CORRIGE VALEURS APPROCHEES D'UN NOMBRE

"Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs."

Jacques Prévert[1].

« Correction en rouge et italique. »

- Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Nombres entiers et décimaux : définitions, écriture.			
Nombres entiers et décimaux : les 4 opérations et propriétés.			
Calcul mental.			
Comparaison des nombres décimaux.			

[1] Jacques Prévert (1900-11/4/1977) : Poète et scénariste français.

Après le succès de son premier recueil de poèmes, Paroles, il devint un poète populaire grâce à son langage familier et ses jeux de mots. Ses poèmes sont depuis lors célèbres dans la Francophonie et massivement appris dans les écoles françaises. Il a également écrit des scénarios pour le cinéma.

NOM et Prénom : ………………………………………………….. 6ème ……

I. ORDRE DE GRANDEUR.

A. Définition :

Il est souvent utile de remplacer un nombre par une valeur approchée à l'écriture plus simple (avec plus de zéros) afin de simplifier les calculs et ainsi avoir une idée du résultat.

Cette valeur approchée s'appelle aussi un ordre de grandeur.

Notation : On utilise le signe « ≈ » (à peu prés égal) lorsqu'on écrit une valeur approchée. Ex : 151,2 ≈ 150

Remarque : *L'ordre de grandeur n'est pas unique* : on peut donner des ordres de grandeurs différents suivant la précision voulue. C'est pourquoi on dit **UN** ordre de grandeur et non L'ordre de grandeur !

B. Trois exemples :

① Convertissez 1 € en Francs Français (FF) : 1 € = *6,55957* FF. Pas pratique pour les calculs !

Pour faciliter les conversions mentales, on peut prendre comme ordre de grandeur 6 FF pour 1 €.

Et on note 1€ ≈ 6 FF. A combien de FF sont à peu prés égaux 7€ ? 7€ ≈ 42 FF (= 7 × 6)

② La superficie de la France est de 549 192 km^2. ⇒ Ordre de grandeur : *550 000* km²

③ Dans les classes de 6ème, il y a 78 élèves. ⇒ Ordre de grandeur : *80* élèves.

Dans les classes de 5ème, il y a 81 élèves. ⇒ Ordre de grandeur : *80* élèves.

Dans les classes de 4ème, il y a 79 élèves. ⇒ Ordre de grandeur : *80* élèves.

Pour avoir un ordre de grandeur des 3 niveaux, on peut ajouter les ordres de grandeur de chaque niveau.

Donc un ordre de grandeur pour le collège sera de *240 élèves.*

C. Exercices sur les ordres de grandeur :

① Une entreprise commande 25127 sucettes pour récompenser ses 4985 salariés !

- Trouvez un ordre de grandeur simple pour le nb de sucettes puis pour le nb de salariés.

25 127 sucettes ≈ 25 000 sucettes 4 985 salariés ≈ 5 000 salariés.

- Le patron décide donc de distribuer 3 sucettes par salarié. Le patron est-il généreux et juste ? Justifiez !

On va calculer le nb de sucettes que chaque personne devrait recevoir en utilisant les ordres de grandeur trouvés auparavant.

$$\text{Nb de sucettes par personnes} = \frac{\text{nb total de sucettes}}{\text{nb de salariés}} \approx \frac{25\,000}{5\,000} \approx 5$$

Le patron aurait dû distribuer 5 sucettes. Il a donc garder tout un lot de sucettes pour lui !

Il est facile de calculer combien de sucettes il a gardé pour lui.

② Anne Bonaide a oublié de mettre la virgule dans les résultats des opérations suivantes.

<u>Sans calculette</u>, mais en prenant un ordre de grandeur pour les 2 termes de chaque l'opération, replacer la virgule au résultat.

$987 \times 19{,}731 = 19474497$ $\qquad 1{,}07 \times 5{,}987 = 640609$ $\qquad \dfrac{795}{109{,}6} \approx 725$ $\qquad \dfrac{100\,214}{9\,879} \approx 101441$

$987 \times 19{,}731 \approx 1\,000 \times 20 = 20\,000$ donc $987 \times 19{,}731 = 19474{,}497$

$1{,}07 \times 5{,}987 \approx 1 \times 6 = 6$ donc $1{,}07 \times 5{,}987 = 6{,}40609$

$\dfrac{795}{109{,}6} \approx \dfrac{800}{100} = 8$ donc $\dfrac{795}{109{,}6} \approx 7{,}25$

$\dfrac{100\,214}{9\,879} \approx \dfrac{100\,000}{10\,000} = 10$ donc $\dfrac{100\,214}{9\,879} \approx 10{,}1441$

③ Sachant que le produit suivant doit être proche de 10 000, replacer la ou les virgules dans les nombres :

$209725 \times 51248 = 107479868$ Expliquez votre raisonnement.

Puisque le résultat est environ 10 000, il y a une virgule entre le 7 et le 9 dans 107479868 : 10 747,9868

Arrondissons grossièrement les 2 termes : $209\,725 \approx 200\,000$ et $51\,248 \approx 50\,000$

Or 10 000, c'est $2 \times 5\,000$ donc le calcul de départ est $2{,}09725 \times 5\,124{,}8$

ou bien 10 000 c'est 20×500 donc le calcul de départ est $20{,}9725 \times 512{,}48$

ou bien 10 000 c'est 200×50 donc le calcul de départ est $209{,}725 \times 51{,}248$

ou bien 10 000 c'est $2\,000 \times 5$ donc le calcul de départ est $2\,097{,}25 \times 5{,}1248$.

Remarque : C'est cette méthode qui permet de contrôler rapidement un résultat et voir si on n'a pas fait une grosse erreur de calcul ou d'étourderie.

II. TRONCATURE[2].

La troncature est une valeur approchée (ordre de grandeur) un peu spéciale :

A. Définition :

- La troncature à l'unité d'un nombre décimal est ***la partie entière*** de ce nombre.
- La troncature à la dizaine ou à la centaine ou au dixième ou au centième etc. d'un nombre, est ce nombre « coupé » après le chiffre correspondant, les chiffres venant après étant remplacés par des 0.

<u>Quatre exemples</u> : 35,65 a pour troncature à l'unité 35. La troncature à la dizaine de 52 est 50.

$0{,}0254 \approx 0{,}02$ troncature au centième. La troncature au millier de 871 est 0000.

B. Exercice sur la troncature :

La troncature à l'unité de 7,25 est *7.* La troncature à l'unité de 0,32est *0.*

La « troncature au centième de 5,542 » est *5,54.* Tronquez à l'unité 250 : *250 !*

Quelle est la troncature à la centaine de 100,25 ? *100 !* Et celle de 99,25 ? *000 !*

Donner deux nombres dont la troncature à l'unité est 20 : *20 ou 20,58 par exemple.*

Donner deux nombres dont la troncature à la dizaine est 20 : *20,2 ou 29 par exemple.*

[2] Cherchez dans un dictionnaire ce que veut dire le verbe tronquer. *Couper.*

III. ARRONDI A L'UNITE.

A. Définition et règle pour l'arrondi à l'unité :

- Lorsque le chiffre des dixièmes est compris entre 0 et 4 inclus, l'arrondi à l'unité est l'entier immédiatement inférieur.
- Lorsque le chiffre des dixièmes est compris entre 5 et 9 inclus, l'arrondi à l'unité est l'entier immédiatement supérieur.

Exemples :

L'arrondi à l'unité de 1,27 est soit 1 soit 2. C'est 1 car 1,27 est le plus proche de 1 que de 2.

L'arrondi à l'unité de 10,57 est soit 10 soit 11. C'est 11 ! car 10,57 est plus proche de 11 que de 10.

B. Exercices sur les arrondis :

① L'arrondi à l'unité de 2,95 est *soit 2 soit 3 : c'est 3 !*

L'arrondi à l'unité de 25,07 est *soit 25 soit 26 : c'est 25 !*

Donner deux nombres dont l'arrondi à l'unité est 2. *1,8 ou 2 ou 2,499*

Généralisation : Par exemple, pour arrondir au centième, on applique la règle de l'arrondi à l'unité en regardant cette fois ci le chiffre des millièmes.

Deux exemples :

- L'arrondi au centième de 2,254 est soit 2,25 soit 2,26. En fait, c'est 2,25 car le chiffre des millièmes dans 2,254 est 4 (donc entre 0 et 4). Dit autrement, 2,254 est plus proche de 2,25 que de 2,26.
- L'arrondi à la dizaine de 1258 est soit 1250 soit 1260. Puisque 1258 est plus proche de 1260 que de 1250, l'arrondi à la dizaine de 1258 est 1260.

② L'arrondi au dixième de 0,245 *est soit 0,2 soit 0,3 : c'est 0,2*.

L'arrondi au millième de 0,0476 est soit *0,047 soit 0,048 : c'est 0,48.*

L'arrondi à la centaine de 525,68 *est soit 500 soit 600 : c'est 500.*

L'arrondi à la dizaine de 255 est soit *250 soit 260 : c'est 260.*

Arrondi au centième de 100,245 = *100,25* Arrondi au centième de 1 ? *1 !*

③ Remplissez ce tableau :

	0,06	5,7	14,25
Troncature à l'unité	*0*	*5*	*14*
Arrondi à l'unité	*0*	*6*	*14*
Troncature au dixième	*0,0*	*5,7*	*14,2*
Arrondi au dixième	*0,1*	*5,7*	*14,3*

④ Valeurs approchées et calculatrice :

Grâce à votre calculatrice, donnez une écriture décimale approchée de $\frac{2\,500}{137}$ c-à-d $\frac{2\,500}{137} \approx$ *18,248175.*

On utilise la valeur approchée de $\frac{2500}{137}$ donnée par la calculatrice pour répondre aux questions.

Déduisez en un encadrement au $\frac{1}{100}$ ème de $\frac{2\,500}{137}$: $18{,}24 < \frac{2\,500}{137} < 18{,}25$

Donnez la troncature à la dizaine de $\frac{2\,500}{137}$: *10* *On « coupe » le nombre après le chiffre des dizaines et on rajoute des 0.*

Donnez l'arrondi au centième de $\frac{2\,500}{137}$: *18,25* *18,248175 est plus proche de 18,25 que de 18,24.*

Donnez une valeur approchée à la dizaine par excès de $\frac{2\,500}{137}$: *20*

Donnez une valeur approchée au $\frac{1}{1000}$ ème par défaut de $\frac{2\,500}{137}$: *18,248* *C'est la troncature au $\frac{1}{1000}$ ème.*

IV. VALEURS APPROCHEES : EXERCICES RECAPITULATIFS.

A faire sur votre cahier d'exercices : les exercices (entre parenthèses) sont facultatifs.

⑤ N°(82)-84-88-99 p.17 à 19 Livre Magnard Maths 6ème édition 2005.

- *N°82 p.17 : Valeurs approchées, encadrements.*

On va organiser les réponses sous forme de tableaux : un pour les encadrements à l'unité, un autre pour les valeurs approchées au dixième.

Encadrements « à l'unité » c-à-d Encadrement par 2 entiers consécutifs (qui se suivent).
$0 < 0{,}986 < 1$
$882 < 882{,}3 < 883$
$43 < 43{,}267 < 44$
$129 < 129{,}8 < 130$

Valeur approchée au dixième par défaut	Nombre	Valeur approchée au dixième par excès
0,9	0,989	1,0
882,3	882,3	882,4
43,2	43,267	43,3
129,8	129,8	129,9

- *N°84 p.17 : Lecture de graphique et valeurs approchées.*

1. Le chiffre d'affaires (la somme de tout ce qui a été vendu) le plus élevé correspond au point le plus haut de la courbe.

Le chiffre d'affaires le plus élevé a été de 10,824 centaines de millions d'euros en 1998 soit un peu plus de 1 milliard d'euros

Remarque : il a été d'à peu près 1 milliard d'euros en 2006.

2. Le chiffre d'affaires le plus bas correspond au point le plus bas de la courbe.

Cela s'est passé en 1990, le chiffre d'affaires a été alors de 6,067 centaines de millions d'euros.

3. Ordre croissant = de la plus petite à la plus grande valeur.

Suivant le chiffre d'affaires croissant, les années se rangent ainsi :

1990-1993-1994-1992-2001-1991-1996-1999-1998-2000-1995-1998.

4. On veut un arrondi à l'unité près en millions d'euros donc on doit d'abord convertir les chiffres d'affaires en millions d'euros (on multiplie donc par 100) puis on arrondit à l'unité le résultat obtenu.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Chiffre d'affaires (en centaines de millions d'€)	6,067	8,948	7,318	6,708	7,012	10,67	9,452	9,909	10,824	9,76	10,06	8
Valeur approchée au million d'€ près	607	895	732	671	701	1067	945	991	1082	976	1006	800

- N°88 p.17 : Moyenne et valeurs approchées.

Nom de l'élèves	Moyenne	Arrondi à l'unité	Erreur d'arrondi (en %)	Troncature à l'unité	Erreur de troncature (en %)
Jim	10,83	11	0,85	10	4,15
Franck	10,54	11	2,3	10	2,7
Khaled	10,26	10	1,3	10	1,3

D'après ce tableau, en lisant les 2 colonnes d'erreur d'arrondi et d'erreur de troncature, que l'arrondi à l'unité cause moins d'erreurs d'approximation que la troncature à l'unité.

En fait, il est toujours plus précis de prendre l'arrondi à l'unité !

En effet, lorsque la partie décimale de la note est comprise entre 0 et 0,5 (exclu), l'arrondi à l'unité et la troncature à l'unité coïncident et au pire, une erreur de 0,5 points sera commise.

Mais lorsque cette partie décimale est comprise entre 0,5 et 0,99 , l'arrondi et la troncature ne coïncident plus. L'erreur pour l'arrondi est au pire de 0,5 points alors que l'erreur pour la troncature est au pire de 0,99.

Mathématiquement, pour des notes sur 20, on montre que l'erreur moyenne d'arrondi à l'unité est de 1,25 % et que l'erreur moyenne de troncature à l'unité est de 2,5 %.

- N°99 p.19 :

1. Le signe « = » pose beaucoup de problèmes aux élèves car il a plusieurs significations en Mathématiques.

Il peut vouloir dire :

  - « a la même valeur que » : c'est le cas dans l'expression « 2 + 3 = 5 ».
  - « est identique à » : c'est le cas dans l'expression « 2x + 3x = 5x ». En effet, quelque soit la valeur donnée à x, 2x + 3x donne toujours le même résultat que 5x. (à voir en 5ème)
  - « quand est-ce que ce qui est à gauche du signe = vaut-il ce qui est une droite à droite du signe = ? » : c'est le cas dans l'expression « 2x + 3 = 5 ». Cette égalité pose la question : pour quelle valeur de x, 2x + 3 vaut-il 5 ?

  Le signe « = » a alors valeur de question. Cette expression s'appelle une Equation. (à voir en 4ème)

Dans notre exercice, le signe « = » dans « 10 g = 1 carré » peut être remplacé par le mot « pèse » ou « correspond à ». Ce n'est aucun des 3 sens mathématiques du signe « = » vus plus haut, donc je n'accepterai aucunement ce genre d'écriture, non mais !

C'est comme si pour Aïbo, mon chat qui pèse 5 kg, on écrivait Aïbo = 5 kg !! Erreur d'écriture classique des élèves.

En fait, en étant plus précis, on peut corriger en écrivant poids de Aïbo = 5 kg et là c'est juste. Soyez donc précis !

2. *Unité de masse : g = gramme mg = milligramme (1 millième de gramme)*

   Unité d'énergie : kJ = kilojoule (1 millier de Joule)

   Kcal = kilocalorie (1 millier de calories), unité beaucoup utilisée en diététique. 1 calorie = 4,184 Joules

3. *L'entête de dernière colonne nous indique que 1 carré de chocolat pèse 10 g. On suppose donc que la dernière colonne donne les informations pour 1 carré de chocolat.*

Or 10 g est 10 fois plus petit que 100 g donc, par proportionnalité, on trouve les autres nombres de cette dernière colonne en divisant par 10 la 2ème colonne. Par exemple $\frac{2\,334 \text{ kJ}}{10} = 233{,}4 \text{ kJ}$.

Mais ce n'est pas 233,4 qui est inscrit mais 233. Que peut bien représenter 233 pour 233,4 ? Une valeur approchée plus simple évidemment ! On hésite donc entre la troncature à l'unité et l'arrondi à l'unité.

La réponse se lit dans la ligne des lipides : $46{,}9 \rightarrow 4{,}69 \rightarrow 4{,}7$ *C'est forcément l'arrondi !!*

En résumé, pour obtenir les résultats de la 3ème colonne, on divise les valeurs de la 2ème colonne par10 puis on arrondit à l'unité.

⑥ <u>N°35-(39)-40 p.35 et 36 Livre Magnard Maths 6ème édition 2005.</u>

- ***N°35 p.35 : Ordre de grandeur et calculs.***

1. $82 \approx 80$ et $1{,}9 \approx 2$ donc $82 \times 1{,}9 \approx 80 \times 2$

   $82 \times 1{,}9 \approx 160$ *La phrase est vraie.*

2. $153 \approx 150$ et $89 \approx 90$ donc $153 + 89 \approx 150 + 90$

   $153 + 89 \approx 240$ *La phrase est vraie.*

3. $28{,}68 \approx 30$ et $3{,}2 \approx 3$ donc $28{,}68 \times 3{,}2 \approx 30 \times 3$

   $28{,}68 \times 3{,}2 \approx 90$ *La phrase est vraie.*

4. $56{,}8 \approx 60$ et $9 \approx 10$ donc $56{,}8 \div 9 \approx 60 \div 10$

   $56{,}8 \div 9 \approx 6$ *La phrase est vraie.*

Ce type de raisonnement est très utile pour contrôler et se donner un ordre de grandeur du résultat d'un calcul.

- ***N°39 p.36 :***

Supermarché	prix	valeur approchée
Plante	6,53	10
Charcuterie	12,77	10
Fruits	8,49	10
Légumes	12,41	10
Jusd'orange	8,76	10
Total	68,96	50

Vêtement	prix	valeur approchée
Pantalon	62	60
Pull	28,59	30
Chemise	14,95	15
Chaussures	42,59	40
Total	148,13	145

On voit très rapidement que la première facture ne correspond pas du tout à l'estimation. Il y a donc sûrement une faute dans le total (qui est de 48,96 € exactement).

Pour réaliser ce genre de calculs, il ne faut pas hésiter à simplifier très grossièrement les valeurs. En effet, les valeurs approchées n'ont d'intérêt que lorsqu'elles simplifient énormément les calculs. Ce qu'on perd en précision, on le regagne en rapidité.

- *N°40 p.36 :*

Pour calculer mentalement, il faut que les valeurs soient simples donc on va prendre des valeurs approchées par excès des différents prix :

Prix d'un CD = 24,5 ≈ 25 €

Prix d'un jeu de Tétraplix = 25,54 ≈ 26 €

Prix d'une boîte de crayons = 23,54 ≈ 24 €

Prix total à payer (en €) = 2 × Prix d'un CD + Prix d'un jeu de Tétraplix + Prix d'une boîte de crayons

$$= 2 \times 24,5 + 25,54 + 23,54$$

$$\approx 2 \times 25 + 26 + 24$$

$$\approx 50 + 26 + 24$$

$$\approx 100\ €$$

Comme nous avons approché toutes les valeurs par excès (par des valeurs plus grandes), le prix total à payer est inférieur à 100 € (98,08 € exactement).

Donc un billet de 100 € suffira.