CORRIGE
PRODUIT D'UN ENTIER PAR UNE FRACTION. FRACTION D'UNE QUANTITE.

Me signaler toute erreur éventuelle !

« Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à peu près. » Stendhal[1].

Trop souvent l'on préfère la liberté d'être stupide à l'obligation d'être intelligent.

Pré-requis pour prendre un bon départ :

	☹	😐	☺	☺☺
Ecritures fractionnaires et fractions : définitions, représentations graphiques.				
Simplification des écritures fractionnaires.				
Mettre au même dénominateur plusieurs écritures fractionnaires.				
Tables de multiplication parfaitement sues dans les 2 sens ! ▪ *Produit de 2 nombres.* ▪ *Décomposition d'un nombre en produit de facteurs.*				

[1] Henri Beyle dit Stendhal (1783-1842) est l'un des plus grands écrivains français. On lui doit Le Rouge et le Noir (1827), La Chartreuse de Parme (1839). Il avait une très haute opinion des Mathématiques. La découverte de la règle des signes pour le produit de 2 nombres relatifs (exemple : – par – donne +) lui a posé quelques problèmes qu'il relate dans son autobiographie intitulée "Vie de Henri Brulard (1890)".

NOM et Prénom : …………………………………………… 6ème ……

I. RAPPELS : QUOTIENTS, ECRITURES FRACTIONNAIRES.

A. Rappels définitions :

- Le résultat d'une division (par un nombre différent de 0) s'appelle un quotient.

Ex : 12 est le résultat de 24 ÷ 2. Dit autrement, 12 est le **quotient** de 24 par 2.

- Rechercher un facteur (un terme) inconnu dans une multiplication revient à trouver un quotient.

Ex : Le facteur inconnu « q » dans la multiplication $7 \times q = 84$ est le quotient de 84 par 7

q est le résultat de l'opération 84 ÷ 7.

- On utilise pour les quotients une **écriture plus pratique et moins dangereuse** que l'écriture avec le signe « ÷ » : l'écriture fractionnaire.

Ex : Mettre sous forme fractionnaire : $2 \div 7 = \dfrac{2}{7}$ $\qquad 0{,}5 \div 0{,}548 = \dfrac{0{,}5}{0{,}548}$ $\qquad (\pi + 3) \div 5 = \dfrac{\pi + 3}{5}$

- Lorsque le numérateur et le dénominateur (≠ 0, car on ne peut pas partager en aucune partie) sont **des nombres entiers**, l'écriture fractionnaire s'appelle tout simplement une **fraction**.

Ex : $\dfrac{0{,}3}{5}$ est une écriture fractionnaire mais pas une fraction car le numérateur n'est pas un entier.

$\dfrac{3}{\pi}$ est une écriture fractionnaire mais pas une fraction car le dénominateur n'est pas un entier.

> Une **fraction irréductible** (F.I.) est :
>
> ❶ une fraction ! Le numérateur et le dénominateur doivent être des nombres entiers.
>
> ❷ « simplifiée au maximum » : il n'y a plus de facteurs communs[2] entre le numérateur et le dénominateur (sauf 1).

Ex : Dire si les écritures suivantes sont des fractions irréductibles. Si non, les mettre sous forme irréductible.

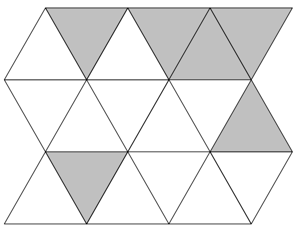
$\dfrac{2}{3}$ F.I. $\qquad \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad \dfrac{0{,}2}{3}$ non, numérateur non entier ! $\qquad \dfrac{0{,}2}{0{,}3}$ non, num et dénom non entiers !

- Un **pourcentage** est une écriture fractionnaire sur 100 (c-à-d de dénominateur égal à 100).

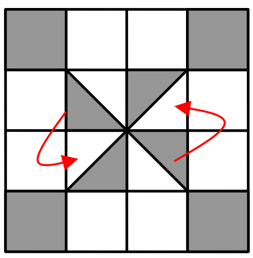
x : $17\ \% = \dfrac{17}{100}$ $\qquad 0{,}25\ \% = \dfrac{0{,}25}{100}$ $\qquad 33\ \% = \dfrac{33}{100}$ $\qquad \dfrac{15}{100} = 15\ \%$ $\qquad 127\ \% = \dfrac{127}{100}$

B. 8 exercices de révision :

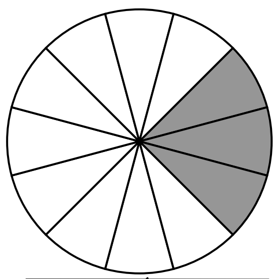
① Quelle fraction (proportion) **irréductible** de l'aire totale représente chaque aire coloriée suivante ?



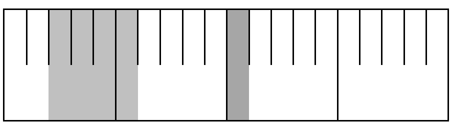
$\dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ F.I.



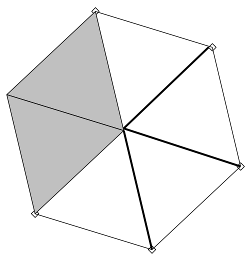
$\dfrac{5}{16}$



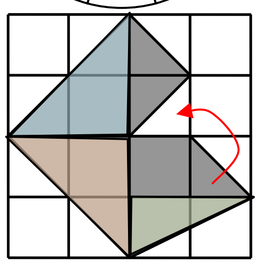
$\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ F.I



$\dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$ F.I.



$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ F.I.



Par aire de triangles rectangles : $\dfrac{10{,}5}{16} = \dfrac{21}{32}$ F.I.

[2] Le numérateur et le dénominateur ne sont pas dans une même table de multiplication à part celle de 1. Ex : 14 et 15 ou 7 et 8.

② Compléter :

$\frac{15}{18} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{5}{6}$ $\frac{40}{64} = \frac{5 \times 8}{8 \times 8} = \frac{5}{8}$ $\frac{49}{35} = \frac{7}{5}$ $\frac{39}{26} = \frac{3}{2}$

③ Simplifier **au maximum** les écritures fractionnaires suivantes :

Ex : $\frac{12}{14} = \frac{6 \times 2}{7 \times 2} = \frac{6}{7}$ F.I.

$\frac{28}{24} = \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{7}{6}$ F.I.

$\frac{36}{42} = \frac{6 \times 6}{7 \times 6} = \frac{6}{7}$ F.I.

$\frac{15}{45} = \frac{1 \times 15}{3 \times 15} = \frac{1}{3}$ F.I.

$\frac{77}{99} = \frac{7 \times 11}{9 \times 11} = \frac{7}{9}$ F.I.

$\frac{26}{39} = \frac{2 \times 13}{3 \times 13} = \frac{2}{3}$ F.I.

$\frac{21\cancel{0}}{35\cancel{0}} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{3}{5}$ F.I.

$\frac{24}{48} = \frac{1 \times 24}{2 \times 24} = \frac{1}{2}$ F.I.

$\frac{72}{36} = \frac{2 \times 36}{36} = 2$

et non $\frac{2}{1}$!

$\frac{64\cancel{0}}{80\cancel{0}} = \frac{8 \times 8}{8} = 8$

et non $\frac{8}{1}$!

$\frac{75}{25} = \frac{3 \times 25}{25} = 3$

et non $\frac{3}{1}$!

$\frac{2\,4\cancel{00}}{3\,2\cancel{00}} = \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{3}{4}$ F.I.

④ Compléter les égalités suivantes :

$\frac{45}{27} = \frac{5}{3}$ $\frac{30}{11} = \frac{90}{33}$ $\frac{14}{21} = \frac{16}{\dots\dots}$ $\frac{\dots\dots}{30} = \frac{10}{12}$

Détails obligatoires des calculs pour les 2 dernières égalités seulement, en colonnes :

$\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$

$\frac{10}{12} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$

⑤ Transformer ces écritures fractionnaires en fractions irréductibles :

Ex : $\frac{0,9}{3} = \frac{0,9 \times 10}{3 \times 10} = \frac{9}{30} = \frac{3 \times 3}{3 \times 10} = \frac{3}{10}$ F.I.

$\frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times 10}{4 \times 10} = \frac{12}{40} = \frac{3 \times 4}{4 \times 10} = \frac{3}{10}$ F.I.

Ex : $\frac{0,5}{0,15} = \frac{0,5 \times 100}{0,15 \times 100} = \frac{50}{15} = \frac{5 \times 10}{5 \times 3} = \frac{10}{3}$

$\frac{0,5}{0,15} = \frac{0,5 \times 100}{0,15 \times 100} = \frac{50}{15} = \frac{10 \times 5}{5 \times 3} = \frac{10}{3}$ F.I.

⑥ Ecrire les nombres décimaux suivants sous forme de fraction irréductible :

Ex : $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{1}{5}$ F.I.

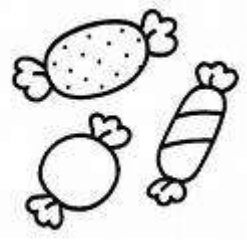
$0,12 = \frac{12}{100} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{3}{25}$ F.I.

$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{5}$ F.I.

$0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1 \times 4}{25 \times 4} = \frac{1}{25}$ F.I.

II. MULTIPLICATION D'UN NOMBRE ENTIER PAR UNE FRACTION.

A. Découverte :



Voici la situation : **On veut partager 3 paquets de bonbons entre 4 amis.**

a) Si chaque paquet ne contient qu'1 seul bonbon, cela revient à partager 3 bonbons pour 4 personnes ! Chacun reçoit donc $\frac{3}{4}$ d'un bonbon, c-à-d 0,75 bonbons.

b) Si maintenant chaque paquet contient 20 bonbons identiques, il y a 3 façons de partager :

- 1ère façon : On considère que chaque personne reçoit 20 fois plus qu'au a) précédent.

Chaque personne reçoit donc $\mathbf{20} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ bonbons ce qui fait $20 \times 0{,}75 = 15$ bonbons par personne.

- 2ème façon : On rassemble tous les bonbons des 3 paquets puis on les partage en 4 parts égales.

Chaque personne reçoit donc : $\frac{\mathbf{20} \times \mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ bonbons. Combien cela fait-il de bonbons ? $\frac{60}{4} = 15$.

- 3ème façon : Un paquet de 20 bonbons est partagé en 4.

  Comme il y a 3 paquets, on fait cette action 3 fois.

Chaque personne reçoit donc : $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{3}$ bonbons. Combien cela fait-il de bonbons ? $5 \times 3 = 15$.

Il est évident que par ces 3 méthodes de partage, chaque personne reçoit le même nombre de bonbons !

On peut donc écrire la **double égalité** :

$$\boxed{\mathbf{20} \times \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{20} \times \mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{3}}$$

Maintenant, généralisons.

B. Règle de multiplication d'un entier par une écriture fractionnaire :

> Soient « a » un nombre entier et « $\frac{b}{c}$ » une écriture fractionnaire (avec $c \neq 0$). On a alors la double égalité :
>
> $$\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \times \mathbf{b}$$

En fait, dans ce genre de multiplication, c'est comme si on pouvait « prolonger » la barre de fraction sous le nombre entier, qu'il soit à gauche ou à droite de la fraction

Voyons maintenant comment en pratique on va utiliser cette règle de calcul ; c'est l'objet de la méthode page suivante.

Multiplication d'un entier par une fraction : Méthode en 3 étapes :

Pour calculer des expressions de type « un entier × une fraction » $\left(\text{type } a \times \frac{b}{c} \text{ ou } \frac{a}{c} \times b\right)$:

❶ On met l'expression sous forme d'**une seule fraction** grâce à la règle de la page précédente.

❷ On **décompose en produits un ou plusieurs facteurs** du numérateur et/ou du dénominateur afin de pouvoir simplifier une ou plusieurs paires de facteurs identiques.

❸ On **simplifie** soit sous forme de fraction irréductible, soit sous forme d'un entier (si on a de la chance).

Deux exemples :

- Ex ① : $24 \times \frac{3}{4} = \frac{24 \times 3}{4}$ ❶ On a transformé sous forme d'une seule fraction grâce à la règle p.4.

$= \frac{6 \times \mathbf{4} \times 3}{\mathbf{4}}$ ❷ On a décomposé en produit le nombre 24 en vue de simplifier.

On n'a pas oublié de réécrire le « × 3 » au numérateur !

$= 6 \times 3$ ❸ On a simplifié la paire de 4.

$= 18$ entier. Ici, exceptionnellement, le résultat est un nombre entier !

Remarques : Pourquoi ne doit-on pas effectuer la division $\frac{3}{4}$ dans $24 \times \frac{3}{4}$?

Pour 3 raisons :

① La division 3/4 n'est pas facile (0,75) !

② Ensuite, la multiplication $24 \times 0{,}75$ ne sera pas facile non plus !

③ Cette technique ne marchera donc pas pour $24 \times \frac{7}{3}$ par exemple !

- Ex ② : $\frac{13}{35} \times 21 = \frac{13 \times 21}{35}$ ❶ On a transformé sous forme d'une seule fraction grâce à la règle p.4.

$= \frac{13 \times \mathbf{7} \times 3}{5 \times \mathbf{7}}$ ❷ On a décomposé en produit les nombres 21 et 35 afin de simplifier.

On n'a pas oublié de réécrire le « 13 × » au numérateur !

$= \frac{13 \times 3}{5}$ ❸ On a simplifié la paire de 7.

$= \frac{39}{5}$ F.I. Là, le résultat est une fraction irréductible (F.I.).

Remarques : Pourquoi ne doit-on pas effectuer la multiplication 13×21 dans $\frac{13 \times 21}{35}$?

Pour 3 raisons :

① La multiplication 13×21 n'est pas facile à faire !

② Cette multiplication fera apparaître un nombre plus grand au numérateur (273) ce qui rendra la simplification finale de la fraction 273/35 beaucoup plus difficile !

③ Cette technique ne marchera donc pas pour $1\,428 \times \frac{27}{1\,428}$ par exemple !

En résumé, on appliquera toujours et rigoureusement cette méthode en 3 étapes.

C. Exercices sur le produit d'un nombre par une fraction :

❶ ***En appliquant rigoureusement la méthode en 3 étapes vue à la page précédente***, calculer en colonnes les produits suivants (résultat sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier) :

Ex : $3 \times \frac{14}{21} = \frac{3 \times 14}{21}$

On va décomposer 14 et 21 pour pouvoir simplifier.

$= \frac{3 \times 2 \times 7}{7 \times 3}$

$= 2$ entier.

$\frac{15}{40} \times 16 = \frac{15 \times 16}{40}$

$= \frac{5 \times 3 \times 8 \times 2}{8 \times 5}$

$= 6$ entier

$\frac{8 \times 7}{40} = \frac{8 \times 7}{8 \times 5}$

$= \frac{7}{5}$ F.I.

$13 \times \frac{3}{26} = \frac{13 \times 3}{2 \times 13}$

$= \frac{3}{2}$ F.I.

$5\cancel{00} \times \frac{14}{2\,5\cancel{00}} = \frac{5 \times 14}{5 \times 5}$

$= \frac{14}{5}$ F.I.

Ex : $\frac{6}{28} \times 21 = \frac{6 \times 21}{28}$

On va tout décomposer pour pouvoir simplifier.

$= \frac{2 \times 3 \times 7 \times 3}{7 \times 2 \times 2}$

$= \frac{9}{2}$ F.I.

$5 \times \frac{15}{5} = \frac{5 \times 15}{5}$

$= 15$ entier

$\frac{18}{10} \times 20 = \frac{18 \times 2\cancel{0}}{1\cancel{0}}$

Que peut-on barrer ?

$= 36$ entier

et non $\frac{36}{1}$!

$64 \times \frac{11}{8} = \frac{8 \times 8 \times 11}{8}$

$= 88$ entier

et non $\frac{8}{1}$!

$6 \times \frac{2}{36} = \frac{6 \times 2 \times 1}{6 \times 2 \times 3}$

$= \frac{1}{3}$ F.I.

$35 \times \frac{9}{45} = \frac{35 \times 9}{45}$

$= \frac{7 \times 5 \times 9}{9 \times 5}$

$= 7$ entier

$\frac{6}{40} \times 15 = \frac{6 \times 15}{40}$

$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 3}{2 \times 4 \times 5}$

$= \frac{9}{4}$ F.I.

$3 \times \frac{10}{12} = \frac{3 \times 10}{12}$

$= \frac{3 \times 5 \times 2}{2 \times 2 \times 3}$

$= \frac{5}{2}$ F.I.

$\frac{45}{54} \times 3 = \frac{9 \times 5 \times 3}{9 \times 3 \times 2}$

$= \frac{5}{2}$ F.I.

$\frac{3}{21} \times 7 = \frac{3 \times 7 \times 1}{3 \times 7}$

$= 1$ entier.

$11 \times \frac{3}{66} = \frac{11 \times 3}{66}$

$= \frac{11 \times 3 \times 1}{2 \times 3 \times 11}$

$= \frac{1}{2}$ F.I.

$\frac{25 \times 9}{45} = \frac{5 \times 5 \times 9}{9 \times 5}$

$= 5$ entier.

$27 \times \frac{10}{36} = \frac{27 \times 10}{36}$

$= \frac{3 \times 9 \times 2 \times 5}{9 \times 2 \times 2}$

$= \frac{15}{2}$ F.I.

$\frac{3}{3\,257} \times 3\,257 = \frac{3 \times 3\,257}{3\,257}$

$= 3$ entier

et non $\frac{3}{1}$!

$\frac{7\cancel{0}}{2\,0\cancel{00}} \times 15\cancel{0} = \frac{7 \times 5 \times 3}{5 \times 4}$

$= \frac{21}{4}$ F.I.

III. FRACTION D'UNE QUANTITE.

A. Découverte :

On veut traduire mathématiquement : « les trois quarts d'un paquet de 32 cartes ».

Pour prendre les $\frac{3}{4}$ du paquet, on peut diviser le paquet de 32 cartes en 4 tas égaux puis prendre 3 fois un tas.

Donc $\frac{3}{4}$ de 32 cartes $= \underbrace{3}_{\text{nombre de tas}} \times \overbrace{\frac{32}{4}}^{\text{un tas}}$

Mais d'après la règle p.4 de multiplication, $3 \times \frac{32}{4} = \frac{3 \times 32}{4} = \frac{3}{4} \times 32$.

Finalement, on vient de prouver que : « **prendre les $\frac{3}{4}$ de 32 revient à effectuer l'opération $\frac{3}{4} \times 32$** » !

Généralisons.

B. Fraction d'une quantité : règle de calcul.

Règle : **Prendre une fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité k revient à effectuer l'opération $\frac{a}{b} \times k$**

Autrement dit : Prendre la fraction d'une quantité revient à multiplier cette fraction par la quantité.

- 2 exemples :

• $\frac{2}{9}$ de 15 kg $= \frac{2}{9} \times 15 = \frac{2 \times 15}{9} = \frac{2 \times 5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{10}{3}$ kg

• Un quart d'heure = un quart de 60 minutes $= \frac{1}{4} \times 60 = \frac{1 \times 60}{4} = \frac{1 \times 4 \times 15}{4} = 15$ min

En résumé, les mots « de », « du », « d' » ou « des » entre une proportion (une fraction) et une quantité se traduisent (sont remplacés) par une multiplication (×).

- Applications :

❶ Calculer :

$\frac{2}{7}$ de 49 € $= \frac{2 \times 49}{7}$

$= \frac{2 \times 7 \times 7}{7}$

$= 14$ €

$\frac{8}{6}$ des 30 km $= \frac{2 \times 4 \times 10 \times 3}{3 \times 2}$

$= 40$ km

Le tiers d'un seau de 12 litres

$= \frac{1}{3} \times 12$

$= \frac{1 \times 4 \times 3}{3}$

$= 4$ litres

$\frac{2}{5}$ d'une classe de 25 élèves

$= \frac{2 \times 5 \times 5}{5}$

$= 10$ élèves

❷ Convertir en minutes :

$\frac{2}{5}$ h $= \frac{2}{5} \times 60$ secondes

$= \frac{2 \times 5 \times 12}{5}$

$= 24$ secondes

Convertir en secondes :

$\frac{5}{3}$ min $= \frac{5}{3} \times 60$ minutes

$= \frac{5 \times 3 \times 20}{3}$

$= 100$ minutes

C. Pourcentage d'une quantité :

➢ Exemple : 25 % de 40 € $= \frac{25}{10\cancel{0}} \times 4\cancel{0} = \frac{25 \times 4}{10} = \frac{5 \times 5 \times 2 \times 2}{5 \times 2} = 10$ €.

« Appliquer un pourcentage à une quantité » équivaut à effectuer le produit :

la fraction sur 100 (correspondant à ce pourcentage) × cette quantité.

➢ Application : Calculer en colonnes les pourcentages suivants :

15 % de 300 mm

$= \frac{15 \times 3\cancel{00}}{1\cancel{00}}$

$=$ 45 mm

Une réduction de 2 % sur 250 €

$= \frac{2 \times 25\cancel{0}}{10\cancel{0}}$

$= \frac{2 \times 5 \times 5}{5 \times 2}$

$=$ 5 €

4 % de matière grasse dans un pot de 25 g

$= \frac{4 \times 25}{100}$

$= \frac{4 \times 25 \times 1}{4 \times 25}$

$=$ 1 gramme

D. Situations (méthode Analyse-Synthèse évidemment !) :

❶ Dans une classe de 30 élèves, 20 % des élèves s'ennuient ! Parmi ces élèves qui s'ennuient, $\frac{2}{3}$ en ont marre de s'ennuyer.

1. Combien d'élèves s'ennuient ?

Nb d'élèves s'ennuyant = 20 % du nb total d'élèves

$= \frac{2\cancel{0} \times 3\cancel{0}}{1\cancel{00}}$

$=$ 6 élèves

6 élèves s'ennuient dans la classe. Les pauvres !

2. Combien d'élèves en ont marre de s'ennuyer ?

Nb d'élèves y'en a marre = $\frac{2}{3}$ du nb d'élèves s'ennuyant

$= \frac{2 \times 3 \times 2}{3}$

$=$ 4 élèves

4 élèves en ont marre de s'ennuyer dans la classe. Faites de s maths alors !

❷ Un élève devrait passer un douzième ($\frac{1}{12}$) de son temps à travailler à la maison et minimum un tiers ($\frac{1}{3}$)de son temps à dormir.

1. Combien de temps doit-il travailler dans une journée (24h) ?

Durée de travail = $\frac{1}{12}$ de la durée d'une journée

$= \frac{1 \times 12 \times 2}{12}$

$=$ 2 h

Après la classe, il faut travailler pendant 2h.

Combien de temps au minimum doit-il dormir par jour (24h) ?

Durée de travail = $\frac{1}{3}$ de la durée d'une journée

$= \frac{1 \times 8 \times 3}{3}$

$=$ 8 h

Un enfant doit dormir minimum 8 h par jour.

❸ En 1900, l'espérance de vie en France était égale à 49 ans. En 2006, elle avait augmenté de 65 % par rapport à 1900.

1. Calculer l'augmentation d'espérance de vie entre 1900 et 2006.

Augmentation espérance de vie = $\frac{65}{100}$ de l'espérance en 1900

$= \frac{65}{100} \times 49$

$\approx$ 32 ans

Entre 1900 et 2006, l'espérance de vie en France a augmenté d'environ 32 ans.

2. Calculer l'espérance de vie en 2006, arrondie à l'année.

Espérance de vie (2006) = Espérance (1900) + augmentation

$\approx$ 49 + 32

$\approx$ 81 ans

En 2006, l'espérance de vie en France est d'environ 81 ans.

IV. PROPORTIONS ET FRACTIONS.

Deux classes de 6ème ont participé à un contrôle commun. Les résultats ont été reportés dans le tableau ci-contre :

	Classe de 6ème A	*Classe 6ème B*
Nb total d'élèves dans la classe	35	28
Nb d'élèves qui ont eu la moyenne	25	24

Le but est de savoir qui de la 6ème A ou de la 6ème B a le mieux réussi ce contrôle commun.

- Combien d'élèves ont eu la moyenne en 6ème A ? 25 Combien en 6ème B ? 24

Donc Nombre d'élèves ayant la moyenne en 6ème A > Nombre d'élèves ayant la moyenne en 6ème B.

Peut-on en déduire que la 6ème A est meilleure que la 6ème B ? Bien sûr que *non !*

Pourquoi non ? Expliquez. *Il faut tenir compte du nombre d'élèves dans chaque classe !*

- Analyse des résultats :

En fait, on ne peut pas juste comparer les nombres 25 et 24 dans l'absolu, c-à-d sans tenir compte du nombre total d'élèves dans chaque classe (35 en 6ème A et 28 en 6ème B).

Il faut d'abord, pour chaque classe, trouver une manière d'écrire que seulement une partie du total des élèves a eu la moyenne.

Comment faire ? Oh la la, c'est vraiment trop dur les maths ? Meuhh non !

Meuh meuh non ! Lisons bien :

« En 6ème A, 25 élèves ont eu la moyenne. La classe compte au total 35 élèves. ». Cela signifie que :

25 élèves *sur* le total des 35 élèves ont la moyenne. Ce qui correspond à la fraction : $\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ F.I !

Alors qu'en 6ème B, 24 élèves *sur* le total des 28 élèves ont eu la moyenne. Ce qui correspond à la fraction : $\frac{24}{28}$ $= \frac{6}{7}$ F.I !

Finalement, après avoir comparé ces 2 fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{7}$, la classe qui a le mieux réussi est la 6ème B

Certaines fractions permettent donc de faire des comparaisons.

A. Proportion ou rapport de comparaison :

- Dans l'activité précédente, la fraction $\frac{25}{35}$ qui permet de comparer le nombre d'élèves en 6ème A ayant la moyenne avec le nombre total d'élèves en 6ème A s'appelle une **proportion ou rapport de comparaison.**

Autrement dit :

$\frac{25}{35}$ est la proportion du nb d'élèves ayant eu la moyenne par rapport au nb total d'élèves dans la classe.

$\frac{25}{35}$ est le rapport de comparaison entre le nb d'élèves ayant la moyenne et le nb total d'élèves dans la classe.

Définition : **Une fraction qui permet de faire une comparaison s'appelle une Proportion.**

Formule : **Proportion d'une Quantité n par rapport à une Quantité d** $= \dfrac{\textbf{Quantité n}}{\textbf{Quantité d}}$

➢ Méthode sur un exemple : Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles. Par Analyse-Synthèse, on a :

$$\text{Proportion de filles dans cette classe} = \frac{\text{Nombre de filles}}{\text{Nombre total d'élèves dans la classe}} = \frac{12}{30} = \frac{\boldsymbol{6}\times 2}{\boldsymbol{6}\times 5} = \frac{2}{5}\ \text{F.I !}$$

Autrement dit, sur 5 élèves dans cette classe, 2 sont des filles.

Remarque : Les proportions sont *souvent (mais pas toujours !)* des quotients plus petits que 1 car on cherche souvent à comparer une partie par rapport à un ensemble qui est plus grand que cette partie.

Exemples : Proportion de bacheliers parmi la population totale $= \dfrac{\text{Nombre de bacheliers}}{\text{Nombre total de personnes}}$

Proportion de votes nuls parmi tous les votes exprimés $= \dfrac{\text{Nombre de votes nuls}}{\text{Nombre total de votes exprimés}}$

B. Proportions et pourcentages :

➢ Pour faciliter les comparaisons, il vaut mieux parfois tout rapporter (comparer) à une même base (un même nombre) : la base 100 ! C'est pourquoi les proportions sont souvent exprimées en pourcentages (%).

Formule bis : $\left\{\begin{array}{c}\text{Proportion } \textbf{\textit{en pourcentage (\%)}} \\ \text{d'une Quantité n par rapport à une Quantité d}\end{array}\right\} = \dfrac{\text{Quantité n}}{\text{Quantité d}} \times \boldsymbol{100}$

Autrement dit : On obtient la proportion ***en %*** *en multipliant simplement la proportion « classique » par le nombre* ***……..***

➢ Méthode sur un exemple : En reprenant l'exemple plus haut, on obtient par Analyse-Synthèse :

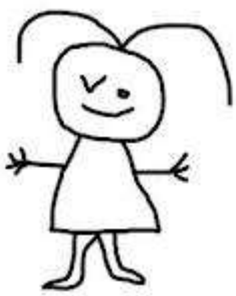
$$\text{Proportion de filles dans cette classe } \textbf{\textit{(en \%)}} = \frac{\text{Nombre de filles}}{\text{Nombre total d'élèves dans la classe}} \times \boldsymbol{100}$$

$$= \frac{12}{30} \times 100$$

$$= \frac{12 \times 10\cancel{0}}{3\cancel{0}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{3} \times 4 \times 10}{\boldsymbol{3}}$$

$$= 40\ \%$$



Le pourcentage de filles dans la classe est de 40 %. (2/5 est donc égal à 40 %)

C. Exercices sur les proportions :

❶ Dans une école de 99 élèves, la proportion de garçons est de $\dfrac{6}{11}$ (c-à-d « Sur 11 élèves, il y a 6 garçons. »).

1) Calculer le nombre de garçons puis le nombre de filles.

Nb de garçons $= \dfrac{6}{11}$ du nb total d'élèves

$= \dfrac{6}{11} \times 99$

$= \dfrac{6 \times 9 \times 11}{11}$

$=$ 54 garcons

Il y a 54 garçons dans cette école.

Nb de filles dans cette école = 99 – 54 = 45 filles

Il y a 45 filles dans l'école.

2) Calculer la proportion de filles dans cette école.

Proportion de filles $= \dfrac{\text{Nb de filles}}{\text{Nb total d'élèves}}$

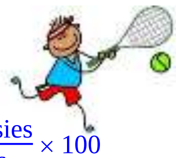
$= \dfrac{9 \times 5}{11 \times 9}$

$= \dfrac{5}{11}$

Sur 11 élèves, il y a 5 filles.

Remarque : On s'attendait à ce résultat car la proportion de filles est le complémentaire de la proportion de garçons :

c-à-d $1 - \dfrac{6}{11} = \dfrac{5}{11}$.



❷ A l'entraînement, Bill Boulé a réussi 16 balles au premier service sur 25. Tom Eigery en passe 13 sur 20.

Calculer pour chacun le pourcentage de réussite au 1^er^ service (Analyse-Synthèse). Qui a le mieux servi ?

Pourcentage réussite 1er service $= \dfrac{\text{Nb de balles réussies}}{\text{Nb total d'essais}} \times 100$

$= \dfrac{16}{25} \times 100$

$= \dfrac{16 \times 4 \times 25}{25}$

$= 64\ \%$

Bill réussit 64 % de ses premiers services.

Pourcentage réussite 1er service $= \dfrac{\text{Nb de balles réussies}}{\text{Nb total d'essais}} \times 100$

$= \dfrac{13}{2\cancel{0}} \times 10\cancel{0}$

$= \dfrac{13 \times 2 \times 5}{2}$

$= 65\ \%$

Tom réussit 65 % de ses premiers services.

Puisque 64 % < 65 %, Tom sert mieux que Bill.

❸ Après avoir indiqué s'il s'agit de situation de répartition ou d'évolution, traduire les 5 pourcentages suivants :

⚠ les mots « pourcentage » et « pourcent », le signe « % » et les fractions sont interdits dans l'explication !

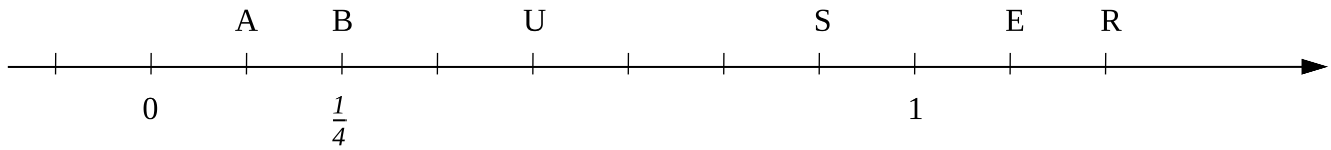
⚠ un pourcentage a une signification bien différente suivant qu'on a une situation de répartition ou d'évolution.

*Situation de répartition : dans ce cas le pourcentage représente une partie de quelque chose et s'explique de la façon suivante : « **Sur** 100 (le total), **il y a** (la partie). »*

*Situation d'évolution : dans ce cas le pourcentage représente un changement et s'explique de la façon suivante : « **Pour** 100 (au départ), (changement), on obtient (au final). »*

• « Beurre à 84 % de matière grasse. »	« J'ai confiance en ce qu'il dit à 25 %. »	« 30 % moins cher. »	« 15 % plus lourd. »
Situation de répartition.	*Situation de répartition.*	*Situation d'évolution.*	*Situation d'évolution.*
Sur un total de 100 grammes de beurre, il y a 84 grammes de matière grasse.	Sur un total de 100 fois où il parle, j'ai confiance 25 fois. Attention : on ne peut pas dire sur 100 paroles ou mots car les fois où l'on parle ne sont pas constituées du même nb de mots ou de paroles.	Pour un prix de 100 € au départ, celui-ci baisse de 30 € pour attendre au final 70 €.	Pour une masse de 100 kg au départ, celle-ci augmente de 15 kg pour attendre au final 115 kg..
• « Il y a 55 % d'eau dans ce jus de fruit ! »			
Situation de répartition.			
Sur un total de 100 cl de jus de fruit, il y a 55 cl d'eau.			

❹



1. Quelle est l'abscisse du point E (sous forme fractionnaire) ? $\frac{9}{8}$ Placer le point B (1/4). $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$
2. On veut maintenant comparer la longueur SR à la longueur AS.

<u>Méthode :</u> *On veut comparer la longueur SR (3 parties) par rapport à la longueur AS (6 parties). On peut donc écrire* :

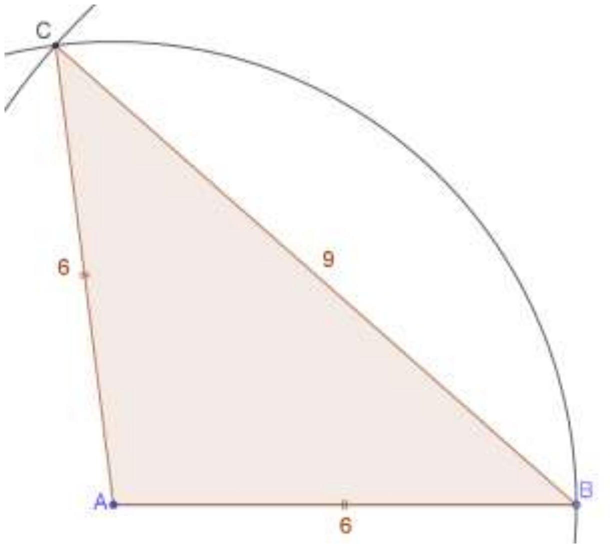
$$SR = \frac{3}{6} AS = \frac{1}{2} AS \quad \textit{(après simplification !)}$$

En effet, la fraction $\frac{3}{6}$ représente la proportion de la longueur SR par rapport à (comparée à) la longueur AS.

A vous maintenant ! Comparer : $AB = \frac{1}{3}\ AU$ $AU = \frac{3}{1}\ AB = 3\ AB$ $SE = \frac{2}{8}\ BR = \frac{1}{4}\ BR$

❺ Soit un triangle ABC isocèle en A tel que AB = 60 cm et BC = 90 cm.

1. Construire le triangle ABC. Echelle : 1 cm sur la figure pour 10 cm réels. Croquis d'abord !
2. Calculer le périmètre du triangle ABC.
3. Calculer le périmètre d'un triangle EFG qui serait la réduction au 2 tiers du triangle ABC.
4. Construire ce triangle EFG. Echelle : 1 cm sur la figure pour 10 cm réels. Croquis d'abord !



2. $\mathscr{P}$(triangle ABC) = AB + BC + CA = 60 + 90 + 60 = 210 cm

3. $\mathscr{P}$(triangle EFG) $= \frac{2}{3}$ du $\mathscr{P}$(triangle ABC)

$$= \frac{2}{3} \times 210$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 70}{3}$$

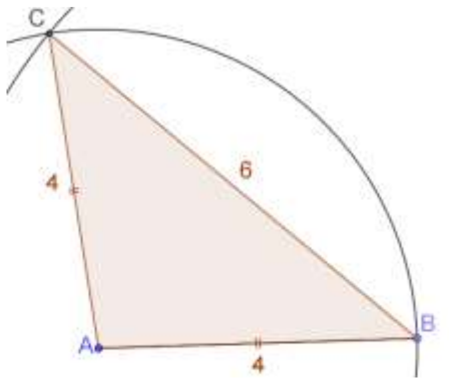
$$= 140 \text{ cm}$$

4. Il faut d'abord calculer les longueurs du triangle EFG :

EF $= \frac{2}{3}$ de AB $= \frac{2}{3} \times 60 = \frac{2 \times 3 \times 20}{3} = 40$ cm.

Puisque ABC isocèle en A, alors EFG isocèle en E, donc EG = EF = 40 cm.

FG $= \frac{2}{3}$ de BC $= \frac{2}{3} \times 90 = \frac{2 \times 3 \times 30}{3} = 60$ cm.



V. REVISIONS : CONTROLES 2008 ET 2012.

➢ <u>Exercice n° 1 (………………… / 6 pts)</u> : Calculer en colonnes (résultat : entier ou fraction irréductible).

$$18 \times \frac{2}{27} = \frac{9 \times 2 \times 2}{9 \times 3} = \frac{4}{3} \text{ F.I.}$$

$$\frac{5}{7} \text{ de } 14 \text{ kg} = \frac{5 \times 2 \times 7}{7} = 10 \text{ kg}$$

$$\frac{77 \times 15}{55} = \frac{7 \times 11 \times 5 \times 3}{5 \times 11} = 21$$

$$\text{Le tiers de } 33 \text{ km} = \frac{1 \times 3 \times 11}{3} = 11 \text{ km}$$

$$\frac{8}{25} \times 35 = \frac{8 \times 7 \times \mathbf{5}}{5 \times \mathbf{5}} = \frac{56}{5} \text{ F.I.}$$

$$15\ \% \text{ de } 30\ € = \frac{15}{100} \times 30 = \frac{\mathbf{5} \times 3 \times 3 \times \mathbf{10}}{\mathbf{5} \times 2 \times \mathbf{10}} = \frac{9}{2}\ € \text{ F.I.}$$

➢ <u>Exercice n° 2 (…………………..…… / 4 points)</u> : Expliquer les pourcentages et proportions suivants.

⚠ les mots « pourcentage » et « pourcent », le signe « % » et les fractions sont interdits dans l'explication !

⚠ un % ou une proportion a une signification bien différente suivant qu'on a une situation de répartition ou d'évolution.

*Situation de répartition : dans ce cas le pourcentage représente une partie de qqchose et s'explique de la façon suivante : « **Sur** 100 (le total), **il y a** (la partie). »*

*Situation d'évolution : dans ce cas le pourcentage représente un changement et s'explique de la façon suivante : « **Pour** 100 (au départ), (changement), on obtient (au final). »*

1. « 15 % de coton ». (……………… / 1 pt) *Situation de répartition.*

Sur un total de 100 grammes de matière, il y a 15 grammes de coton.

2. « 30 % plus cher ». (………………… / 1 pt) *Situation d'évolution.*

Pour un prix de 100 € au départ, celui-ci augmente de 30 € pour attendre au final 130 €.

3. « A la cantine, $\frac{2}{5}$èmes de la nourriture est jetée. ». (…………………… / 1 pt) *Situation de répartition.*

Sur un total de 5 kg de nourriture servie à la cantine, 2 kg sont jetés ! inacceptable !

4. « Une note en Maths de $\frac{19}{22}$. ». (……..……………… / 1 pt) *Situation de répartition.*

Sur un total de 22 points, le nb de points obtenu est de 19.

5. « En Afrique subsaharienne, le nombre de personnes sous le seuil d'extrême pauvreté a augmenté de près de 40 % entre 1990 et 2013. » *Situation d'évolution.*

Pour 100 personnes sous le seuil d'extrême pauvreté en Afrique subsaharienne en 1990,
ce nombre a augmenté de 40
pour atteindre 140 personnes sous le seuil d'extrême pauvreté en Afrique subsaharienne en 2013 !!!!!!

- Situation 1 : Un grand merci pour tout ce que vous faîtes. Contrôle 2012.

Un professeur enseigne les Mathématiques avec amour, sans ménager sa peine, dans 2 classes de Sixième : la 6ème A qui compte 26 élèves et la 6ème B qui en compte 25.

Il a remarqué que lors de la distribution d'un document, 9/13 des élèves de 6ème A ne disaient pas « Merci. » ! En 6ème B, ce n'est pas mieux : 17 élèves ne sont pas plus polis.

1. Combien d'élèves ne remercient pas en 6ème A ? Analyse-Synthèse.
2. Pour faire prendre conscience de ce problème de politesse, le professeur a demandé aux élèves de calculer la proportion (*en pourcentage*) des élèves de 6ème B qui ne disent pas « Merci. ».

   Voici rassemblées dans le tableau ci-dessous toutes les réponses proposées par la classe de 6ème B :

Réponses proposées par les élèves de 6èmeB	① 25×17	② $\frac{17}{25} \times 100$	③ $25 - 17$	④ $\frac{17}{25}$
Nb d'élèves de 6èmeB ayant choisis cette réponse	2	10	12	1

   a. Une seule des 4 réponses proposées est complètement absurde, laquelle et pourquoi ?
   b. Une seule des 4 réponses proposées est incomplète, laquelle et pourquoi ?
   c. $25 - 17 =$ ……. Que représente ce résultat ?
   d. Calculer le pourcentage d'élèves de 6ème B qui ont donné la bonne réponse au calcul demandé par le professeur. Analyse-Synthèse.

Voir corrigé contrôle 2012.

➢ (Situation 2 (…………………..… / 2 points) : Proportion désastreuse.)

En septembre 2007, comme chaque année, l'Union Mondiale pour la Nature (www.uicn.fr) publie la liste rouge des espèces menacées. Le tableau est alarmant !! Sur les 40 000 espèces animales ou végétales mises sous surveillance par l'UICN, 16 000 à peu près sont menacées de disparaître : ainsi ces magnifiques espèces que sont le tigre, l'orang outang de Sumatra, le gorille, la panthère des neiges, ou le requin blanc sont en voie d'extinction. La principale cause de ce désastre est l'homme qui détruit de manière incontrôlée, chaque jour un peu plus, les différents écosystèmes.

Quelle est le pourcentage d'espèces menacées de disparition ? **Analyse-Synthèse !** Ce pourcentage est-il en augmentation ?

Voir corrigé contrôle 2008.

➢ (Situation 3 (…………………… / 3 pts) : Maigrir en pourcentage.)

Sharky

Comme toutes les grandes espèces de requins, le requin tigre est aussi hélas une espèce menacée. Faisons tout de même connaissance avec Sharky, un beau spécimen de 600 kg. Sharky est un peu trop gourmand ! Ainsi donc, il décide de faire un peu plus attention à sa ligne pour retrouver l'allure svelte et élégante qui caractérise tous les requins tigre de la planète ! Il perdra ainsi 15 % de son poids initial en un an.

1. Calculer la perte de poids de Sharky. (……………… / 1,5 pts) **Analyse-Synthèse !**
2. Quel est son poids final ? (……..………….. / 1 pt) **Analyse-Synthèse !**
3. En fait, Sharky avait utilisé une crème amincissante aux algues.
   Voici ce qu'on pouvait lire sur l'étiquette. Qu'en pensez-vous ? (…….………….. / 0,5 pts)
4. Calculer le pourcentage d'erreur de l'étiquette par rapport au poids final réel (arrondi à l'unité). **Analyse-Synthèse !**

Spécial Requin Tigre :
-15 % de poids en 1 an !!
Ex : Passez de 600 kg à 500 kg en 1 an à peine !

Voir corrigé contrôle 2008.

4. Pourcentage d'erreur $= \dfrac{\text{erreur de poids}}{\text{poids final réel}} \times 100$

$$= \frac{510 - 500}{51\cancel{0}} \times 10\cancel{0}$$

$$= \frac{100}{51}$$

$$\approx 2\ \%$$

Le pourcentage d'erreur entre l'étiquette et le poids final réel est d'environ 2 %.

VI. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

- **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 6ème, Multiplication et fractions-Proportionnalité).**
- **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin.**

A. Conseils :

- Calculs :

• **La simplification des fractions et les tables de multiplication sont les points noirs de ce contrat !**

• Connaître ses tables de multiplication sur le bout des doigts, surtout le sens qui permet de décomposer un nombre en produit de facteurs.

• Savoir simplifier correctement et sans hésitation une fraction. Exemple : $\frac{\boldsymbol{3} \times 3 \times 2}{\boldsymbol{3} \times 7} = \frac{3 \times 2}{7}$ et non $\frac{2}{7}$!

• Simplifier directement les paires de zéros en les barrant.

- Situations :

• Bien lire l'énoncé, utiliser de la couleur.

• Utiliser la méthode « Analyse – Synthèse » vue en classe.

• Les mots « de » « du » « des » « d' » entre une fraction et une quantité sont remplacés par un signe de multiplication.

• Une proportion est une fraction qui permet de faire une comparaison.

B. Erreurs à ne pas faire :

- Calculs :

S'amuser à faire les multiplications dans les écritures de type « $\frac{a \times b}{c}$ » au lieu de décomposer pour pouvoir simplifier !

- Situations :

Oublier qu'une proportion ou un pourcentage n'opère jamais seul, mais en relation avec une quantité.

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? Symétrie axiale.

Perle du Bac 2006 : « La Terre tourne en rond dans un sens et en travers dans l'autre sens. »

Perle du Brevet 2012 : « La Première Guerre mondiale se passe en deux ans, de 1914 à 1918... »

Perle du Brevet 2010 : « Au front, les soldats mourraient vivants. »

Perle du Bac 2011 : « Les Français dépensent toujours plus pour leurs compagnons à quatre pattes : chiens, chats, oiseaux, poissons... »