du cerf-volant.



❹ Construire *<u>sans compas</u>* le losange ORDS tel que : OD = 5 cm et RS = 3 cm.

❺ Peut-on construire une figure ayant *exactement* 2 axes de symétrie qui ne soient pas perpendiculaires ?

X. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

- **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 6ème, La Symétrie Axiale).**
- **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin.**

A. Conseils :

- Constructions : Mettre l'axe bien droit verticalement en face de soi.
  La construction à l'équerre est la plus simple.
  Traits légers de construction, en pointillés.
  Figure image en couleur. Ne pas oublier le double codage induit par la symétrie.
- Médiatrice : Penser au lien « Médiatrice ↔ Points symétriques » et à l'équidistance.
- Axe de symétrie : Bien mettre l'axe verticalement en face de soi.
  Ne pas oublier d'indiquer par le codage si 2 axes sont perpendiculaires.
  L'ensemble des points invariants est l'ensemble de tous les points sur ……………………………………..

B. Erreurs à ne pas faire :

- Constructions : Traits de construction absents, codages manquants, figures sales ou visiblement non symétriques (vérifier en mettant l'axe bien droit en face de vous !)
- Manque général de précision : Noms des objets, isocèle où ?, bissectrice de qui ?, médiatrice de qui ?, codage manquant.
- Faire des phrases pour répondre aux questions !

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ………………………………………………………………….

Seize jacinthes sèchent dans seize sachets secs.

Perle du Bac 2003 : « La guerre de 100 ans a duré de 1914 à 1918. »

Perle du Bac 2009 : « François 1er était le fils de François 0. »

Perle du Bac 2012 : « Le tiercé est une strophe de 3 vers. »

Perle du Bac 2012 : « ... en même temps, si vous comptez sur moi pour vous répondre, vu ma moyenne, c'est mal barré... »