CORRIGE DIVISIONS, QUOTIENTS ET FRACTIONS.

« Il n'y a que deux catégories de personnes sur Terre :

Ceux qui aiment les Maths et Ceux qui vont aimer les Maths. »

Corrigé en rouge et en italique

➢ Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Tables de multiplication parfaitement sues dans les 2 sens ! ▪ *Produit de 2 nombres.* ▪ *Décomposition d'un nombre en facteurs.*			
Technique de la division.			
Divisions par 10 ou 100 ou 1 000 etc.			

NOM et Prénom : ………………………………………………… $6^{ème}$ …..

I. DIVISION ENTIERE OU DIVISION EUCLIDIENNE.

➢ Questionnement : **(on ne vous demande pas de répondre)**

- Combien de tables de 6 places sont remplies par 88 élèves à la cantine ? Y aura-t-il des places restantes pour les profs ?

  Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du Monde en 80 jours. Combien cela fait-il de semaines entières ?

- Pour trouver les réponses à ces deux questions, on a besoin de la technique de la division euclidienne.

A. Définition de la division euclidienne (ou division entière) :

Effectuer la **division euclidienne (ou division entière)** d'un nombre *entier* (appelé **dividende**) par un nombre *entier différent de 0* (appelé **diviseur**), c'est trouver **deux nombres entiers** appelés le **quotient** et le **reste**, qui vérifient l'égalité ① suivante et la condition ② suivante :

Dividende	Diviseur
	Quotient
Reste	

Egalité ① : Dividende = Diviseur × Quotient + Reste et _Condition ②_ : Reste < Diviseur

*En fait, **la division euclidienne est une division entière** où on poursuit pas les calculs après la virgule.*

Eh ! Ne vous enfuyez pas ! Restez ! La définition a l'air compliquée mais vous allez voir sur les trois exemples qui suivent qu'elle est simple à appliquer. Et c'est ce qui nous importe !

➢ Exemple ① : Effectuons la division euclidienne de 45 par 7 (qu'on notera **45 ÷R 7**).

Dividende →	4 5	7 ← *Diviseur*
	- 4 2	
Reste →	3	6 ← *Quotient*

Puis on écrit l'égalité ① et la condition ② :

45 = 7 × 6 + 3 et le reste 3 < diviseur 7

➢ Exemple ② : Effectuons la division euclidienne de 5 par 12 (qu'on note *5 ÷R 12*).

5	12
5	0

Puis on écrit toujours l'égalité ① et la condition ② :

5 = 12 × 0 + 5 et reste 5 < diviseur 12

Lorsque le dividende est inférieur au diviseur, le quotient est égal à *0* et le reste est égal au *dividende*.

➢ Exemple ③ : Effectuez la division euclidienne de 18 par 6 (qu'on note 18 ÷R 6).

1 8	6
- *1 8*	
0	*3*

Puis on écrit toujours l'égalité ① et la condition ② :

18 = 6 × 3 + 0 et *reste 0 < diviseur 6*

Définition : Puisque le **reste est nul**, on dit que « **6 est un diviseur de 18** » ou, ce qui est équivalent, que « **18 est un multiple de 6** » (ou, ce qui est équivalent, que 18 est dans la table de multiplication de 6).

➢ Deux remarques:

❶ **La condition ② « reste < diviseur » est essentielle !** Ex : l'égalité 33 = 7 × 3 + 12 *n'est pas* une égalité euclidienne car le reste 12 > diviseur 7 (en fait, on n'a pas assez trouvé de 7 dans 33 !).

❷ Mais l'égalité 33 = 7 × 4 + 5 provient bien d'une division euclidienne car le reste 5 < diviseur 7.

B. Six exercices sur la technique de la division euclidienne :

1) Posez les 2 divisions suivantes puis **écrivez pour chacune l'égalité euclidienne ① et la condition ②** :

La division euclidienne de 13 par 5.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 3 & 5 \\ -\ 1\ 0 & \overline{2} \\ \hline 3 & \end{array}$$

13 = 5 × 2 + 3 et reste3 < diviseur 5

47 ÷R 11

$$\begin{array}{r|l} 4\ 7 & 1\ 1 \\ -\ 4\ 4 & \overline{4} \\ \hline 3 & \end{array}$$

47 = 11 × 4 + 3 et reste 3 < diviseur 11

2) L'égalité 26 = 25 × 1 + 1 provient elle d'une division entière ? *Oui car reste 1 < diviseur 25*

L'égalité 26 = 5 × 4 + 6 provient elle d'une division euclidienne ? *Non car reste 6 > diviseur 5 ou 4 !*

3) Calculez mentalement 5 × 11 + 7 = *62* *et on a reste 7 < diviseur 11.*

Dans la division euclidienne de 62 par 11, quel est le quotient ? *5* Quel est le reste ? *7.*

Attention : Dans la division euclidienne de 62 par 5, quel est le quotient ? *12 !* Quel est le reste ? *2.*

On ne pouvait pas utiliser l'égalité 5 × 11 + 7 = 62 pour 62 ÷R 5 car 7> 5 !

4) Calculez mentalement 5 × 12 = *60*

Sans poser l'opération, donnez le quotient q et le reste r dans la division euclidienne de :

60 par 5 *q = 12 et r = 0* 66 par 5 *q = 13 et r = 1*

5) Plus difficile : Dans chaque division euclidienne, trouvez le nombre manquant :

Conseil : écrivez pour chaque cas l'égalité euclidienne ① en laissant un vide pour le nombre manquant, puis trouvez ce nombre manquant.

$$\begin{array}{r|l} \mathit{57} & 9 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \mathit{57} & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 57 & \mathit{11} \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 57 & \mathit{14} \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$$

6) Grâce à la calculatrice (touche ÷R sur les Casio et touche ⌐ pour les Texas), écrivez l'égalité euclidienne ① et la condition ② pour les divisions euclidiennes suivantes :

38975 ÷R 89

38975 = 89 × 437 + 82 et 82 < 89

554782 ÷R 457

554782 = 457 × 1213 + 441

C. Un peu d'histoire et de vocabulaire :

1. D'où vient l'expression « division euclidienne » ?

Ce terme a été introduit par les mathématiciens du groupe Bourbaki au milieu du XXème siècle, en l'honneur d'Euclide, un grand mathématicien grec qui enseignait à Alexandrie au IIIème siècle av. J.C, et qui ne connaissait pas encore les nombres décimaux.

Cherchez dans une encyclopédie ou sur Internet des informations et une image d'Euclide.

2. Le sens des mots :

- *Dividende* vient du latin *dividendus,* qui signifie : qui doit être divisé.
- *Quotient* vient du latin *quoties*, qui signifie : combien de fois.

D. Utilité de la division euclidienne :

Elle peut servir :

- aux problèmes d'achat d'objets *entiers* (n°② par exemple).
- aux problèmes de partage entier (nombre de groupes à former dans une classe : n°⑤ par exemple).
- aux problèmes de conversion temporelle (conversion de jours en semaines ou de minutes en heures minutes : n°① et ④).
- aux problèmes de répartition entière (durée par exercice dans un contrôle : n°③ par exemple).

➢ **Exercices à faire sur votre cahier d'exercices ou en face** : (Méthode FRCP bien sûr !)

① • Combien de tables de 6 places sont remplies par 88 élèves à la cantine ? Y aura-t-il des places restantes pour les profs ?

• Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du Monde en 80 jours. Combien cela fait-il de semaines entières ?

Nb de tables remplies = nb d'élèves ÷R nb de places par table

= 88 ÷R 6

d'où $87 = 6 \times 14 + 4$ *et reste* $4 <$ *diviseur 6.*

Il y aura 14 tables de 6 places remplies et il restera 4 places pour les profs.

Nb de semaines = nb total de jours ÷R nb de jours par semaines

= 80 ÷R 7

d'où $80 = 7 \times 11 + 3$ *et reste* $3 <$ *diviseur 7.*

Philéas Fogg exécutera son tour du Monde en 11 semaines entières et 3 jours.

② Bilbo a 20 €. Il veut acheter des livres de maths à 3 €. Combien peut il en acheter ? Combien lui reste-t-il ? Est il content ?

Nb de livres achetés = somme totale d'argent ÷R prix d'un livre

= 20 ÷R 3

d'où $20 = 3 \times 6 + 2$ *et reste* $2 <$ *diviseur 3*

Bilbo pourra acheté 6 livres de maths et il lui restera 2 € pour s'acheter une règle ou un rapporteur. Il est très content et on le comprend !

③ Dans une classe de 26 élèves, les élèves doivent se grouper par 2 ou 3 pour préparer un exposé. Combien y a-t-il de groupes au maximum ? Au minimum ?

➢ *Nb de groupes de 2 élèves = nb total d'élèves ÷R nb d'élèves par groupe*

= 26 ÷R 2

d'où $26 = 2 \times 13 + 0$ *et reste* $0 <$ *diviseur 2*

On peut former exactement 13 groupes de 2 élèves.

➢ *Nb de groupes de 3 élèves = nb total d'élèves ÷R nb d'élèves par groupe*

= 26 ÷R 3

d'où $26 = 3 \times 8 + 2$ *et reste* $2 <$ *diviseur 3*

On peut former 8 groupes de 3 et 1 groupe de 2 soit 9 groupes au total.

➢ *Donc on aura 13 groupes au maximum ou 9 groupes au minimum.*

④ Un prof de maths a corrigé 2 paquets de 26 copies sans s'arrêter. Il met 10 minutes par copie. Combien d'heures et de minutes a-t-il travaillé ? Mérite-t-il une pause ?

- *Durée de travail en minutes = nb de copies × temps par copie en minutes*
  = 52 × 10
  = 520 minutes
- *Durée de travail en heures = Durée de travail en minutes ÷R 60*
  = 520 ÷R 60

d'où 520 = 60 × 8 + 40 et reste 40 < diviseur 60

Il a travaillé 8 heures et 40 minutes ! Je crois qu'il mérite une bonne pause.

⑤ A un contrôle de maths, il y a 7 exercices d'importance équivalente. Le contrôle dure 1 heure. Combien de minutes doit on réserver à chaque exercice ? Combien de minutes reste-t-il pour relire ?

Durée par exercice (en minutes) = Temps total en minutes ÷R nb d'exercices
= 60 ÷R 7

d'où 60 = 7 × 8 + 4 et reste 4 < diviseur 7

Il faut traiter chaque exercice en 8 minutes à peu près et il restera 4 minutes pour relire.

II. QUOTIENT D'UN DECIMAL PAR UN DECIMAL NON NUL (≠ 0).

A. Définition du quotient ; Lien avec la multiplication :

- Deux exemples :

① On veut trouver le salaire mensuel de Philémon Banilon, sachant qu'il gagne 18 000 € par an. Cela revient à trouver le nombre inconnu qui, quand on le multiplie par 12, donne 18 000 €.

$$12 \times \boxed{} = 18\,000$$

nombre *de mois* salaire *mensuel* en € salaire *annuel* en €

Pour trouver ce facteur manquant dans cette multiplication, il faut effectuer l'opération 18 000 ÷ 12.

c-à-d $\boxed{} = 18\,000 \div 12$

② On veut trouver le prix d'un kg de tripes sachant 1,2 kg de moules coûte 8 €. Cela revient à trouver le nombre inconnu qui, quand on le *multiplie* par 1,2 donne *8 €.*

$$1{,}2 \times \boxed{} = 8$$

masse totale des moules prix *d'1 kilo de moules* en € prix *total des moules* en €

Pour trouver ce terme manquant dans cette multiplication, il faut effectuer l'opération *2,4. ÷ 1,2*

c-à-d $\boxed{} = 2{,}4 \div 1{,}2$

➢ <u>Définition du Quotient ; Lien entre le quotient, la multiplication et la division :</u>

❶ Le facteur manquant dans la multiplication $d \times \boxed{} = n$ avec $d \neq 0$ s'appelle le **quotient de n par d.** **($d \neq 0$).**

Quotient de n par d

❷ Ce quotient s'obtient en effectuant la division : $\boxed{} = n \div d$

<u>Deux remarques</u> :

❸ Le **quotient** est donc le **résultat d'une division** par un nombre différent de *0.*

❹ Rechercher un facteur (terme) inconnu dans une multiplication revient à calculer un quotient grâce à une *division.*

➢ <u>Exemples</u> : **<u>❶ Un quotient peut être un nombre entier :</u>**

$33 \div 3 = 11$ $36 \div 12 = 3$ $99 \div 9 = 11$ $2{,}5 \div 2{,}5 = 1$

$8888 \div 1111 = 8$ $32 \div 4 = 8$ $64 \div 8 = 8$

<u>❷ Un quotient peut être un nombre décimal :</u>

$10 \div 4 = 2{,}5$ $2{,}7 \div 10 = 0{,}27$ $25{,}8 \div 100 = 0{,}258$

$250 \div 100 = 2{,}5$ $10 \div 4 = 2{,}5$ $100 \div 40 = 2{,}5$

B. <u>Technique de la division décimale :</u>

Poser la division de n par d ($d \neq 0$) permet de trouver :

➢ **<u>Soit la valeur exacte du quotient quand la division se termine et tombe juste.</u>**

<u>Exercice</u> : Calculer en posant la division le quotient de 169 par 13 puis le quotient de 63 par 5

$$
\begin{array}{rrr|l}
1 & 6 & 9 & 1\ 3 \\ \cline{4-4}
- 1 & 3 & & 1\ 3 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 9 & \\
- & 3 & 9 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
6\ 3{,}\ 0 & 5 \\ \cline{2-2}
-\ 5\ \ \ \ \ & 1\ 2{,}\ 6 \\ \cline{1-1}
1\ 3\ \ & \\
-\ 1\ 0\ \ & \\ \cline{1-1}
3\ 0 & \\
-\ 3\ 0 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

J'ai laissé les soustractions dans les opérations. Mais on essaiera à l'avenir de s'en passer.

➢ **<u>Soit des valeurs approchées du quotient [troncature, arrondi, valeur approchée par défaut (inférieure) ou par excès (supérieure)]quand la division ne se termine pas et ne tombe pas juste :</u>**

<u>Exercice</u> : Calculez en posant la division le quotient de 25 par 3 (arrêtez au $\frac{1}{100}$ ème), puis remplissez le tableau.

$$
\begin{array}{r|l}
2\ 5{,}\ 0\ \ 0 & 3 \\ \cline{2-2}
-\ 2\ 4\ \ \ \ \ \ \ & 8{,}\ 3\ \ 3 \\ \cline{1-1}
1\ 0\ \ \ \ & \\
-\ \ \ 9\ \ \ \ & \\ \cline{1-1}
1\ \ 0 & \\
-\ \ \ \ 9 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

Vérifiez à la calculatrice.

	8,33
Troncature à l'unité	*8*
Arrondi à la dizaine	*10*
Valeur approchée par défaut au centième	*8,33*
Valeur approchée par excès au dixième	*8,4*

C. Ecriture fractionnaire ; Vocabulaire :

Hélas, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux !

- Je pense par exemple à 2 ÷ 7 ou à π ÷ 1,1 : quand on pose ces divisions, elles ne se « terminent » jamais. ☹ $\frac{2}{7} = 0{,}28571\ldots$ $\frac{\pi}{1{,}1} = 2{,}8559\ \ldots$

- Autre « problème » : ces écritures en ligne sont **source d'erreurs de priorité** de la part des élèves !

Par exemple : Dans l'écriture 2 – 1 ÷ 3, on peut faire l'erreur de priorité de faire le calcul 2 – 1 !

Dans l'écriture $2 - \frac{1}{3}$, impossible de faire cette erreur de calcul !

D'où l'introduction d'une écriture plus simple du quotient : ***l'écriture fractionnaire*** !

❶ **L'écriture fractionnaire** du quotient n ÷ d est de la forme $\frac{n}{d}$:

Dividende *Numérateur*

$$\boxed{n \div d = \frac{n}{d}}$$

Diviseur ≠ 0 ! *Dénominateur ≠ 0 !*

❷ Le nombre « d » en dessous la barre de fraction (d ≠ …...), s'appelle *le dénominateur.*

Ce nombre « dénomine » l'écriture fractionnaire : il donne « le nom de famille » de l'écriture fractionnaire.

<u>Ex</u> : $\frac{2}{5}$ fait partie de la famille des « cinquièmes ». $\frac{7}{8}$ fait partie de la famille des « huitièmes »

❸ Le nombre « n » au dessus de la barre de fraction *s'appelle le numérateur.*

Ce nombre « numérote » l'écriture fractionnaire dans sa famille.

<u>Ex</u> : $\frac{2}{5}$ est dans la famille des « cinquièmes », le numérateur 2 indique qu'on en prend 2.

Dorénavant, **on utilisera TOUJOURS l'écriture fractionnaire** !

➢ <u>Exercice 1</u> : Ecrivez sous forme fractionnaire, **sans rien calculer :**

<u>Ex</u> : $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ ❶ **On écrit d'abord LA BARRE DE FRACTION EN PREMIER !**

❷ **Cette barre de fraction doit être mise EXACTEMENT au milieu du signe =.**

neuf quarts $= \frac{9}{4}$ deux demis $= \frac{2}{2}$ un tiers $= \frac{1}{3}$ la moitié de k $= \frac{k}{2}$ une demi pomme $= \frac{\text{pomme}}{2}$

$\pi \div 2{,}3 = \frac{\pi}{2{,}3}$ $(r - 1) \div (t - 1) = \frac{r-1}{t-1}$ vitesse moyenne = distance ÷ durée $= \frac{\text{distance}}{\text{durée}}$

Quatre cas particuliers importants à retenir : Quelles que soient les valeurs de n et de d ($d \neq 0$), on a :

❶ $\frac{0}{d} = 0$ 0 divisé par n'importe quel nombre (sauf 0) donne tjs 0. ex : $\frac{0}{2{,}257} = 0$

❷ $\frac{n}{1} = n$ Tout nombre divisé par 1 redonne *lui même.* ex : $\frac{8{,}8}{1} = 8{,}8$

❸ $\frac{d}{d} = 1$ Tout nb non nul divisé *par lui même* donne *1*. ex : $\frac{\pi}{\pi} = 1$

❹ Un pourcentage est une écriture fractionnaire dont le dénominateur vaut *100* c-à-d $k\ \% = \frac{k}{100}$.

$7\% = \frac{7}{100}$ $\frac{0{,}10}{100} = 0{,}1\ \%$ $\frac{100}{100} = 100\ \%$ $\frac{0{,}05}{100} = 0{,}05\ \%$ $\frac{2500}{100} = 2500\ \%$

D. Fractions :

1. Définition des fractions :

Définition : Dans une écriture fractionnaire $\frac{n}{d}$, **lorsque le numérateur n et le dénominateur d** ($d \neq 0$) **sont des NOMBRES ENTIERS**, alors $\frac{n}{d}$ s'appelle *une fraction.*

Contre exemples : Donner deux écritures fractionnaires qui ne sont pas des fractions : $\frac{8{,}3}{5}$ ou $\frac{2}{\pi}$.

➢ A retenir : **❶ Tout nombre entier peut s'écrire sous forme de fraction :**

$18695 = \frac{18695}{1}$ $5 = \frac{5}{1} = \frac{25}{5} = \ldots$ $11 = \frac{11}{1} = \frac{33}{3} = \ldots$ $4 = \frac{4}{1} = \frac{20}{5} = \frac{40}{10}$

❷ Tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de fraction :

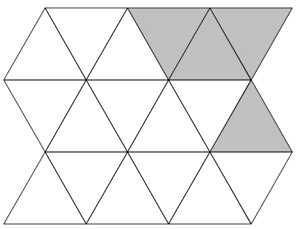
$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \ldots$ $0{,}7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ $0{,}51 = \frac{51}{100}$ $5{,}78 = \frac{578}{100} = \frac{578000}{100000}$ $0{,}041 = \frac{41}{1000}$

Dorénavant, on remplacera toujours les nombres décimaux par des fractions dans les calculs !

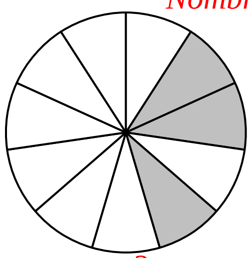
2. Illustration graphique des fractions :

Pour chaque figure, quelle proportion (fraction) de la surface totale représente l'aire coloriée ?

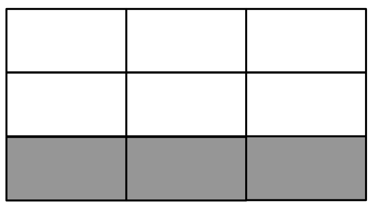
On applique la formule : Proportion coloriée $= \frac{\text{Nombre de parties coloriées}}{\text{Nombre total de parties}}$



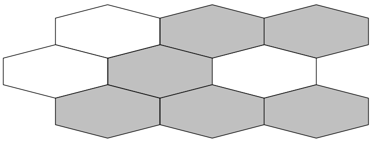
$\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$



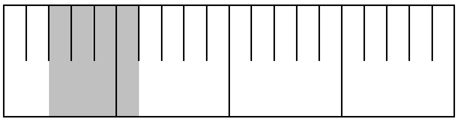
$\frac{3}{11}$



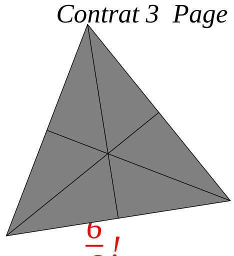
$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$



$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$



$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$



$\frac{6}{6}$!

III. QUOTIENTS EGAUX ; SIMPLIFICATION DES FRACTIONS.

On remarque facilement que $10 \div 5$ et $20 \div 10$ donnent le même quotient. Donc $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{10 \times 2}{5 \times 2}$. Généralisons :

A. Quotients égaux :

Soient $k \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{n}{d}$ et $\frac{n \times k}{d \times k}$ sont 2 écritures fractionnaires du même quotient c-à-d :

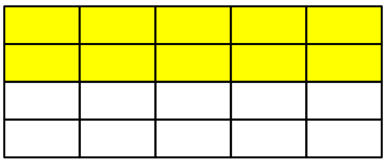
$$\mathbf{\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k} \qquad (k \neq 0 \text{ et } d \neq 0)}$$

Autrement dit : On ne change pas une écriture fractionnaire lorsqu'on la multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

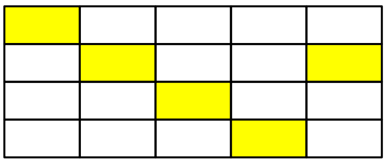
➢ Exercice : On veut colorier 1/2 puis1/4 etc. d'une tablette de chocolat.

Pour cela, on va mettre ces fractions sur 20 puis colorier sur la tablette l a partie correspondant à la fraction obtenue :

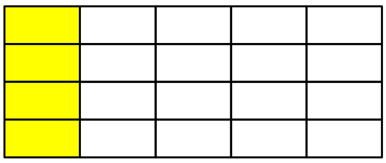
$\frac{1}{2} = \frac{1 \times \mathbf{10}}{2 \times \mathbf{10}} = \frac{10}{20}$ donc 10 carreaux .



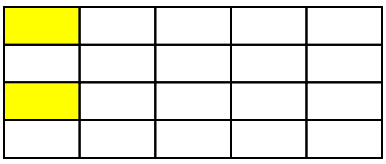
$\frac{1}{4} = \frac{1 \times \mathbf{5}}{4 \times \mathbf{5}} = \frac{5}{20}$ *donc 5 carreaux.*



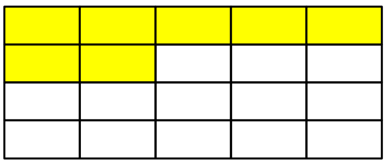
$\frac{1}{5} = \frac{1 \times \mathbf{4}}{5 \times \mathbf{4}} = \frac{4}{20}$ *donc 4 carreaux.*



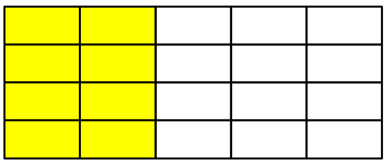
$\frac{1}{10} = \frac{1 \times \mathbf{2}}{10 \times \mathbf{2}} = \frac{2}{20}$ *donc 2 carreaux.*



$\frac{7}{20}$ *donc 7 carreaux.*



$\frac{2}{5} = \frac{2 \times \mathbf{4}}{5 \times \mathbf{4}} = \frac{8}{20}$ *donc 8 carreaux.*



B. Utilité : Simplification des fractions et écritures fractionnaires.

➢ L'égalité $\frac{n \times \mathbf{k}}{d \times \mathbf{k}} = \frac{n}{d}$ va permettre de simplifier les fractions en « réduisant » le numérateur et le dénominateur de départ, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs entre eux (autres que 1).

➢ Exemple : $\frac{78}{48} = \frac{39 \times \mathbf{2}}{24 \times \mathbf{2}} = \frac{39}{24} = \frac{3 \times \mathbf{13}}{3 \times \mathbf{13}} = \frac{13}{8}$

Dans $\frac{13}{8}$, il n'y a plus de facteurs *communs* (autres que 1) entre le numérateur et le dénominateur.

C. Fractions irréductibles :

Un quotient a donc plusieurs écritures fractionnaires. Une est meilleure que toutes les autres :

> Définition : La **meilleure écriture fractionnaire d'un quotient**, c-à-d la plus simple, s'appelle ***fraction irréductible***[1]. Cette écriture vérifie les **2 conditions suivantes** :
>
> Le numérateur et le dénominateurs sont : ❶ **entiers**.
>
> ❷ et **sans facteurs communs entre eux**[2] **(autres que 1).**

- Méthode : A partir d'une écriture fractionnaire, on obtient donc une fraction irréductible :

❶ En faisant « disparaître les virgules » si il y en a ❷ Puis en simplifiant « au maximum ».

- Exercice : Ces écritures fractionnaires sont-elles irréductibles (justifiez) ? Si non, les simplifier.

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\frac{4}{9}$ *irréductible* $\frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9}$ $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ $\frac{13}{17}$ *irréductible*

D. Deux conseils importants :

Je ne me fais pas beaucoup d'illusions mais je vous les donne quand même :

> ❶ **Avant** de commencer les calculs, **toujours simplifier** si possible les écritures fractionnaires.
>
> ❷ Pour cela, bien connaître **ses tables de** *multiplication* !

E. Exercices sur la simplification des fractions :

Remarque : On simplifie toujours par paire de facteurs identiques. Simplifier par 1 ne sert à rien.

① Simplifier sous forme d'une Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

•Ex : $\frac{45}{27} = \frac{\mathbf{9}\times 5}{\mathbf{9}\times 3} = \frac{5}{3}$ F.I

$\frac{42}{48} = \frac{\mathbf{6}\times 7}{\mathbf{6}\times 8} = \frac{7}{8}$ *F.I*

$\frac{26}{39} = \frac{2\times \mathbf{13}}{3\times \mathbf{13}} = \frac{2}{3}$ *F.I*

$\frac{56}{16} = \frac{\mathbf{8}\times 7}{\mathbf{8}\times 2} = \frac{7}{2}$ *F.I*

$\frac{8}{64} = \frac{1\times \mathbf{8}}{8\times \mathbf{8}} = \frac{1}{8}$ *F.I*

$\frac{21}{49} = \frac{\mathbf{7}\times 3}{\mathbf{7}\times 7} = \frac{3}{7}$ *F.I*

•Ex : $\frac{0,24}{0,8} = \frac{0,24\times \mathbf{100}}{0,8\times \mathbf{100}} = \frac{24}{80} = \frac{3\times \mathbf{8}}{10\times \mathbf{8}} = \frac{3}{10}$ F.I.

$\frac{1,5}{4,5} = \frac{1,5\times \mathbf{10}}{4,5\times \mathbf{10}} = \frac{15}{45} = \frac{1\times \mathbf{15}}{3\times \mathbf{15}} = \frac{1}{3}$ *F.I.*

$\frac{0,8}{2} = \frac{0,8\times \mathbf{10}}{2\times \mathbf{10}} = \frac{8}{20} = \frac{2\times \mathbf{4}}{5\times \mathbf{4}} = \frac{2}{5}$ *F.I.*

$\frac{9}{0,01} = \frac{9\times \mathbf{100}}{0,01\times \mathbf{100}} = \frac{900}{1} = 900$

---

[1] Irréductible : qu'on ne peut plus réduire. « Dans un coin reculé de la Gaule se dressait un petit village d'irréductibles gaulois. »

[2] Le numérateur et le dénominateur *ne sont pas* dans une même table de multiplication commune. Ex : 2 et 7 ou bien 26 et 19.

② A quelles Fractions Irréductibles (F.I.) sont égales les pourcentages suivants :

Ex : 50 % $= \frac{50}{100}$	25 % $= \frac{25}{100}$	20 % $= \frac{20}{100}$	10 % $= \frac{10}{100}$
$= \frac{\mathbf{50} \times 1}{\mathbf{50} \times 2}$	$= \frac{1 \times \mathbf{25}}{4 \times \mathbf{25}}$	$= \frac{1 \times \mathbf{20}}{5 \times \mathbf{20}}$	$= \frac{1 \times \mathbf{10}}{10 \times \mathbf{10}}$
$= \frac{1}{2}$ *F.I.*	$= \frac{1}{4}$ *F.I.*	$= \frac{1}{5}$ *F.I.*	$= \frac{1}{10}$ *F.I.*
50% représente la moitié.	*25% représente le quart.*	*20% représente le cinquième.*	*10 % représente le dixième.*

F. Critères de divisibilité ; application à la simplification :

Est-il simple de simplifier $\frac{126}{342}$? *Dur pour l'instant !*

Effectivement non. Toute la difficulté est de décomposer 126 et 342 en faisant apparaître des facteurs communs. Comment trouver ces facteurs communs ? C'est là qu'interviennent les critères de divisibilité :

- ❶ **Un entier est divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est *pair.***

Donner un entier à 2 chiffres, qui est pair et dont la somme des chiffres est 5 : *32 ou 14 par exemple.*

Comment s'appellent les entiers non divisibles par 2 ? *Les nombres impairs*

- ❷ **Un entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par *3.***

Donner un entier négatif à 2 chiffres, divisible par 3 : *- 33 ou –15 ou –87 par exemple.*

Donner un entier à 2 chiffres, divisible par 2 et par 3 : *18 ou 24*. Est-il divisible par 6 = 2 × 3 ? *oui.*

- ❸ **Un entier est divisible par 5 lorsque son dernier chiffre est *0* ou *5.***

Donner un entier négatif à 2 chiffres divisible par 5 et dont la somme des chiffres est 13 : *-85.*

Donner un entier à 2 chiffres, divisible par 2 et par 5 : *10 ou 20 ou 30…* Est il divisible par 10 ? oui.

Donner un entier à 2 chiffres, divisible par 3 et par 5 : *15 ou 30 ou 45…* Est il divisible par *15* ? *oui.*

Donner un entier à 2 chiffres, divisible par 2 et 3 et 5 : *30 ou 60 ou 90…* Est il divisible par *30* ? *oui.*

- ❹ Un entier est **divisible par 10 ou 100 ou 1000 etc. lorsqu'il se termine par *0* ou *00* ou *000* etc.**

Sachant que 10 = *5 × 2*, un nombre est divisible par 10 quand il est dans la table de 2 et la table de 5. Donc son dernier chiffre doit être 0 ou 5 et pair en même temps. Ce dernier chiffre ne peut être que : *0*

➢ Exercice : Compléter chaque case du tableau par vrai ou faux :

Nombres	div. par 2	div. par 3	div. par 5	div. par 6	div. par 10	div. par 15	div. par 30
36	*oui*	*oui*		*oui*			
75		*oui*	*oui*			*oui*	
120	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*
-90	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*
132	*oui*	*oui*		*oui*			

- Ces 4 critères de divisibilité seront amplement suffisants pour trouver des facteurs communs quand on voudra simplifier des fractions du style 126/342.

Méthode : $\dfrac{126}{342} = \dfrac{63 \times 2}{171 \times 2} = \dfrac{63}{171} = \dfrac{21 \times 3}{57 \times 3} = \dfrac{21}{57} = \dfrac{3 \times 7}{3 \times 19} = \dfrac{7}{19} \longrightarrow$ Fraction Irréductible (F.I.)

126 et 342 sont pairs donc divisibles par 2.

La somme des chiffres de 63 et celle de 171 sont divisibles par 3

La somme des chiffres de 21 et celle de 57 sont divisibles par 3

Il n'y a plus de facteurs communs autres que 1.

- Remarques :

Puisque 126 et 342 sont divisibles par 2 puis 3 et encore par 3, j'aurai pu aller plus vite en remarquant qu'ils étaient donc divisibles par 6 (= 2 × 3) ou par 9 (= 3 × 3). Au moins, la façon de faire était systématique !

On essayera toujours de débuter la simplification par le plus grand nombre possible.

- Exercice : Simplifier en colonnes sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier :

55 et 30 se terminent par 0 ou 5 donc sont divisibles par 5.

$\dfrac{55}{30} = \dfrac{\mathbf{5} \times 11}{\mathbf{5} \times 6} = \dfrac{11}{6}$ *F.I.*

125 et 75 sont div. par 5 et encore par 5 donc par 25.

$\dfrac{125}{75} = \dfrac{25 \times 5}{25 \times 3} = \dfrac{5}{3}$ *F.I.*

56 et 62 sont pairs donc sont dans la table de 2.

$\dfrac{56}{62} = \dfrac{28 \times 2}{2 \times 31} = \dfrac{28}{31}$ *F.I.*

78 et 54 sont dans les tables de 2 et 3 donc sont div. par 6.

$\dfrac{78}{54} = \dfrac{\mathbf{6} \times 13}{\mathbf{6} \times 9} = \dfrac{13}{9}$ *F.I.*

96 et 84 sont div. par 2 et 3 donc par 6.

$\dfrac{96}{84} = \dfrac{\mathbf{6} \times 16}{14 \times \mathbf{6}} = \dfrac{16}{14} = \dfrac{8}{7}$ *F.I.*

460 et 380 se terminent par 0 donc sont divisibles par 10.

$\dfrac{480}{660} = \dfrac{46 \times \mathbf{10}}{38 \times \mathbf{10}} = \dfrac{46}{38} = \dfrac{\mathbf{2} \times 23}{\mathbf{2} \times 19} = \dfrac{23}{19}$ *F.I.*

24 est 12 sont dans la table de 6 donc 24 et 120 aussi.

$\dfrac{24}{120} = \dfrac{\mathbf{6} \times 4}{\mathbf{6} \times 20} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1 \times \mathbf{4}}{5 \times \mathbf{4}} = \dfrac{1}{5}$ *F.I.*

39 et 36 ont la somme de leurs chiffres divisible par 3 donc ils sont dans la table de 3.

$\dfrac{39}{36} = \dfrac{\mathbf{3} \times 13}{\mathbf{3} \times 12} = \dfrac{13}{12}$ *F.I.*

Ensuite, vérifiez vos calculs avec votre calculatrice en utilisant les touches / (Texas) ou d/c (Casio) qui permettent de simplifier automatiquement les fractions.

- <u>Exercice</u> :

A la loterie « Entub » vous avez 48 chances sur 180 de gagner. A la loterie « Arnaq », vous avez 15 chances de gagner sur 75. A quelle loterie jouez vous ? Justifiez évidemment ! (Méthode FRCP)

On applique la méthode FRCP pour mettre sous forme irréductible les fractions, puis on comparera :

Proportion de chances de gagner $= \dfrac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}}$

à la loterie « Entub » $= \dfrac{48}{180} = \dfrac{\mathbf{6} \times 8}{\mathbf{6} \times 30} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$ *F.I.*

Proportion de chances de gagner $= \dfrac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}}$

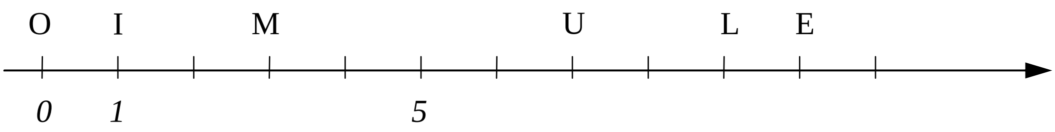
à la loterie « Arnaq » $= \dfrac{15}{75} = \dfrac{3 \times \mathbf{5}}{\mathbf{5} \times 15} = \dfrac{3}{15}$

On voit qu'il y a plus de chance à jouer à la loterie « Entub », mais bon je ne vous conseille pas de jouer, à moins que vous ayez de l'argent à perdre !

IV. POSITION D'UN POINT SUR UNE DROITE REPEREE.

On a parfois besoin de repérer sur une droite (un axe) la **position d'un point par rapport à point fixe** de la droite **appelé « Point Origine »**. Pour cela, il faut d'abord munir cet axe d'un repère.

A. Deux définitions : Axe repéré ; Abscisse.



Un axe muni d'un repère est une droite :

- **orientée** (en général de la gauche vers la droite lorsqu'elle est horizontale ou de bas en haut lorsqu'elle est verticale).
- sur laquelle on a placé **un point fixe appelé l'Origine** (lettre O généralement mais pas toujours !).
- qu'on a **graduée** à partir de cette origine **régulièrement à l'aide de la longueur unité** OI (1 cm ou 1 carreau généralement).
- à chaque graduation unité est associée un nombre. A l'origine correspond toujours le nombre 0.
  Les nombres positifs sont à droite de 0. Plus on va vers la droite et plus les nombres augmentent.

Et c'est tout ! ;-}

- Définition : Le nombre qui donne **la position d'un point** sur un axe repéré s'appelle l'**abscisse.**
- Notation : L'abscisse d'un point M se note $\mathbf{x_M}$ **(**on lit « x indice M », l'indice M est écrit **en dessous** du x).
- Exemple : Sur la droite plus haut, l'abscisse du point M vaut 3 ce qui se note : $x_M = 3$.

➢ Exemples : En reprenant la droite plus haut :

L'abscisse du point O est le nombre 0 (car le point O est l'Origine) c-à-d x_O = *0 !*

L'abscisse du point I est le nombre 1 (car la longueur OI est la longueur unité) c-à-d x_I = *1 !*

L'abscisse du point M est *3* c-à-d x_M = *3.*

x_U = 7 c-à-d l'*abscisse* du point *U* est égale à *7.*

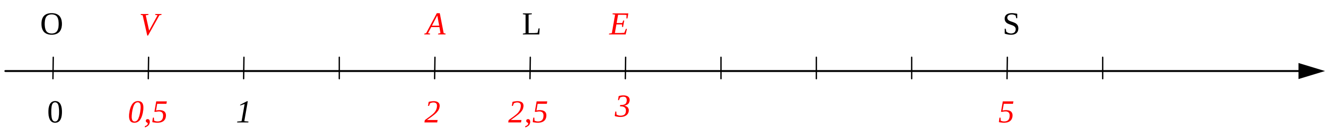
x_L = *9 c-à-d l'abscisse du point L est égale à 9.*

B. Exercices sur les abscisses :

➢ Exercice 1 : Placer au dessus de l'axe les 3 points suivants :

Le point A d'abscisse $x_A = 2$ (cela peut s'écrire *A(2)*) V(0,5) E(3).

Puis écrire en dessous des points L et S l'abscisse de chacun. Lire le mot : *OVALES.*



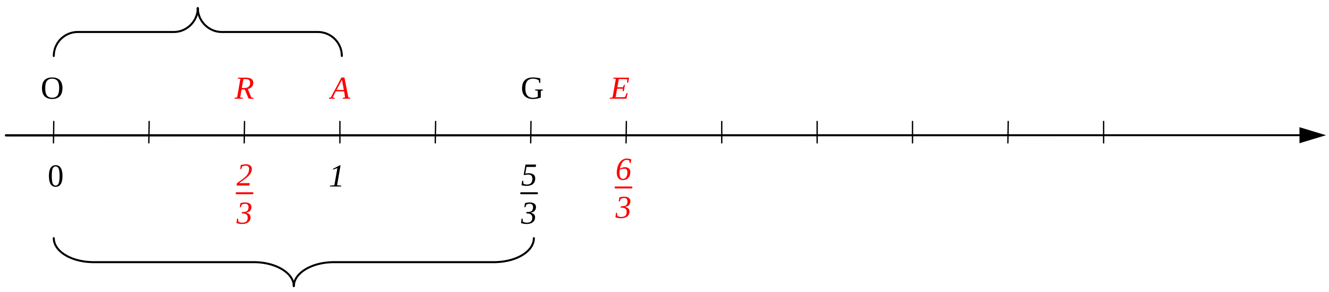
- Exercice 2 : On veut placer sur l'axe gradué ci dessous le point G d'abscisse 5/3.

Méthode : Dans l'abscisse $\frac{5}{3}$ qui donne la position du point G, on a les deux informations suivantes :

❶ Le **dénominateur** 3 dit que les *segments unité de longueur 1* doivent être partagés en 3 morceaux.

❷ Le **numérateur** 5 dit qu'il faut placer G à 5 graduations à droite du point origine O.

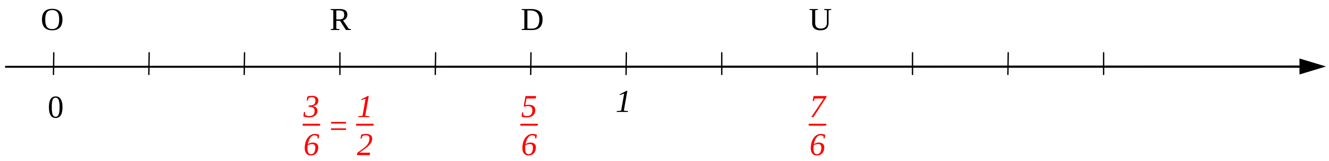
❶ Les segments unité (de longueur 1) ont été partagés en 3 morceaux.



❷ Puis on prend 5 morceaux à partir du point origine O.

A vous maintenant, placer ***au dessus*** les trois points A(1), E d'abscisse $\frac{6}{3}$, R tel que $x_R = \frac{2}{3}$.

- Exercice 3 : Ecrire les abscisses (sous la forme d'entier ou de fraction irréductible) des points :



Les segments unité sont partagés en 6 morceaux donc les graduations correspondent à des fractions sur 6.

- Exercice 4 : Plus dur ! On veut trouver sur la droite *ci dessous* l'abscisse de D.

Méthode en *3* étapes :

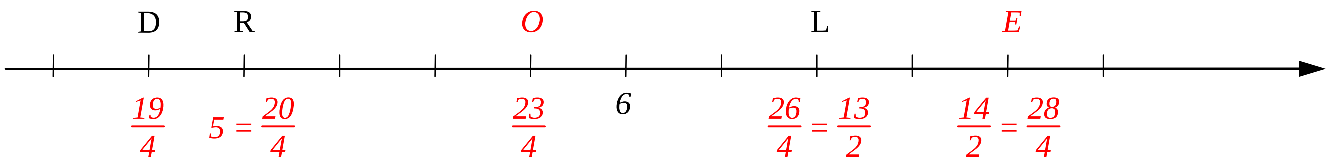
① On repère d'abord un segment unité (de longueur 1) : celui entre 5 et 6 par exemple.

② Puisque le segment unité entre 5 et 6 est composé de 4 morceaux, alors les abscisses (positions) des points peuvent s'écrire sous forme de fraction sur 4. Puis on met sur 4 l'une des positions existantes : $x_R = 5 = \frac{5}{1} = \frac{5 \times 4}{1 \times 4} = \frac{20}{4}$.

③ Puisque D est à 1 graduation *avant* R, alors l'abscisse de D est donnée par $\frac{20}{4} - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$ c-à-d $x_D = \frac{19}{4}$.

A vous maintenant : Ecrivez les abscisses (sous la forme la plus simple possible !) de D et L.

Puis placer les points $O(\frac{23}{4})$ et $E(\frac{14}{2})$.



Il faut mettre l'abscisse de E sur 4 : $x_E = \frac{14}{2} = \frac{14 \times 2}{2 \times 2} = \frac{28}{4}$.