L'INEGALITE TRIANGULAIRE

« La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. »

René Descartes[1]

- Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Construction de triangles à partir de 3 longueurs données.			
Symboles >, < , ≥ , ≤ .			
Comparaisons de quantités.			
Additions, soustractions de fractions.			

[1] **René Descartes** (1596-1650) : Grand mathématicien, physicien et philosophe français, considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne.

Descartes, dont le projet philosophique s'inscrit en réaction au procès de Galilée (1633), eut une influence considérable sur la pensée scientifique, surtout en France. L'impact de cette pensée fut grand car elle toucha à des questions théologiques.

NOM et Prénom : …………………………………………………… *5ème ………*

I. UN GROS CUBE, UN PETIT CUBE...

Sur un vieux lambeau de parchemin datant de l'an 1748, on pouvait lire :

« Barbe rose, notre vieux chef pirate, ordonna d'enterrer le coffre contenant tous les apéricubes à 3 coudées du parasol sur la plage et à 5 coudées du palmier sur la colline.

Et malin comme je suis, je n'ai point oublié de mesurer la distance entre le parasol et le palmier : 9 coudées.

A moi le trésor, à moi les apéricubes ! ». signé Paul Ichinel.

1. Faites un schéma géométrique pour situer le coffre *si possible*.
2. Paul Ichinel le manchot, va-t-il goûter aux délices des apéricubes ? Expliquez.

Finalement, une question complètement existentielle se pose à nous :

« Peut-on toujours, à partir de 3 longueurs quelconques données, construire un triangle ? » …………

Ce petit problème nous amène donc à écrire une condition d'existence sur les longueurs pour les triangles :

« l'Inégalité Triangulaire ».

II. PROPRIETE DIRECTE DE L'INEGALITE TRIANGULAIRE.

A. Propriété directe :

Propriété de l'Inégalité Triangulaire :

	(….. condition ou hypothèse)		(……… résultats ou conclusions)
Quand	ABC est un triangle	alors	$\begin{cases} AB < AC + CB \\ AC < AB + BC \\ BC < BA + AC \end{cases}$

Autrement dit : Dans un triangle, la longueur de chaque côté doit être ………….……….… à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Vocabulaire : Chacune de ces 3 inégalités s'appelle une **inégalité triangulaire**.

Utilité : Cette propriété sert à écrire des inégalités de longueurs dans un triangle.

En fait, cette propriété *n'est pas utilisée en tant que telle* mais plutôt sa **conséquence très importante** :

Conséquence pratique très importante :

	(1 condition ou hypothèse)		(….. résultat ou conclusion)
Quand	$AB \geq AC + CB$ **ou** $AC \geq AB + BC$ **ou** $BC \geq BA + AC$	alors	Le triangle ABC *n'existe pas*.

Autrement dit : Il suffit de vérifier qu'une des trois longueurs soit plus ………..…… que la somme des 2 autres, pour qu'on ne puisse pas tracer le triangle.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'on ne peut pas ……………………….. un triangle.

B. Méthode :

Peut on construire un triangle ABC de longueurs AB = 75 cm ; AC = 43 cm et BC = 31 cm ?

Modèle de rédaction : *On va comparer **la plus grande des 3 longueurs** avec la somme des 2 autres longueurs.*

• D'une part AB = 75 cm.

D'autre part AC + BC = 43 + 31 = 74 cm

• Puisque AB > AC + BC alors le triangle ABC ne peut pas être construit.

C. Applications :

① Peut-on construire un triangle avec les longueurs AB = 187cm ; AC = 21cm ; BC = 209cm ?

② Donner 3 longueurs toutes plus grandes que 50 qui ne peuvent pas être les 3 longueurs d'un triangle.

③ Voici 2 longueurs d'un triangle : $\frac{1}{7}$ et $\frac{5}{21}$.

Quelle doit-être au minimum (strictement) la mesure de la 3ème longueur du triangle ?

III. RECIPROQUE DE L'INEGALITE TRIANGULAIRE

Que se passe-t-il maintenant quand les trois inégalités triangulaires sont vérifiées ?

C'est l'objet de la réciproque de la propriété de l'inégalité triangulaire.

Réciproque de l'inégalité triangulaire :

	(…… conditions ou hypothèses)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	AB < AC + CB **et** AC < AB + BC **et** BC < BA + AC	alors	ABC est un triangle.

Remarque : **Pour que le triangle existe, *il suffit seulement* de vérifier que la plus grande des longueurs soit plus ………………….. que la somme des 2 autres.**

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'on peut ………………….. un triangle.

- Exercice : ④ Peut-on construire un triangle dont les longueurs seraient : $\frac{2}{5}$ cm ; $\frac{7}{10}$ cm ; $\frac{9}{20}$ cm ?

IV. CAS DE L'EGALITE TRIANGULAIRE.

- Que se passe-t-il maintenant quand il y a égalité des 3 longueurs ? Essayez de placer 3 points O, U, et F tels que : OF = 7 cm, OU = 5 cm, UF = 2 cm. Comment semblent être les points O,U, et F ?

Propriété de l'égalité triangulaire :

	(……. condition ou hypothèse)		(……. résultat ou conclusion)
Quand	AC = AB + BC	alors	B ∈ [AC]

Autrement dit : Quand une longueur est égale à la somme des 2 autres, les points sont alignés (attention à l'ordre !).

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un point est sur un …………………………...

Figure : AC = AB + BC ⟹

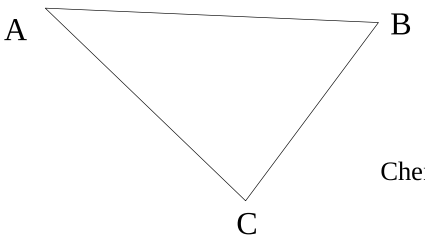
Remarque : La réciproque de cette propriété est aussi vraie : **« Quand C ∈ [AB], alors AB = AC + CB »**

- Exercice : Voici trois longueurs : $MI = \frac{5}{7}$ $MO = \frac{2}{7}$ et $OI = 1$ Les trois points sont ils alignés ?

V. SIGNIFICATION DE L'INEGALITE TRIANGULAIRE.

- N'importe laquelle des 3 inégalités triangulaires peut se traduire de la façon suivante :

Sur une surface plane, le **plus court chemin entre 2 points est le segment reliant ces 2 points !**



$$AB < \underbrace{AC + CB}$$

Chemin en ligne droite. Autre chemin passant par un point C hors de [AB].

- Cette inégalité triangulaire dit aussi qu'il faut **faire très attention avec les longueurs et l'addition** :

En général, AB < AC + CB (cas du triangle).

Il n'y a égalité AB = AC +CB que dans le cas rare où les points A, C et B sont alignés dans cet ordre (C∈ [AB]). Autrement dit **« la longueur de la somme est très rarement égale à la somme des longueurs »** !

En $3^{ème}$, vous verrez un outil appelé « vecteur » tel qu'on aura toujours : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Mais bon, c'est encore loin !

VI. EXERCICES RECAPITULATIFS.

① AB = $\frac{8}{3}$ AC = $\frac{5}{6}$ BC = $\frac{29}{12}$ Comment sont les points A, B et C ?

② Soit FIL un triangle isocèle en L tel que la base mesure 18 cm. Peut-on avoir :

LI = 9,1 cm ?	LI = 9 cm ?	FL = 8,9 cm ?