

LA SYMETRIE AXIALE



« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux. Les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides. » **G.H Hardy**¹

I. De quoi s'agit-il ? _____ 2

II. La symétrie axiale – Introduction. _____ 4

III. Points symétriques. _____ 6

IV. Propriétés des symétries axiales. _____ 10

V. Axes de symétrie d'une figure. _____ 15

VI. Symétrie axiale et segment : Médiatrice. _____ 16

VII. Symétrie axiale et angle : Bissectrice. _____ 19

VIII. Symétrie axiale et triangles. _____ 22

IX. Symétrie axiale et quadrilatères. _____ 24

X. Pour préparer le test et le contrôle. _____ 26

- Matériel : règle, équerre, compas, rapporteur.
- Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Géométrie de base (droites perpendiculaires ; milieu ; angles).			
Angles : construction, mesure, calcul.			
Triangles isocèle et équilatéral : caractérisation.			
Quadrilatères particuliers (trapèze, parallélogramme etc.) : bases.			

¹ G.H Hardy (1877-1947) : Ce mathématicien anglais, génial calculateur, spécialiste en théorie des nombres, enseigna les mathématiques à

I. DE QUOI S'AGIT-IL ?

Avant de nous plonger dans les délices de la Symétrie Axiale et de la construction de figures symétriques, il est bon d'en avoir une idée intuitive et claire.

A. Miroir, oh mon beau miroir...

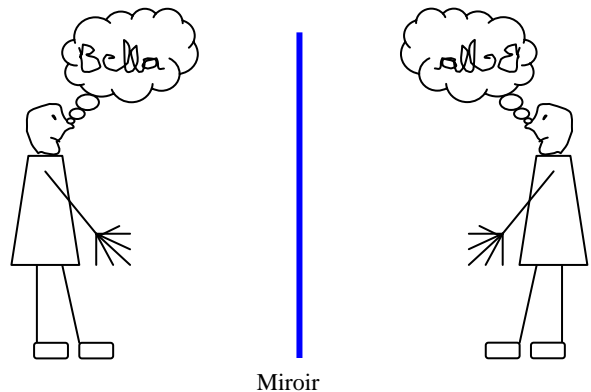
➤ Souvenez-vous, cette célèbre cantatrice dans les aventures de Tintin² : la Castafiore.

Et son méga hit : « Ah ! Je ris de me voir si belle en ce miroir... ». Impérissable !

➤ Mais que voyait-elle lorsqu'elle se regardait dans un miroir de plein pied ?



Ci-dessous à droite, voici la scène, vue de face :



- Décalez toute la scène.
- Pliez-la selon l'axe représentant le miroir.

La Castafiore et son image sont elles superposables ?

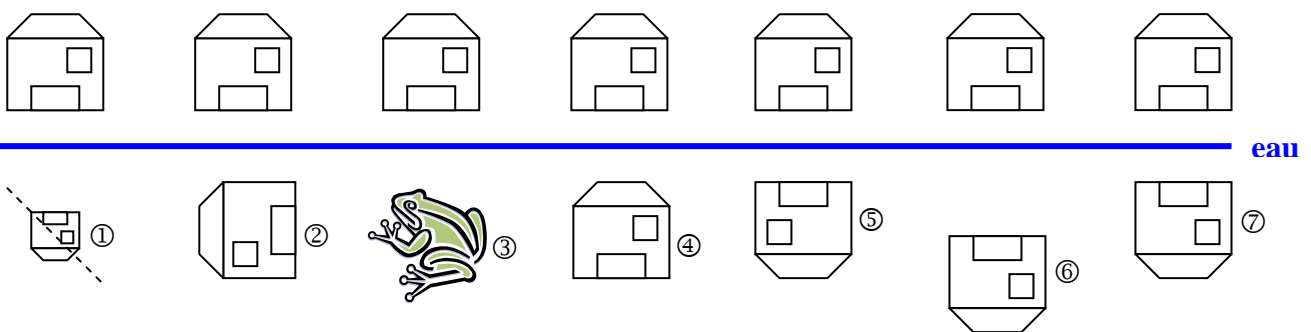
La Castafiore et son image sont parfaitement **superposables après pliage selon l'axe du miroir**.

On dit alors que : « **Les deux figures sont symétriques par rapport à l'axe représentant le miroir.** »

B. Le reflet image :

Voici plusieurs maisons paisibles au bord d'un lac très calme mais aux reflets bizarroïdes.

Barrez les reflets fantaisistes puis **expliquez en dessous pourquoi le reflet ne convient pas**.



Trop petit

Cette activité précise le sens de l'expression **superposables après pliage selon l'axe représentant l'eau** :

- **L'image ne doit pas être tournée dans n'importe quel sens** (reflets n°).
- **L'image ne doit pas être déformée** (reflets n°).
- **L'image ne doit pas être placée n'importe où** (reflet n°).

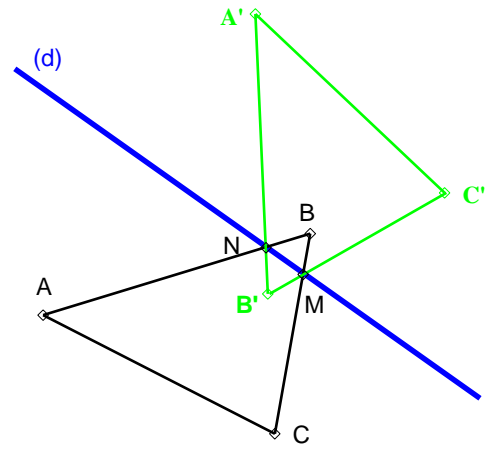
² Album « Les Bijoux de la Castafiore » 1963.

C. Effet miroir et Mathématiques :

Voici deux triangles et une droite (d).

Quand on plie cette figure le long de l'axe (d), les deux triangles se superposent exactement (vérifiez le chez vous avec du papier calque.). On peut donc affirmer :

« Les 2 triangles sont symétriques par rapport à l'axe (d). »



❶ Savez-vous reconnaître des points symétriques ?

Voyons si, sur la figure, vous savez repérer à vue d'œil 2 points symétriques par rapport à l'axe (d) :

- Le point **A'** (lire « A prime ») est le symétrique du point par rapport à l'axe (d).
En effet, quand on plie la figure selon l'axe (d), ces deux points A et A' se superposent exactement.
Le point est le symétrique du point B par rapport à l'axe (d).
Le point **C'** (lire « C prime ») est le symétrique du point par rapport à l'axe (d).
- Voyons maintenant le cas des points se trouvant sur l'axe (d) :
Quel est le symétrique du point M par rapport à (d) ? Et le symétrique de N ?

❷ Points symétriques, perpendiculaires et milieu :

Un point, son symétrique et l'axe (d) de la symétrie sont-ils tous les trois placés n'importe comment ?
Mon petit doigt me dit que non ! Voyons cela :

En reprenant la figure, tracez **en pointillés rouge les droites (AA') et (CC')**.

Placez sur la figure le point H, l'intersection de (d) et (AA') et K, le point d'intersection de (d) et (CC').

Observez bien la figure et complétez :

- • Les droites (d) et (AA') sont c-à-d (d) (AA').
• Les segments [HA] et [HA'] ont la même c-à-d $HA = \dots\dots$
Donc le point H est le du segment [AA'].
- • Les droites (d) et (CC') sont c-à-d
• Les segments [KC] et [KC'] ont la c-à-d
Donc le point est le du segment [CC'].
- Comment seront l'axe (d) et la droite (BB') ?
L'axe (d) coupe perpendiculairement le segment [BB'] pile au

❸ Double Codage induit par la symétrie axiale :

Grâce au ❷, rajoutez **en rouge sur la figure les codages manquants** :

- entre (d) et (AA') et entre A, H et A'.
- entre (d) et (CC') et entre C, K et C'.

A quel objet géométrique nous fait penser ce double codage ?

II. LA SYMETRIE AXIALE – INTRODUCTION.

A. Sens commun de la symétrie axiale :

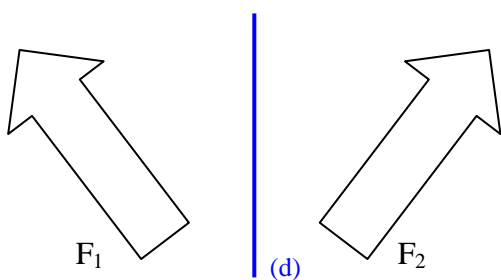
Les 3 activités précédentes p.2 et 3 nous permettent d'affirmer :

La **Symétrie Axiale**, c'est ce qui se passe dans un miroir (**effet miroir**).

Plus précisément :

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite lorsqu'elles se superposent parfaitement après pliage selon cette droite.

B. Vocabulaire et notations :



Voici 2 flèches F_1 et F_2 superposables après pliage selon la droite (d).
Ces deux flèches sont donc symétriques par rapport à l'axe (d).

Voyons un peu le vocabulaire associé à cette situation.

❶ La droite (d) prend le nom d'**Axe de symétrie**.

❷ On parle ici de **Symétrie axiale d'axe (d)**.

On emploie aussi les 3 expressions équivalentes :

- **Symétrie par rapport à la droite (d)**.
- **Symétrie orthogonale d'axe (d)** (car on trace des perpendiculaires - voir act ③ p.3).
- **Réflexion d'axe (d)** (en rapport avec le reflet dans un miroir ou dans l'eau).

Quelque soit le nom utilisé, cette symétrie d'axe (d) se note : $s_{(d)}$ l'axe écrit bien en dessous du S

❸ On dit que :

- F_1 et F_2 **sont symétriques** par rapport à l'axe (d).
- ou bien que F_1 a pour **symétrique b (a pour image)** F_2 par rapport à (d).
- ou bien que F_2 est **le symétrique (est l'image)** de F_1 par la symétrie axiale $s_{(d)}$.

Dans tous les cas, on note : $F_1 \xrightarrow{s_{(d)}} F_2$ ou $s_{(d)}(F_1) = F_2$

➤ Applications sur le vocabulaire et les notations :

❶ En vous inspirant du ❷ de l'encadré ci-dessus, comment note-t-on :

La symétrie axiale d'axe la droite (AB) :

La symétrie par rapport à l'axe (JK) :

La symétrie orthogonale d'axe (LM) :

La réflexion d'axe (Δ) (lire « delta ») :

② En vous inspirant du ❸ de l'encadré page précédente, comment note-t-on mathématiquement :

1. Le point C a pour image le point A par la symétrie d'axe (LU) $\Longrightarrow s_{(\dots\dots)}(\dots\dots) = \dots\dots$

2. Le point M est le symétrique du point K par rapport à l'axe (AB) $\Longrightarrow s_{(\dots\dots)}(\dots\dots) = \dots\dots$

3. Le point V est l'image du point H par la réflexion d'axe (AB) $\Longrightarrow \dots\dots \xrightarrow{s_{(\dots\dots)}} \dots\dots$

4. Les points P et P' sont symétriques par rapport à (MN) $\Longrightarrow \dots\dots \xrightarrow{s_{(\dots\dots)}} \dots\dots$

③ Traduire en français les écritures mathématiques suivantes :

5. $s_{(AF)}$ \Longrightarrow

6. $s_{(CV)}(B) = D$ \Longrightarrow

7. $L \xrightarrow{s_{(KO)}} P$ \Longrightarrow

C. Etymologie du mot symétrie :

Le mot grec *summetria* (*juste mesure*) est formé de *sym* (*avec*) que l'on retrouve dans sympathique et de *metron* (*mesure*). Pour les architectes romains, *symmetria* signifie *proportion* mais parfois déjà *symétrie*, considérée à l'époque comme les justes mesures.

Le mot *symmétrie*, apparaît à la Renaissance et a le même sens que pour les romains. Ce terme insiste sur les bonnes proportions d'un édifice pour le rendre plus esthétique.

Au 18^{ème} siècle, le mot *symmétrie* perd définitivement une lettre m et s'étend à d'autres disciplines comme la littérature ou la peinture pour désigner la régularité dans les motifs d'une œuvre. L'adjectif *symétrique* apparaît en architecture au 18^{ème} siècle.

Le sens d'aujourd'hui se développe vers la fin du 18^{ème} siècle.



Maintenant que le vocabulaire et les notations sont en place, on va définir « proprement » (mathématiquement) ce qu'est une symétrie axiale !

Soient donc un point M et une droite (d) donnés :

« Définir la symétrie $s_{(d)}$ d'axe (d), c'est être capable de donner (construire) sans aucun doute possible l'image de n'importe quel point M par cette symétrie. »

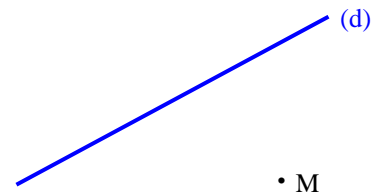
D'où les définitions des pages suivantes :

III. POINTS SYMETRIQUES.

Situation :

Une droite (d) est donnée. On considère donc la symétrie $s_{(d)}$ d'axe (d).

Puis un point M est placé.



A. Définition de deux points symétriques :

Il s'agit de définir mathématiquement ce qu'est le symétrique du point M par rapport à l'axe (d).

On va y arriver grâce à l'activité C] p.3 précédente. Il y a 2 cas :

❶ Cas très particulier où M est sur (d) :

Lorsque le point M est sur l'axe de symétrie, le symétrique du point M est **lui même** !

❷ Cas général où M n'est pas sur (d) :

Lorsque le point M n'est pas sur l'axe de symétrie, son symétrique M' est l'unique point qui vérifie les 2

conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{❶ } [MM'] \perp (d) \\ \text{❷ } (d) \text{ coupe } [MM'] \text{ en son milieu.} \end{cases}$$

➤ Figure :

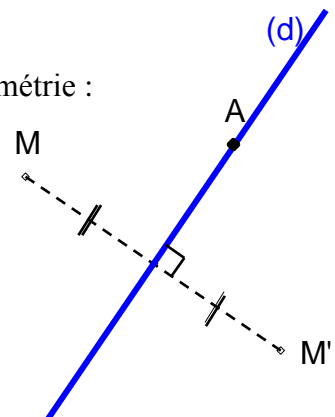
Cas particulier ❶ : Sur la figure ci-contre, le point A est sur l'axe (d) de la symétrie :

donc le symétrique du point A est !

*Comme le symétrique du point A est lui-même, on dit que A est un **point invariant**.*

Cas général ❷ : Le point M est en dehors de l'axe (d) :

le symétrique du point M par rapport à l'axe (d) est le seul point M' tel que :

$$\begin{cases} \text{❶ } [MM'] \dots\dots\dots (d) \\ \text{❷ } (d) \text{ coupe } [MM'] \text{ en son } \dots\dots\dots \end{cases}$$


Repasser en rouge le double codage introduit par la symétrie axiale dans ce 2^{ème} cas.

➤ Remarque :

La symétrie est l'action (la transformation) qui permet de "passer" d'un point à un autre à la façon d'un **miroir**. On ne voit donc pas la symétrie axiale : la symétrie n'est pas un objet !

Ce que l'on voit, c'est le résultat de cette symétrie axiale. **C'est l'effet Miroir.**

B. Vocabulaire et notations :

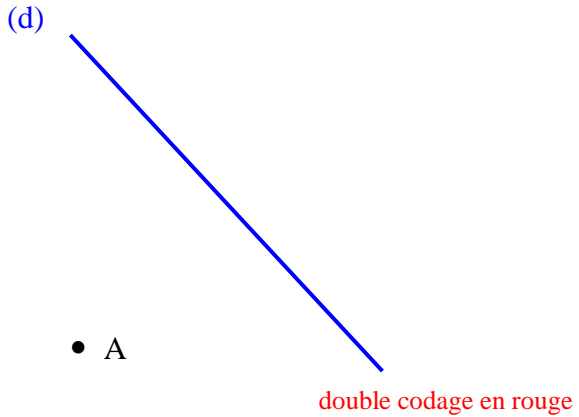
On dit que (en reprenant la figure ci-dessus) :

- Les points M et M' **sont** par rapport à l'axe (d).
- ou bien que : Le point **a pour symétrique (a pour image)** le point par rapport à l'axe (d).
- ou bien que : Le point M' **est le symétrique (est l'image)** du point M par la symétrie axiale $s_{(d)}$.

Dans tous les cas, cela se note : $\xrightarrow{s_{(d)}}$ ou $s_{(d)}(M) = M'$

➤ **Méthode ② : Construction avec le compas.**

Cette construction s'appuie sur l'une des propriétés des diagonales du losange qui se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Programme de construction en étapes.	Construction au compas.
<p>❶ Tracer <i>en pointillés</i> un arc de cercle de centre A qui va couper l'axe (d) en 2 points M et N. Placer ces deux points M et N.</p> <p>❷ Tracer en pointillés deux arcs de cercle de même rayon qu'à l'étape ❶, l'un de centre M, l'autre de centre N. Ces 2 arcs se coupent en un deuxième point : A'. A et A' sont symétriques par rapport à (d).</p> <p>❸ Tracer en pointillés [AA']. Placer le double codage.</p>	<p>Traits de construction légers !</p> 

➤ **Application : En appliquant rigoureusement la méthode ci-dessus :**

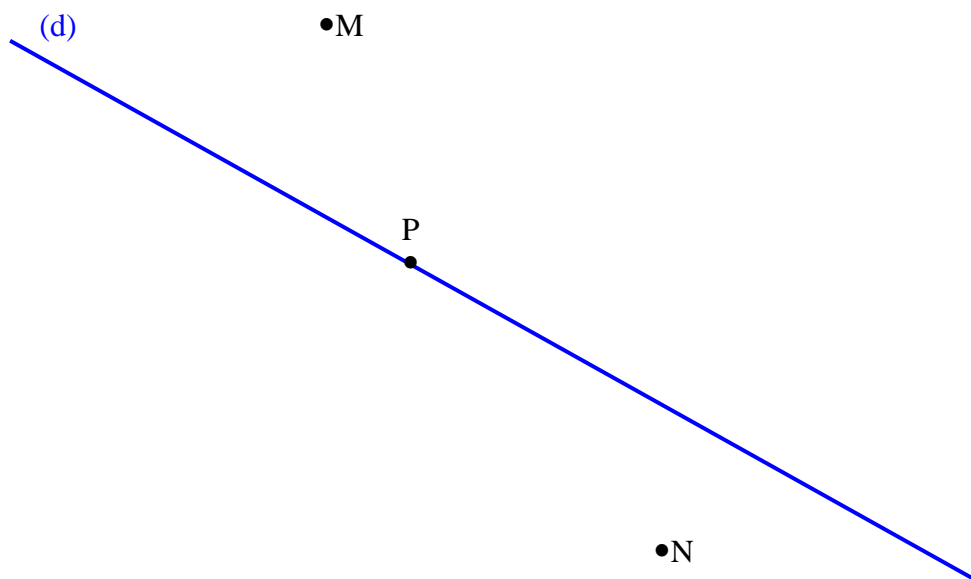
Construire au compas **les symétriques M', N' et P'** des trois points M, N, et P par rapport à l'axe (d).

3 conseils :

① *Le symétrique d'un point est toujours de l'autre côté de l'axe, « bien en face » de son antécédent (c'est l'« effet miroir »).*

② *Pour faciliter la construction, on a toujours intérêt à placer bien verticalement en face de soi l'axe, quitte à tourner un peu la feuille !*

③ *Traits légers de construction en pointillés ! Double codage en rouge.*



➤ **Remarques :**

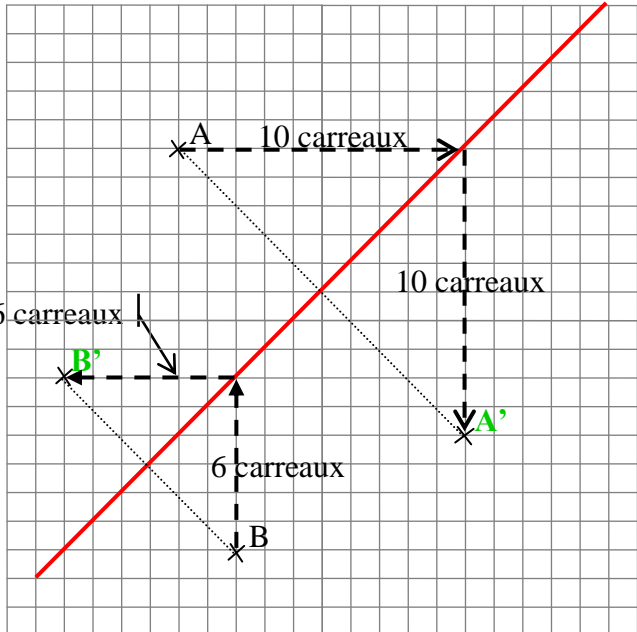
- **La construction par la méthode ❶ à l'équerre est plus naturelle et plus rapide.**
- **La construction par la méthode ❷ au compas est plus précise.**

➤ **Méthode ③ : Construction utilisant le quadrillage de la feuille.**

Cette méthode utilise ni équerre, ni compas mais seulement le fait de bien savoir se déplacer sur un quadrillage.

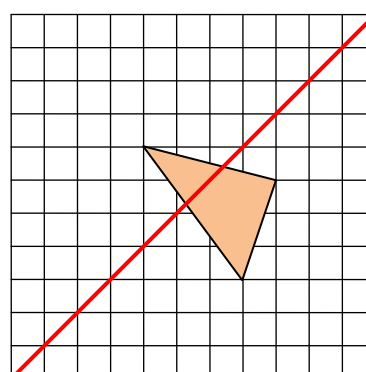
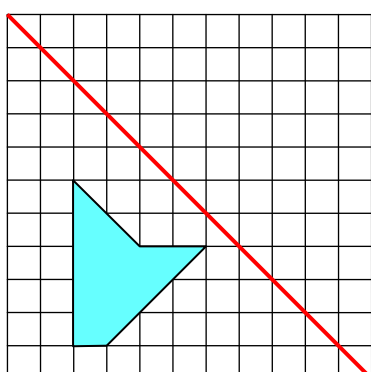
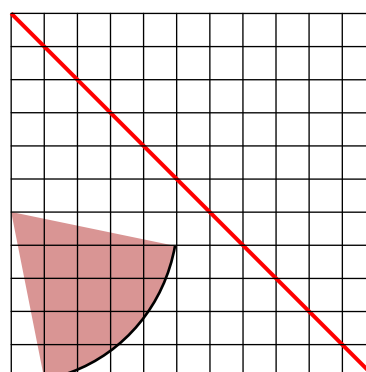
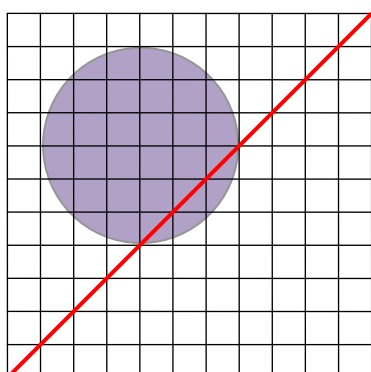
Soient donc un **axe de symétrie qui est l'une des diagonales des carreaux** du quadrillage (les autres cas sont plus compliqués qu'une bonne utilisation de l'équerre ou du compas !), et un point A sur le quadrillage.

Pour placer le symétrique **A'** de A par rapport à cet axe, on procède ainsi :

Programme de construction en étapes.	Construction utilisant le quadrillage.
<p>❶ A partir du point A, on se déplace horizontalement sur le quadrillage jusqu'à l'axe, en comptant le nombre de carreaux du point A jusqu'à cet axe.</p> <p>❷ Puis, à partir de ce point de l'axe, on se déplace verticalement sur le quadrillage du même nombre de carreaux.</p> <p>❸ On place l'image A'.</p> <p>A et A' sont symétriques par rapport à (d).</p> <p><u>Remarques :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • On est parti horizontalement pour le point A, on peut partir aussi verticalement ! C'est le cas ici pour le point B. • Il faut traverser l'axe pour se retrouver de l'autre côté 	

Application :

En utilisant uniquement le quadrillage, tracer **en vert les symétriques** des figures par rapport à l'axe oblique.



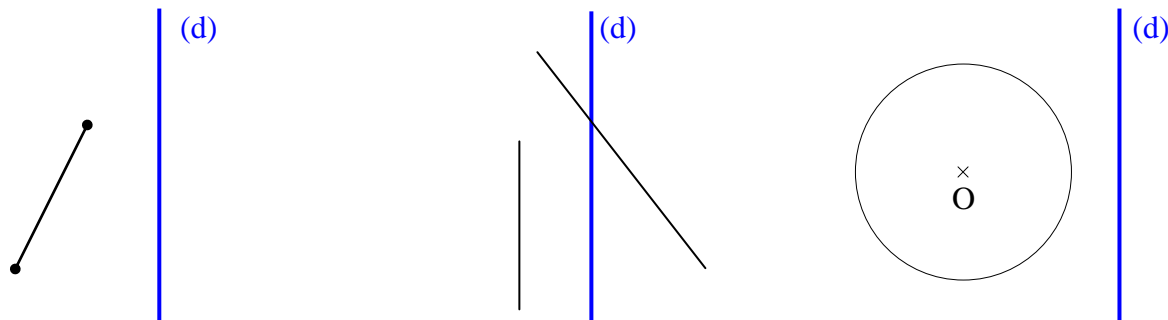
Maintenant que nous savons les bases (définitions et constructions), nous allons voir quelques propriétés des symétries axiales.

IV. PROPRIETES DES SYMETRIES AXIALES.

A. Transformation des figures de base par les symétries axiales :

➤ Construire les symétriques (en vert) par rapport à l'axe (d) du segment, des 2 droites, puis du cercle :

Traits légers de construction en pointillés et doubles codages !



• Le symétrique d'un segment est aussi un de même

• Le symétrique d'une droite est aussi une

• Si une droite coupe l'axe, alors sa droite image coupe aussi l'axe au même endroit (SAUF si la première droite est à l'axe).

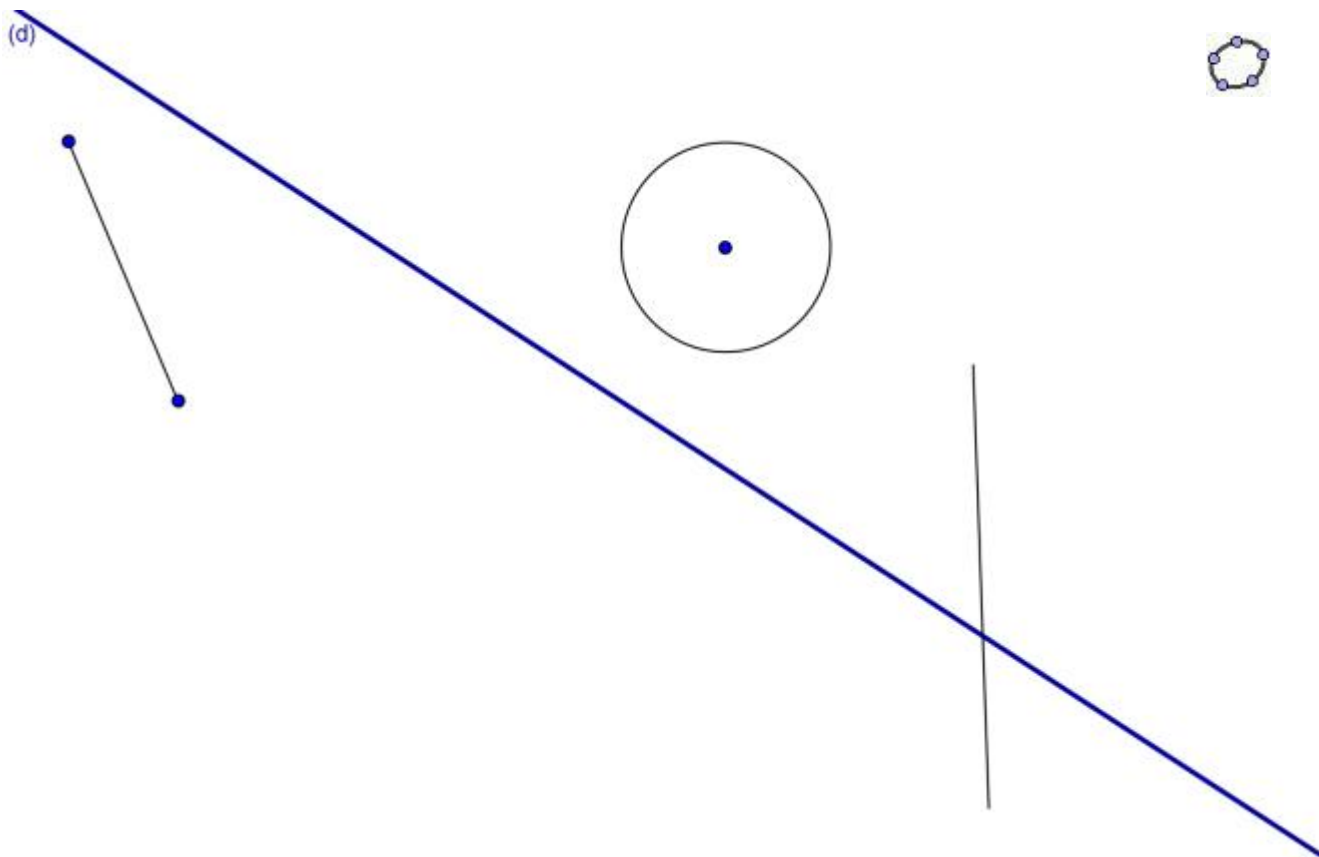
• Le symétrique d'un cercle est aussi un :

- ① de même
- ② le centre du cercle image est le du centre du cercle initial.

➤ Application :

Construire au compas les symétriques en vert de ce segment, de cette droite et de ce cercle par rapport à (d).

Traits légers de construction en pointillés et doubles codages !



Placez bien l'axe de symétrie verticalement, en face de vous !

B. Quatre propriétés de conservation des symétries axiales :

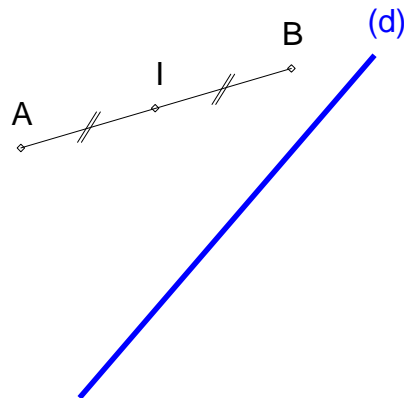
Les 4 propriétés de conservation qui vont suivre sont la traduction mathématique de la non-déformation des objets lors d'un effet miroir !

Conservation ❶ : Les symétries axiales conservent les Longueurs donc le Milieu :

❶ Le symétrique d'un segment est aussi un de même
❷ En conséquence, les symétries axiales conservent aussi le m..... :
« Le symétrique du milieu d'un segment est le du segment image. »

➤ Figure :

Tracer **en vert** $[A'B']$, le symétrique du segment $[AB]$
et I' , le symétrique du milieu I du segment $[AB]$.



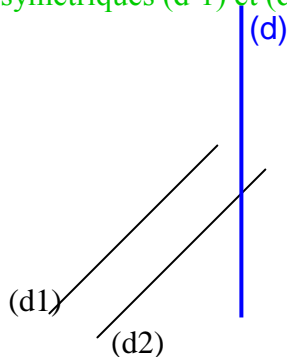
Vous remarquez que l'image **I'** est aussi le de [.....]

Rédaction : Puisque I est le du segment $[AB]$, alors, par conservation du milieu, son **I'** est aussi le du segment image [.....].

Conservation ❷ : Les symétries axiales conservent le Parallélisme :

Les symétriques de 2 droites parallèles sont deux qui sont aussi entre elles.

➤ Figure : Tracer **en vert** les symétriques $(d'1)$ et $(d'2)$ des 2 droites parallèles $(d1)$ et $(d2)$.



Vous remarquez que les deux droites images **$(d'1)$ et $(d'2)$** sont aussi entre elles !

Rédaction : Puisque $(d1)$ $(d2)$ alors, par conservation du parallélisme, leurs **$(d'1)$ et $(d'2)$** seront aussi

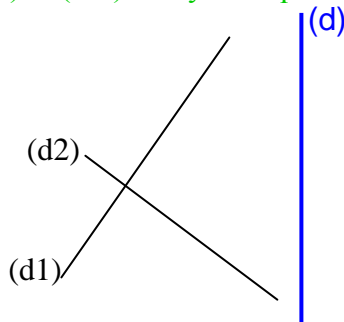
Attention !

Il n'est nulle part dit qu'une droite et son image sont parallèles, ce qui est presque toujours faux : voir $(d1)$ et $(d'1)$ sur la figure ! (vrai seulement dans le cas très rare d'une première droite déjà parallèle à l'axe).

Conservation ③ : Les symétries axiales conservent les mesures d'angle donc la perpendicularité :

- ① Le symétrique d'un angle est aussi un angle de même
- ② En conséquence, les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites qui sont aussi entre elles.

➤ Figure : Tracer en vert (d'1) et (d'2) les symétriques des 2 droites perpendiculaires (d1) et (d2).



codages !

Vous remarquez que les deux droites images (d'1) et (d'2) sont aussi entre elles !

Rédaction : Puisque (d1) (d2) alors, par conservation de la mesure d'angle (de la perpendicularité), leurs (d'1) et (d'2) seront aussi

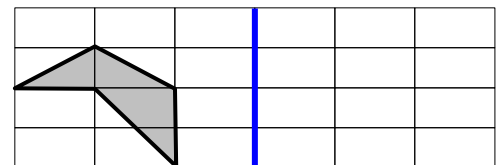
Attention !

Il n'est nulle part dit qu'une droite et son image sont perpendiculaires, ce qui est presque toujours faux !
Voir (d1) et (d'1) sur la figure.

Conservation ④ : Les symétries axiales conservent le Périmètre et l'Aire :

Une figure et sa figure symétrique ont le même et la même

Sans compas ni équerre, tracez en rouge le symétrique de la figure ci-contre.



Rédaction : Puisque la figure rouge est la de la figure grise, alors, par conservation du périmètre et de l'aire :
 \mathcal{P} (Figure rouge) =
 \mathcal{A} (Figure rouge) =

Donc pour connaître le périmètre ou l'aire d'une figure symétrique, il suffit de connaître le périmètre ou l'aire de la figure initiale.

⑤ Conséquences des 4 propriétés de conservation :

Puisque les symétries axiales conservent les distances, les mesures d'angles, le parallélisme, la perpendicularité, le périmètre etc. alors quelle est l'image par une symétrie axiale :

- d'un triangle isocèle ? Un triangle isocèle superposable.
- d'un triangle équilatéral ?
- d'un parallélogramme ?

➤ **Exercice 1 fondamental : Propriétés de conservation ; Construction du symétrique d'une figure.**

Sur la figure ci-dessous, on sait que : $OB = 2\text{ cm}$, $(d_3) // (d_4)$ et que $(d_3) \perp (Ax)$. Codage !

Placer L , le milieu du segment $[OC]$. Codage !

1. Sans rien tracer et en appliquant l'une des propriétés de conservation p.11 ou 12, compléter :

a. Montrer que L' , l'image du point L , sera le milieu de $[O'C']$, le symétrique de $[OC]$?

.....

b. Comment seront (d'_3) et (d'_4) , les images de (d_3) et (d_4) ?

.....

c. Comment seront (d'_3) et $(A'x')$, les images de (d_3) et (Ax) ?

.....

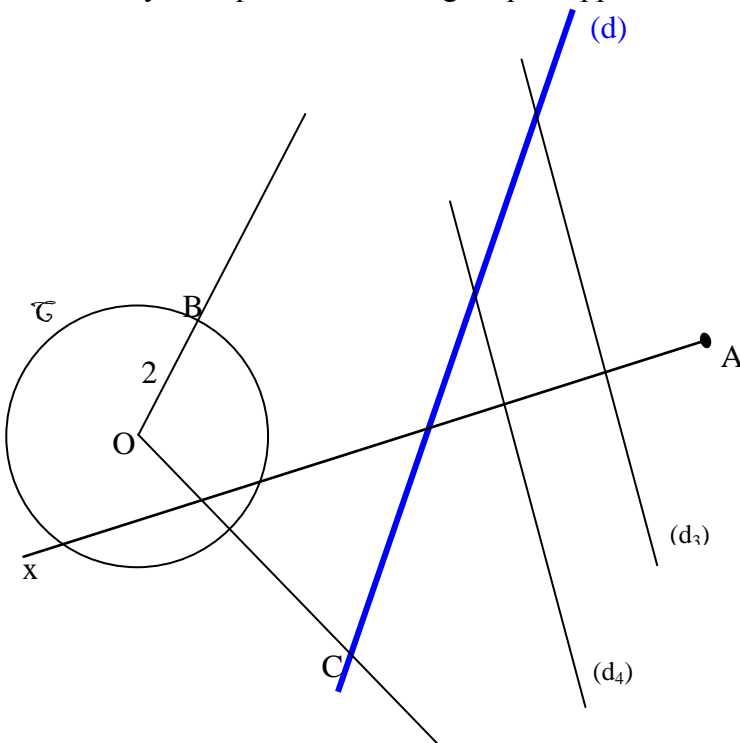
d. Comment seront les mesures de \widehat{BOC} et de son symétrique $\widehat{B'O'C'}$?

.....

e. Calculer la valeur exacte du périmètre de \mathcal{C}' , le symétrique du cercle \mathcal{C} :

.....

2. Tracer le symétrique de toute la figure par rapport à l'axe (d) en plaçant bien l'axe en face de vous :



➤ **Exercice 2** : Intersection d'une droite avec l'axe de symétrie.

Soient (Δ) et (Δ') deux droites symétriques par rapport à un axe (d) (voir figure ci-dessous).

Montrons qu'il est impossible que les droites (Δ) et (Δ') qu'elles se coupent en dehors de l'axe de symétrie.

Pour cela, nous allons utiliser un nouveau type de raisonnement : le **raisonnement par l'absurde**.

• Supposons donc que les deux droites (Δ) et (Δ') sont symétriques par rapport à l'axe (d) mais qu'elles se coupent en un point qui est en dehors de l'axe de symétrie (d) . On va prouver qu'il y a une contradiction.

• Soit donc E le point d'intersection de (Δ) avec l'axe (d) . Placez E sur la figure.

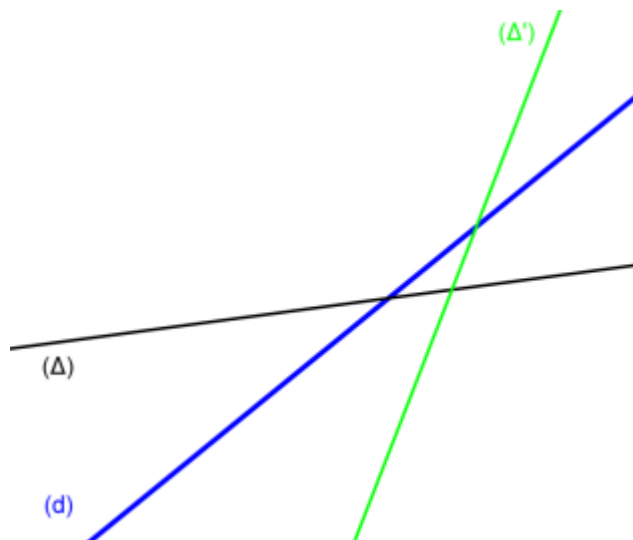
Puisque E est sur l'axe de symétrie (d) , alors son symétrique est

• Mais d'autre part, comme E est un point de la droite (Δ) alors E' le symétrique de E doit être un point de la droite image (Δ') .

• Donc E' doit se trouver à l'intersection de (d) et de (Δ') . Placez E' sur la figure.

• D'après le dessin, le symétrique du point E devrait donc avoir deux positions distinctes : en E et en E' , ce qui est impossible !

Donc la supposition « (Δ) et (Δ') sont symétriques mais se coupent en dehors de l'axe (d) » est impossible ! Concluons :

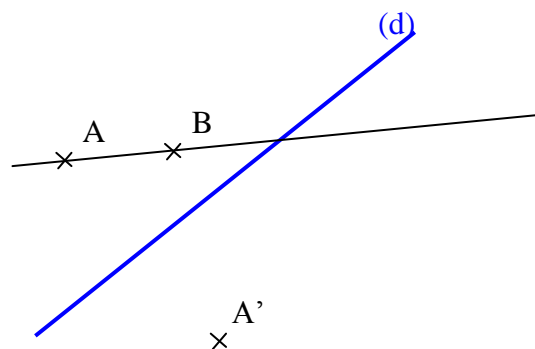


Lorsqu'une droite coupe l'axe de symétrie en un point, alors l'image de cette droite coupe aussi l'axe **en ce même point (c-à-d au même endroit)**.

Application :

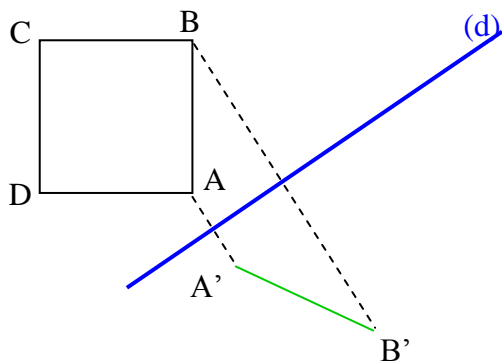
Sur cette figure, A et A' sont symétriques par rapport à (d) .

Sans rien construire, tracer la symétrique de (AB) par rapport à (d) .



➤ **Exercice 3** :

Montrer comment on peut utiliser les propriétés de conservation pour terminer la construction du symétrique d'un carré dès que l'on connaît le symétrique de l'un des côtés.



V. AXES DE SYMETRIE D'UNE FIGURE.

Avez-vous remarqué que foule d'objets de la vie quotidienne (vêtements, bâtiments, tables, etc.) ont « une partie gauche et une partie droite identiques ». Ils possèdent en fait un ou plusieurs axes de symétrie.

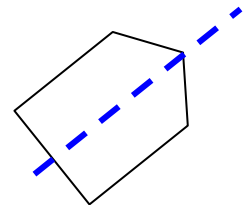
A. Définition d'un axe de symétrie :

Une droite (d) est **un axe de symétrie d'une figure** :

- lorsque le symétrique de cette figure par rapport à (d) est la figure elle-même !
- autrement dit lorsque la figure et son image par symétrie axiale sont confondues.
- autrement dit lorsqu'on plie la figure selon cet axe (d), la figure se replie sur elle-même parfaitement.

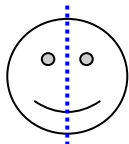
○ Exemple : Cette flèche possède **1 seul axe de symétrie (en pointillés bleus)** :

les parties « à gauche » et « à droite » de l'axe sont exactement superposables après pliage selon cet axe bleu. Il n'y a pas d'autre axe de symétrie !

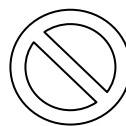
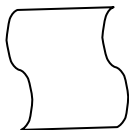


B. Exercices sur les axes de symétrie :

① Pour les 7 figures suivantes, tracez **en bleu le ou les axes de symétrie** puis **indiquez leur nombre**.



1 axe



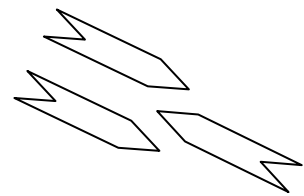
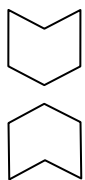
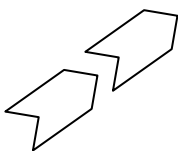
② Parmi les 10 chiffres quels sont ceux avec :

• *exactement* 1 axe de symétrie :

• *exactement* 2 axes de symétrie :

③ Pour chacune des 4 figures suivantes, **indiquer le nombre d'axes** de symétrie et **les tracer en bleu**.

Si 2 axes de symétrie sont perpendiculaires, le coder sur la figure.



Remarques : Lorsqu'une figure a *exactement* 2 axes de symétrie, alors ces 2 axes sont

Une figure peut-elle avoir exactement 2 axes de symétrie parallèles ?

C. Symétrie axiale et figures usuelles : segment, droite, cercle et angle.

Tracer s'ils existent : **le ou les axes de symétrie en bleu**. Coder les axes perpendiculaires.

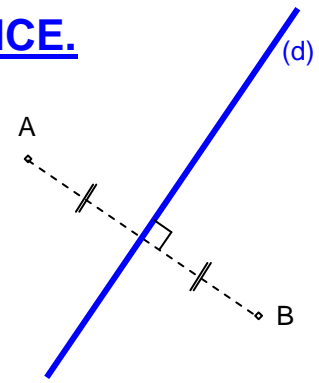
	Segment	Droite	Cercle	Angle
Nombre d'axe(s) :				

VI. SYMETRIE AXIALE ET SEGMENT : MEDIATRICE.

Soient A et B deux points symétriques par rapport à une droite (d).

D'après la page précédente, le segment [AB] possède 2 axes de symétrie :

- la droite (AB) elle même.
- et la droite (d).



A. Médiatrice d'un segment : nouvelle définition.

La médiatrice d'un segment est l'un des deux axes de symétrie de ce segment :
celui qui ne contient pas le segment (voir figure ci- dessus, repassez **en rouge le double codage**).

B. Propriétés géométriques de la médiatrice d'un segment :

En conséquence de la définition que nous avons donnée de deux points symétriques (page 6), on peut énoncer cette première propriété de la médiatrice d'un segment :

Propriétés géométriques de la médiatrice d'un segment.

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultats ou conclusions)
Quand	(d) est la médiatrice de [AB]	alors	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} (d) \dots\dots [AB] \\ \textcircled{2} (d) \text{ passe par le } \dots\dots \text{ de } [AB] \end{array} \right.$

Autrement dit : Lorsqu' une droite (d) est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment et le coupe en son milieu.

Utilité : Cette propriété sert à prouver directement :

- soit qu'une droite est à une autre.
- soit qu'une droite passe par le d'un segment.

La réciproque de la propriété ci-dessus est vraie aussi et permet de reconnaître géométriquement la médiatrice d'un segment :

Reconnaître géométriquement la médiatrice d'un segment.

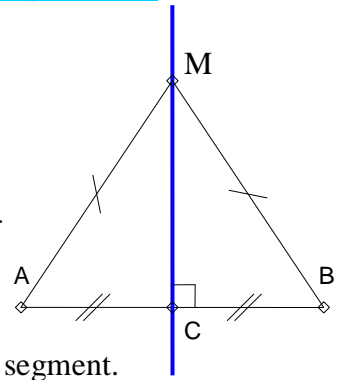
	(..... conditions ou hypothèses)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} (d) \perp [AB] \\ \textcircled{2} (d) \text{ passe par le milieu de } [AB] \end{array} \right.$	alors	(d) est la de [AB]

Autrement dit : Lorsque une droite coupe un segment perpendiculairement et en son milieu, alors cette droite est la médiatrice de ce segment.

Utilité : Cette réciproque sert à prouver qu'une droite est la d'un segment.

C. Équidistance entre deux points et Médiatrice d'un segment :

- Soit (MC) la médiatrice d'un segment [AB] et M un point sur cette médiatrice (voir figure).
- Donc le symétrique de M par rapport à (MC) est lui-même : c'est M !
Par définition de la médiatrice, A et B sont symétriques par rapport à (MC).
- Donc [MA] et [MB] sont deux segments symétriques par rapport à (MC).
Donc par conservation des longueurs, ces deux segments [MA] et [MB] ont la même longueur
c-à-d $MA = MB$.
- En résumé, lorsqu'un point M est sur la médiatrice de [AB], alors $MA = MB$.



De cette constatation, on peut déduire une nouvelle propriété de la médiatrice d'un segment.

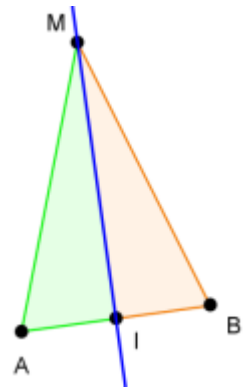
Propriété métrique caractéristique d'équidistance de la médiatrice d'un segment :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	un point M est sur la médiatrice d'un segment [AB]	alors	$MA = MB$

Autrement dit : Lorsqu'un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est situé à la même distance des deux extrémités de ce segment.

Utilité : Cette propriété sert à prouver une égalité de

- Étudions la situation réciproque :
- Soit donc un point M situé à **égale distance** des deux points A et B. **Codage !**
Soit I le milieu du segment [AB]. **Codage !** Puis on a tracé la droite (MI).
- Les deux triangles **AMI** et **BMI** ont trois côtés deux à deux de même longueur.
Ils sont donc superposables par pliage le long de la droite (MI).
- Donc (MI) est un axe de symétrie du segment [AB].
Donc (MI) est la médiatrice du segment [AB].



On vient de prouver la réciproque de la propriété métrique de la médiatrice :

Réciproque de la propriété métrique caractéristique d'équidistance de la médiatrice d'un segment :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand =	alors	M est sur la du segment [AB]

*Autrement dit : Lorsqu'un point est **équidistant**⁴ des extrémités d'un segment, alors ce point est sur la médiatrice de ce segment.*

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un point est sur une

Deux remarques :

- ① **Rechercher l'ensemble des points qui sont équidistants de 2 points fixés, revient donc à tracer la du segment reliant ces 2 points.**
- ② Puisque la propriété métrique d'équidistance et sa réciproque sont vraies, on dit que la propriété métrique **caractérise** la médiatrice. En gros, dès que vous voyez « médiatrice », il faut penser « équidistance entre deux points » et inversement !

⁴équidistants : de « equi » : égal. Equidistants veut dire : situés à égale distance.

D. Lien « Médiatrice ↔ Symétrie axiale » :

D'après la définition de la médiatrice, un **lien profond** unit Points symétriques et Médiatrice.

Passage Symétrie axiale → Médiatrice :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	A et B sont symétriques par rapport à une droite (d)	alors	(d) est la du segment [AB].

Utilité : Cette propriété sert à montrer qu'une droite est une

Réciproquement :

Passage Médiatrice → Symétrie axiale :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	(d) est la du segment [AB]	alors	A et B sont par rapport à

Utilité : Cette réciproque sert à montrer que deux points sont

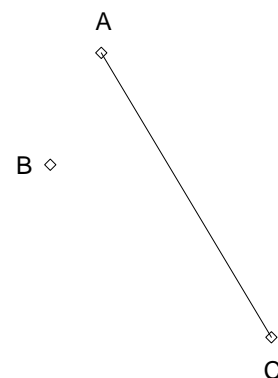
Ce lien profond dit une chose très importante : quand vous voyez « symétrie axiale », il faut tout de suite penser « médiatrice ». Quand vous voyez « médiatrice », il faut savoir traduire « symétrie axiale » !

Ce lien profond est souvent mis en jeu dans les problèmes de construction ou de raisonnement.

➤ **Exercices : A faire sur le cahier d'exercices.**

① Sur la figure ci-contre, construire D le symétrique de B par rapport à (AC).

Appeler O le point d'intersection de (AC) et (BD).



1. Que représente (AC) pour [BD] ? Justifier.
2. En déduire que ABCD est un cerf volant. Justifier.
3. Quelle est la nature de CBD puis de ABO ? Justifier.

② Tracer un triangle BOL tel que $BO = 6 \text{ cm}$, $OL = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{BOL} = 60^\circ$.

1. Tracer les médiatrices de chacun des trois côtés.
2. A l'intérieur de ce triangle, hachurer la zone des points qui sont plus proches de B et de O que de L.

Récapitulons ce que l'on sait sur la symétrie axiale sous forme de tableau :

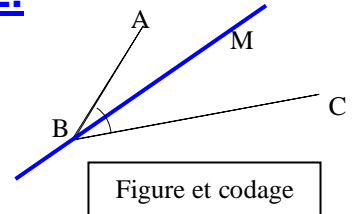
Transformation	« Sens commun »	Elément caractéristique	Objet géométrique associé	Figure et double codage
Symétrie	« Effet ou Réflexion » de symétrie	La d'un segment	

VII. SYMETRIE AXIALE ET ANGLE : BISSECTRICE.

A. Définition de la bissectrice :

D'après C] p.15, un secteur angulaire possède un axe de symétrie :

La bissectrice est l'axe de symétrie d'un secteur angulaire.



Par abus de langage, on dit que : « la bissectrice d'un angle est l' de symétrie de cet angle. »

B. Propriété angulaire caractéristique de la bissectrice :

➤ D'après la conservation des mesures d'angles par la symétrie axiale, on peut donc affirmer, en reprenant les notations de la figure ci-dessus, la propriété suivante :

Propriété angulaire de la bissectrice :

	(..... condition ou hypothèse)		(3 résultats ou conclusions)
Quand	(BM) est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC}	alors	$\widehat{ABM} = \widehat{MBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$

Autrement dit : Lorsque une droite est la d'un angle, alors elle partage cet angle en 2 angles de même (rajoutez en rouge le codage manquant sur la figure).

Utilité : Cette propriété peut servir à calculer une

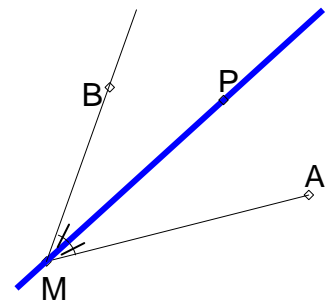
➤ Application : Sur la figure ci contre, on sait que $\widehat{AMB} = 56^\circ$.

• D'après le, la droite (MP) est la de

• Calcul des mesures des angles \widehat{PMB} et \widehat{PMA} :

Méthode : Puisque (MP) est de

alors = = $\frac{\dots\dots\dots}{2}$ =°



C. Réciproque : Comment prouver qu'une droite est la bissectrice.

La réciproque de la propriété angulaire directe ci-dessus est vraie aussi :

Réciproque de la propriété angulaire : Comment prouver qu'une droite est une bissectrice.

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	$\widehat{BMP} = \widehat{PMA}$ (ou $\widehat{BMP} = \widehat{BMA}/2$)	alors	(MP) est la de l'angle

Autrement dit : Lorsque 2 angles adjacents sont de, la droite portée par le côté commun aux 2 angles est la de l'angle formé par ces 2 angles adjacents.

Utilité : Cette réciproque sert à prouver qu'une droite est la d'un

Conséquence : Puisque la propriété angulaire directe et sa réciproque sont vraies, on dit que cette propriété angulaire **caractérise** la bissectrice.

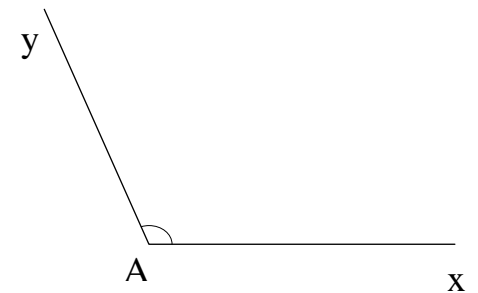
Dit autrement, dès que vous avez une bissectrice, il faut penser à une égalité d'angles et inversement.

D. Construction de la bissectrice d'un angle :

Soit un angle \widehat{yAx} . On souhaite tracer sa bissectrice. On a 2 méthodes principales.

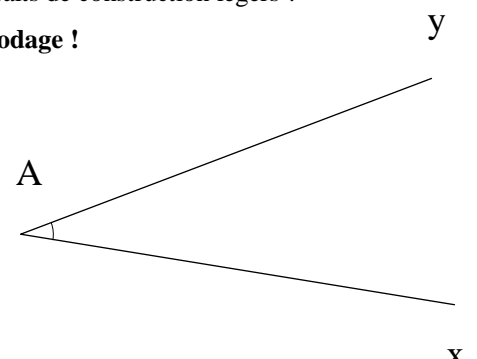
1. Méthode ① : avec le rapporteur.

C'est la construction la plus évidente. Elle utilise la propriété angulaire réciproque de la bissectrice C] p.19.

Construction de la bissectrice en étapes.	Construction au Rapporteur.
① Mesurer l'angle \widehat{xAy} : $\widehat{xAy} \approx \dots\dots$ ② En utilisant le rapporteur, placer un point M tel que : $\widehat{xAM} = \frac{\widehat{xAy}}{2} = \dots\dots$ ③ Tracer (AM). (AM) est la bissectrice de Les 2 demi droites [Ax) et [Ay) sont par rapport à la bissectrice [AM).	 <p style="text-align: right;">Codage !</p>

2. Méthode ② : avec le compas.

Cette construction de la bissectrice utilise une propriété des diagonales du losange (qui sera vue plus tard).

Construction de la bissectrice en étapes.	Construction au Compas.
① Tracer un arc de cercle de centre A. Cet arc coupe le côté [Ax) en M et le côté [Ay) en N. ② Tracer 2 arcs de cercle, de même rayon qu'en ①, l'un de centre M , l'autre de centre N . Ces deux arcs se recoupent en un point I. ③ Tracer la droite (AI). La droite (AI) est la bissectrice de \widehat{xAy} . Les 2 demi droites [Ax) et [Ay) sont bien par rapport à la bissectrice	Traits de construction légers ! Codage ! 

➤ Remarque :

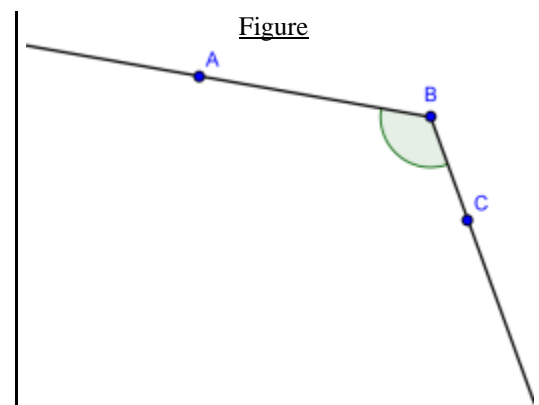
La construction au rapporteur est plus intuitive, la construction au compas est plus

E. Exercices sur la bissectrice :

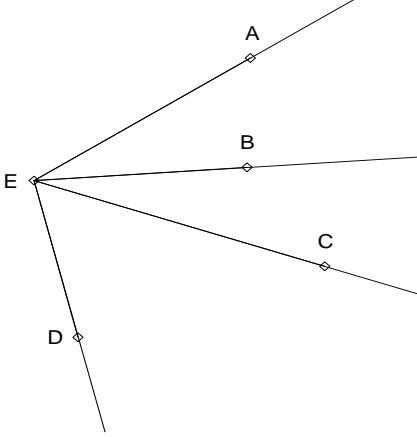
➤ Exercice 1 : Construction au compas ; propriété angulaire.

Soit l'angle obtus \widehat{ABC} ci-contre tel que $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

1. Au compas, construire en vert l'axe de symétrie de l'angle \widehat{ABC} .
 Comment s'appelle cette droite verte ?
2. Tracer [AC]. La droite verte coupe-t-elle [AC] en son milieu ?
3. La bissectrice coupe [AC] en un point P. Calculer la mesure de \widehat{ABP} .



➤ **Exercice 2 :** Sur la figure ci-dessous (volontairement fausse), on sait que :



$\widehat{BED} = 84^\circ$ et $\widehat{AEC} = 38^\circ$ et que la droite (EB) est la bissectrice de l'angle \widehat{AEC} .

1. Reportez sur la figure les 3 informations données dans l'énoncé.
2. Calculez les mesures de \widehat{CEB} et \widehat{AEB} en complétant le raisonnement :

Puisque (EB) est la de AEC, alors $\widehat{CEB} = \dots = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Reportez ces 2 mesures que vous venez de calculer sur la figure.

3. Calculer les mesures de \widehat{CED} et \widehat{AED} .



➤ **Exercice n° 3** (..... / 4 points) : Contrôle 2008.

Sur la figure (non exacte) ci contre, on sait que :

SIC est un triangle rectangle et $\widehat{PIC} = 40^\circ$.

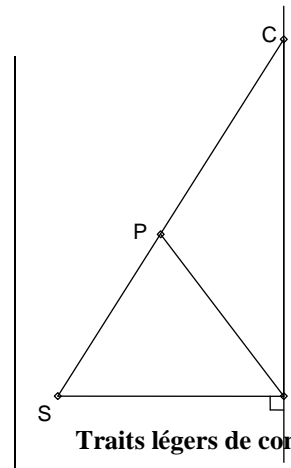
Construction :

Vous laisserez les traits de construction et les codages.

1. Construire au compas en vert l'axe de symétrie de l'angle \widehat{PIC} .

Cette droite coupe le segment [PC] en T. (..... / 1 pt)

2. Construire en bleu L, le symétrique de P par rapport à (IC).



Traits légers de construction + codages !

Calculs de mesures d'angle :

3. Calculer la mesure de \widehat{TIC} .
(..... / 1 pt)

Puisque

4. En déduire la mesure de \widehat{SIT} .
(..... / 1 pt)

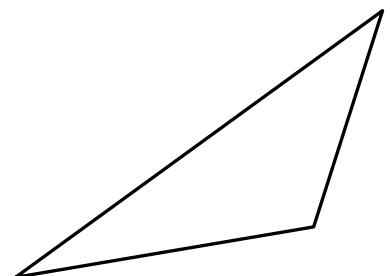
$\widehat{SIT} =$

5. Calculer la mesure de \widehat{SIL} :
(..... / 1 pt)



➤ **Exercice 4 :** Intersection des 3 bissectrices d'un triangle.

1. Construire au compas les trois bissectrices de ce triangle. Codages !
2. Que semble-t-on constater ?



VIII. SYMETRIE AXIALE ET TRIANGLES.

A. Symétrie axiale et triangle isocèle :

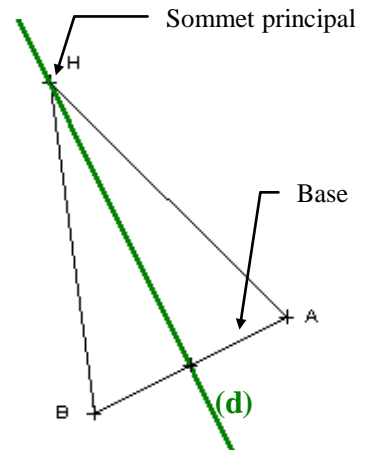
Soit une droite (d), un point H sur (d), et un point A qui n'est pas sur (d).

On a placé le point B, le symétrique de A par rapport à (d).

Rajoutez le codage manquant.

La droite (d) est ainsi l'axe de symétrie de ce triangle.

Que représente (d) pour le segment [AB] ?



1. Définition du triangle isocèle et vocabulaire :

- Nouvelle définition : Un triangle qui a au moins **un axe de symétrie** s'appelle un triangle **isocèle**.
- Vocabulaire : Dans ce triangle BHA isocèle, H est appelé le **sommet principal**.
[AB] s'appelle la **base** (c'est le côté dont la longueur est différente des deux autres).
On dit que BHA est isocèle en H ou bien que BHA est isocèle de base [BA].

2. Propriétés des triangles isocèles :

Grâce aux propriétés de conservation de la symétrie axiale, le triangle isocèle possède certaines propriétés.

En utilisant les notations de la figure ci-dessus :

- ❶ Le triangle isocèle a deux côtés de même longueur : = Codage ?
- ❷ Le triangle isocèle a deux angles « à la base » de même mesure : $\widehat{HAB} = \widehat{HBA}$ Codage ?
- ❸ (d) est à la fois la bissectrice de \widehat{AHB} et la médiatrice de [AB]. Codage ?
- (d) coupe donc [AB] per..... et en son Codage ?

3. Reconnaître un triangle isocèle :

- ❹ Si un triangle a deux côtés de même, alors il est
- ❺ Si un triangle a deux angles de même, alors il est

B. Symétrie axiale et triangle équilatéral :

Parmi les triangles isocèles, il y en a qui ont **en plus** la particularité d'avoir la base de même longueur que les deux autres côtés. Ils ont alors **3** axes de symétrie.

Nouvelle définition : Un triangle qui a **trois axes de symétrie** s'appelle un **triangle équilatéral**.

Remarque : Un triangle équilatéral est donc un triangle « isocèle partout », en chaque sommet !

➤ Application :

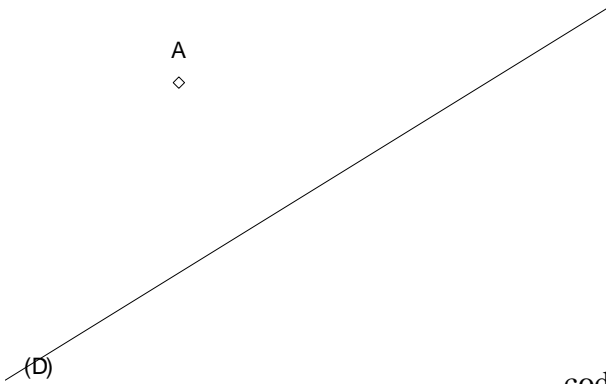
1. Construire un triangle équilatéral ABC de 3 cm de longueur.
2. Tracer ses 3 axes de symétrie. Codages !

C. Exercices sur Triangles et Symétrie axiale :

➤ Exercice 1 : Contrôle 2005. Croquis ou pas croquis ?

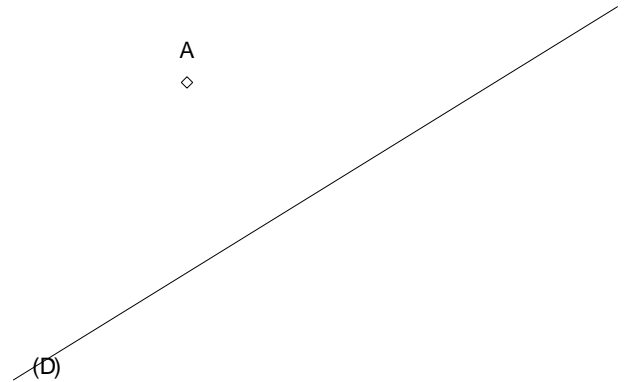
1. Construire 2 points B et O *sur la droite (d)* tels que :

- le triangle BOA soit isocèle en A.
- $BO = 6 \text{ cm}$



Construire 2 points I et J tels que :

- (d) soit un axe de symétrie du triangle AIJ.
- I sur (d) et $AI = 3 \text{ cm}$.



➤ Exercice 2 :

1. Tracer un cercle \mathcal{C} de centre O et de diamètre [AB] avec $AB = 6 \text{ cm}$.

2. Construire la médiatrice (d) du segment [AO].

3. Placer un point C sur la médiatrice (d).

Quelle est la nature du triangle AOC ? Justifier !

4. Soit D l'un des 2 points d'intersection de \mathcal{C} avec (d).

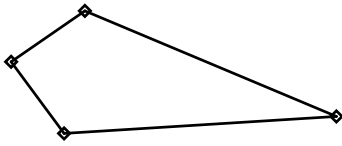
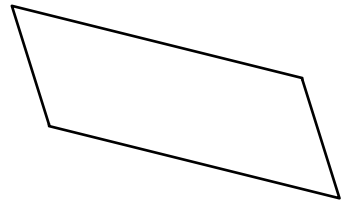
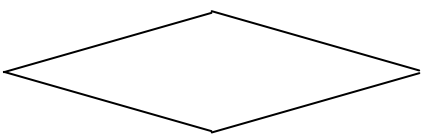

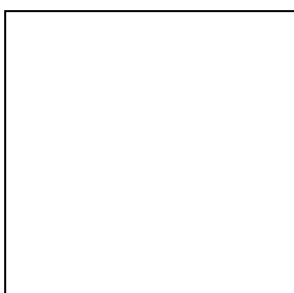
Quelle est la nature du triangle AOD ? Justifier !

5. Construire le symétrique du cercle par rapport à (d).

IX. SYMETRIE AXIALE ET QUADRILATERES.

Pour chaque quadrilatère particulier, **tracer son ou ses axes de symétrie en couleur et en pointillés.**

Placer tous les codages possibles.

<p style="text-align: center;"><u>Le Cerf volant</u></p> <p>1 seul axe de symétrie : l'une des deux diagonales qui est la médiatrice de l'autre diagonale.</p>	 <p>Nb d'axes de symétrie =</p>
<p style="text-align: center;"><u>Le Parallélogramme</u></p> <p>Pas d'axe de symétrie !</p> <p><i>C'est une erreur assez courante de penser aux diagonales mais si on imagine le pliage le long de l'une de ces diagonales, les sommets ne se superposent pas !</i></p>	 <p>Nb d'axes de symétrie =</p>
<p style="text-align: center;"><u>Le Losange</u></p> <p>2 axes de symétrie : les deux diagonales.</p> <p>Les deux diagonales sont :</p> <ul style="list-style-type: none"> • perpendiculaires entre elles. • et se coupent en leur milieu. 	 <p>Nb d'axes de symétrie =</p>
<p style="text-align: center;"><u>Le Rectangle</u></p> <p>2 axes de symétrie : les 2 médiatrices des paires de côtés opposés.</p> <p>Ces 2 médiatrices sont :</p> <ul style="list-style-type: none"> • perpendiculaires entre elles. • et se coupent en leur milieu. <p><i>Comme pour le parallélogramme, les diagonales ne sont pas axes de symétrie !</i></p>	 <p>Nb d'axes de symétrie =</p>
<p style="text-align: center;"><u>Le Carré</u></p> <p>Comme un carré est un losange rectangle, il regroupe les axes de symétrie du losange et ceux du rectangle.</p> <p>4 axes de symétrie :</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ les 2 diagonales : <ul style="list-style-type: none"> • perpendiculaires entre elles. • et se coupant en leur milieu. ○ les 2 médiatrices des paires de côtés opposés : <ul style="list-style-type: none"> • perpendiculaires entre elles. • et se coupant en leur milieu. 	 <p>Nb d'axes de symétrie :</p>

Attention !

Les diagonales du parallélogramme et du rectangle **ne sont pas** des axes de symétrie pour ces 2 quadrilatères.

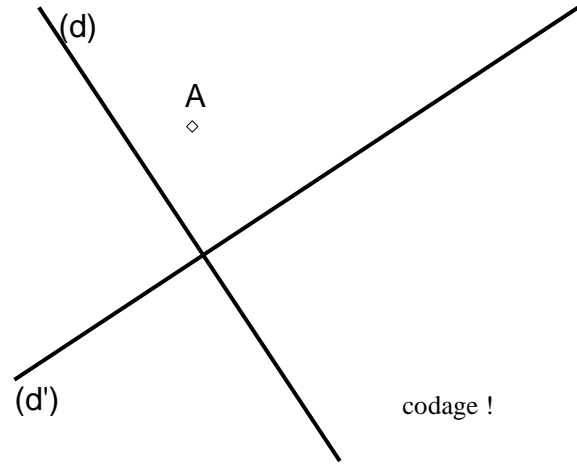
➤ Problèmes de construction : **Garçon, un croquis s'il vous plait !**

❶ Sur la figure suivante, construire les points B, C et D de telle sorte que :

- ABCD soit un rectangle.
- (d) et (d') soient les 2 axes de symétrie de ce rectangle.

Comment sont les droites (d) et (d') ?

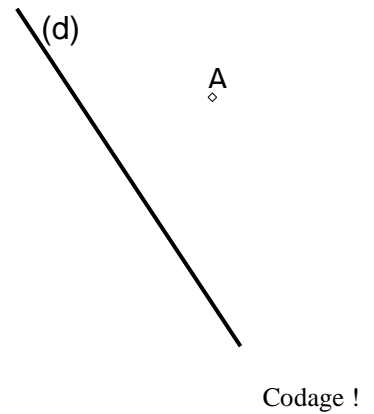
Que représentent-elles pour les côtés opposés ?



❷ Sur la figure suivante, construire *sans compas* les points B, C et D de telle sorte que :

- ABCD soit un losange.
- (d) soit un axe de symétrie de ce losange.

Comment sont les droites (AD) et (BC) ?



❸ Construire un rectangle dont les diagonales mesurent 6 cm.

Cette construction est-elle unique ?

❹ Construire *sans compas* un losange ORDS tel que : OD = 5 cm et RS = 3 cm.

❺ Peut-on construire une figure ayant exactement 2 axes de symétrie qui ne soient pas perpendiculaires ?

X. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

➤ Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Définition de la symétrie axiale, sens commun.			
Définition des points symétriques ; cas des points sur l'axe.			
Construction d'images : méthode avec équerre + règle graduée.			
Construction d'images : méthode avec compas + règle non graduée.			
Construction d'images : méthode du quadrillage..			
Images des figures de base (segment, droite, cercle).			
4 propriétés de conservation (longueurs et milieu, parallélisme, angles, aires).			
Axes de symétrie d'une figure.			
Médiatrice d'un segment : définition et construction.			
Médiatrice d'un segment : propriété métrique caractéristique.			
Bissectrice d'un angle : définition et construction.			
Bissectrice d'un angle : calculs d'angle.			
Symétrie axiale et triangle : triangles isocèle et équilatéral.			
Symétrie axiale et triangle : construire un triangle selon un axe de symétrie			
Symétrie et quadrilatères particuliers : axes de symétrie.			
Symétrie et quadrilatère : construire un quadrilatère selon un axe.			
Aimer la Symétrie axiale.			

➤ **Pour préparer le test et le contrôle : Livre Magnard 6^{ème} édition 2005 : p.158 et 159.**

B. Conseils :

➤ Constructions : Bien mettre l'axe verticalement en face de soi.

Traits légers de construction, en pointillés.

Mettre en couleur la figure image. Ne pas oublier le codage induit par la symétrie.

➤ Médiatrice : Penser au lien « Médiatrice ↔ Points symétriques » et à l'équidistance.

➤ Bissectrice : N'oubliez pas le codage. Partage de l'angle en 2 angles de même mesure.

➤ Axe de symétrie : Mettre bien **l'axe en face de soi**.

Ne pas oublier d'indiquer par le codage si 2 axes sont perpendiculaires.

C. Erreurs à ne pas faire :

➤ Constructions : Traits de construction absents, codages manquants, figures sales ou visiblement non symétriques (vérifier en mettant l'axe bien en face de vous !)

➤ Confusion Médiatrice – Bissectrice :

➤ Manque général de précision : Noms des objets, isocèle où ?, bissectrice de qui ?, médiatrice de qui ?, codage manquant.

➤ Faites des phrases pour répondre aux questions !

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ?