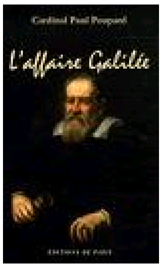
LES TRIANGLES.



« Le livre de la Nature est écrit dans un langage mathématique. » Galilée[1], 17ème siècle.

« Un triangle est un appareil qui sert à faire le triage des angles. » Perle du bac 2005.

I. Angles et triangles quelconques. _____ 2

II. Angles et triangles particuliers. _____ 3

III. Exercices récapitulatifs sur angles et triangles. _____ 6

IV. Droites remarquables du triangle. _____ 7

V. Médiatrices d'un triangle. _____ 8

VI. Médianes d'un triangle. _____ 12

VII. Hauteurs d'un triangle. _____ 12

VIII. Exercices sur les droites remarquables. _____ 12

IX. Pour préparer le test et le contrôle. _____ 13

- *Matériel :* Pour ce cours, vous devez amener votre matériel de géométrie et votre rapporteur en particulier.
- Pré requis pour prendre un bon départ : Voir mon cours de $6^{ème}$ sur les triangles (espace $6^{ème}$ contrats 2 et 4).

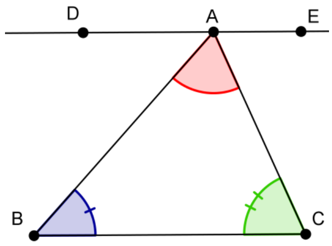
	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Triangle isocèle : Définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est isocèle.			
Triangle équilatéral : Définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est équilatéral.			
Triangle rectangle : Définition, propriétés, savoir prouver qu'un triangle est rectangle.			
Médiatrice d'un segment, **axe de symétrie**.			
Bissectrice d'un angle : Définition, propriété.			
Symétrie centrale et angles : Angles alternes internes, correspondants, opposés.			

[1] Galilée est l'un des plus grands savants de l'Humanité. Il est le père de la physique moderne et fut un grand astronome.
Révoqué par l'Eglise en 1632 pour avoir montré que la Terre tournait autour du Soleil et non l'inverse, il ne fut réhabilité qu'en 1757.

NOM et prénom : …………………………………………………… *$5^{ème}$ ……*

I. ANGLES ET TRIANGLES QUELCONQUES.

A. Somme des mesures des trois angles d'un triangle :



Soit un triangle ABC. On veut connaître la somme des mesures de ses 3 angles.

Pour cela, on a tracé la parallèle (DE) à (BC) et on va faire un travail sur les angles alternes-internes.

1. Matérialiser en bleu l'angle qui est alterne interne à $\widehat{B}$, puis justifier que $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$.

2. Matérialiser en vert l'angle qui est alterne interne à $\widehat{C}$. De la même manière qu'en 1), on montre que $\widehat{BCA} =$ ……….

3. Compléter : « Puisque les 3 angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAE}$ forment un angle ……………..…., alors $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} =$ …………° »

Propriété : **Somme des mesures des 3 angles d'un triangle :**

	(……. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle	alors	$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} =$ ……….°

Autrement dit : Dans n'importe quel triangle, la somme des mesures des 3 angles est égale à celle d'un angle plat : ………°

Utilité : Lorsqu'on sait les mesures de 2 angles dans un triangle, on peut calculer la mesure du 3$^{\text{ème}}$ angle.

B. Comment calculer la mesure inconnue d'un angle dans un triangle ?

Soient $\widehat{A} = 38°$ et $\widehat{B} = 82°$, on veut trouver la mesure inconnue du troisième angle $\widehat{C}$.

Méthode en ……. étapes à suivre rigoureusement :

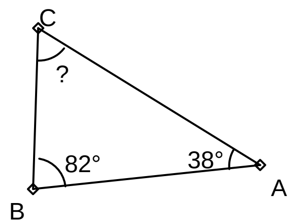
❶ On dessine à main levée un **croquis complet** (noms des points, mesures) puis on place un « ? » près de la mesure inconnue.

❷ Puisque ABC est un triangle, alors $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Donc $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B}$

$\widehat{C} = 180° - 38° - 82°$

$\widehat{C} = 60°$



A vous maintenant ! Appliquez ***rigoureusement*** la méthode ci-dessus pour calculer la mesure inconnue du troisième angle $\widehat{C}$ dans les cas suivants :

① Le triangle ABC est rectangle en A, et $\widehat{B} = 45°$:

Que remarquez-vous pour le triangle ABC ?

② $\widehat{A} = 35°$ et $\widehat{B} = 2\widehat{A}$:

③ Le triangle ABC est isocèle en C et $\widehat{A}$ = 30° (croquis codé d'abord !).

II. ANGLES ET TRIANGLES PARTICULIERS.

A. Angles et Triangle isocèle :

Puisqu'un triangle isocèle possède un axe de symétrie passant par le milieu de la base et par le sommet principal, alors les deux angles à la base sont de ……………………

Propriété : **Utiliser l'égalité de 2 angles à la base d'un triangle isocèle :** *Croquis codé*

	(……. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle isocèle en A	alors	$\widehat{\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots}$

Autrement dit : Dans un triangle isocèle, les 2 angles à la base sont de ……………………………

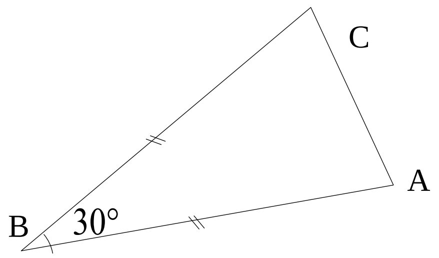
Utilité : Cette propriété sert à écrire une égalité de …………………………………..

- Application ① :

1. D'après le codage sur la figure ci contre, ABC est ……………………..… en ……

« Puisque ABC …………………………… en …... alors $\widehat{\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots}$ »

2. En réutilisant rigoureusement la méthode vue p.2, calculer la mesure de $\widehat{C}$.



- Application ② : Soit un triangle MLK isocèle en L et tel que $\widehat{L}$ = 20° (croquis codé !).

En appliquant la même démarche que dans l'application ① ci-dessus, calculer la mesure inconnue de l'angle $\widehat{K}$.

Réciproque : **Prouver qu'un triangle est isocèle en un de ses sommets :** *Croquis codé*

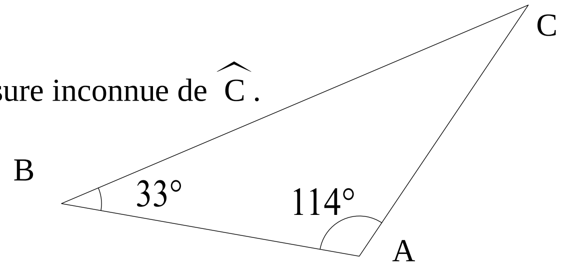
	(……… conditions ou hypothèses)		(……….. résultat ou conclusion)
Quand	① ABC est un triangle ② $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$	alors	ABC est ………………..…… en …..

Autrement dit : Un triangle ayant ……………………….…………………………………….. est un triangle isocèle.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un triangle est ……………….……….. en un de ses sommets.

- Application :

1. En réutilisant rigoureusement la méthode p.2, calculer la mesure inconnue de $\widehat{C}$.



2. Le triangle ABC est-il isocèle ?

Puisque {

- Exercice : Soit un triangle ABC tel que $\widehat{A}$ = 29° et $\widehat{C}$ = 122°. ABC est-il isocèle ?

B. Angles et Triangle équilatéral :

Tracer un triangle équilatéral OUF de 3 cm de côté ainsi que les axes de symétrie de ce triangle.

Puisque le triangle équilatéral possède …… axes de symétrie, les mesures de ses 3 angles sont ……………

Calculons cette mesure commune aux 3 angles du triangle équilatéral.

Calcul	Figure

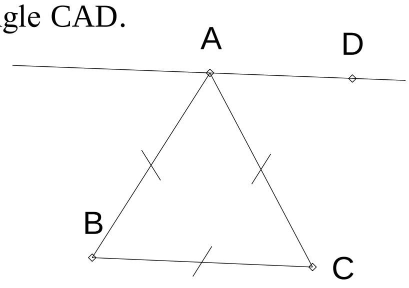
Propriété : **Utiliser l'égalité des 3 mesures d'angle dans un triangle équilatéral :** *Croquis codé*

	(…….. condition ou hypothèse)		(…… résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle **équilatéral**	alors	$\widehat{\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots}$ = ……°

Autrement dit : Dans un triangle équilatéral, les 3 angles ont la même ………………………………

Utilité : Cette propriété sert à écrire des égalités de …………………………………………………..

➢ Exercice : Sur la figure ci contre, (AD) // (BC). Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$.



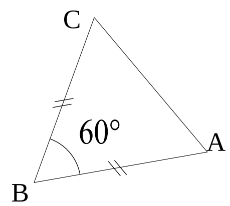
Réciproque : **Prouver qu'un triangle est équilatéral :** *Croquis codé*

	(…… conditions ou hypothèses)		(….. résultat ou conclusion)
Quand	① ABC est un triangle ② $\widehat{ABC}$ = $\widehat{ACB}$ = ***60°***	alors	ABC est …………………………..…...

Autrement dit : Un triangle ayant deux angles de ………………………………..……..………… égale à ….….. est un triangle équilatéral.

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un triangle est ……………….………...

➢ Exercices : Prouver que ce triangle ABC est équilatéral.

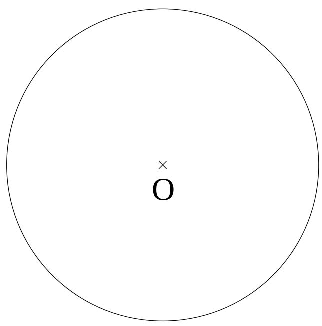


Remarque : On vient de prouver la propriété importante suivante :

Propriété : Un triangle *isocèle avec en plus un angle de 60°* est forcément équilatéral.

➢ Placer sur ce cercle deux points M et N non diamétralement opposés tels que $\widehat{MON}$ = 60°.

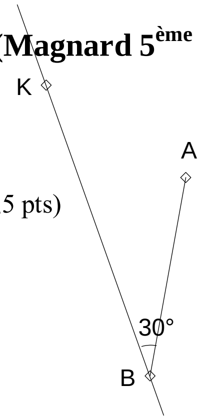
Quelle est la nature de MON ? Justifier évidemment !



III. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR ANGLES ET TRIANGLES.

- **Faire sur votre cahier d'exercices les n° 30-32-33-(34)-(52) p.132 à 135 (Magnard 5ème 2006).**

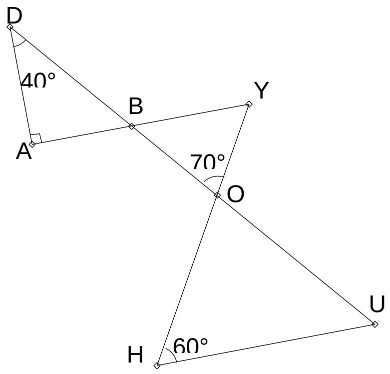
- Test 2005 (…………………… / 3,5 pts) :



Sur la figure ci contre, on sait que $\widehat{ABK}$ = 30°.

1. Construire le point C « à droite » de (AB) de telle sorte qu'ABC soit équilatéral. (……... / 0,5 pts)
2. Tracer en vert, la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Codage ? Elle coupe [BC] en H. (…….… / 0,5 pts)
3. Calculer $\widehat{BAH}$. (…………….. / 1 pt)
4. Montrer que la bissectrice (AH) et (BK) sont parallèles. (……………… / 1,5 pts)

- Contrôle 2006 (…………………… / 5 pts) :

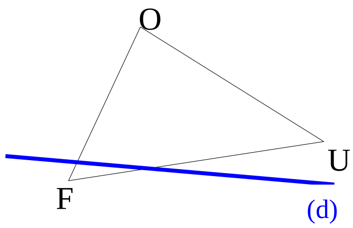


1. Trouver $\widehat{ABD}$, $\widehat{OBY}$, $\widehat{YOU}$ et $\widehat{BYO}$. (……………….. / 4 pts)
2. Les droites (AY) et (HU) sont-elles parallèles ? (………....…… / 1 pt)

- Avant de continuer, il est fortement conseillé de faire tous les exercices sur les triangles sur le site de François Loric : Maths au collège / exercices / angles.

IV. DROITES REMARQUABLES DU TRIANGLE.

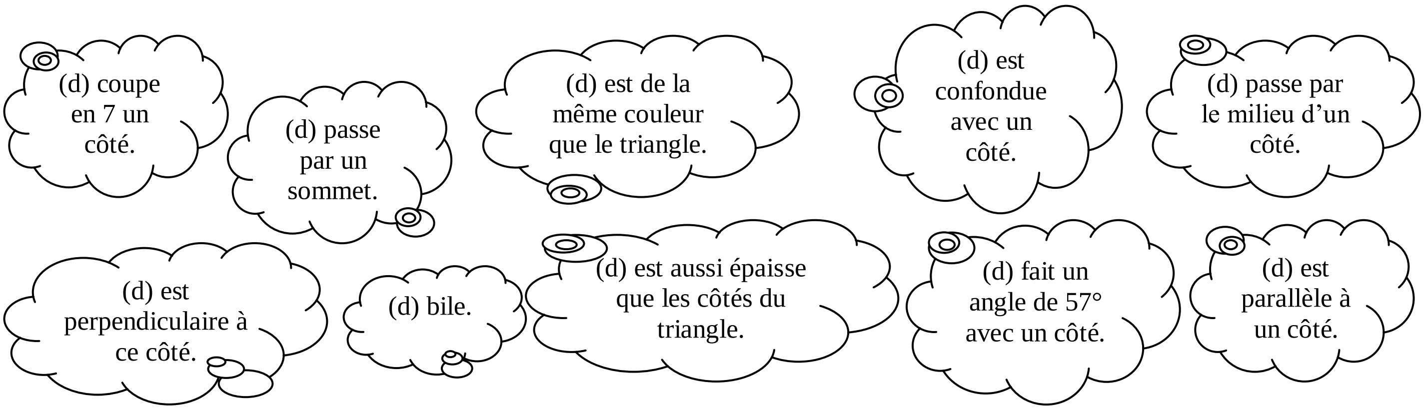
- Soit OFU, un triangle quelconque. On éprouve l'irrésistible envie de tracer une droite (d) « traversant » le triangle comme sur la figure ci contre, n'est-ce pas ?



Y a-t-il quelque chose de particulier à noter pour cette droite (d) ? …….

- Contrairement à l'exemple ci contre, on voudrait tracer une droite (d) ayant une ou plusieurs propriétés *remarquables*.

Parmi les propositions suivantes, 3 seulement semblent *nouvelles et intéressantes* ! Hachurer les !



- Ainsi donc, 3 propositions sont remarquables pour la droite (d) et vont nous intéresser :

❶ (d) passe par un sommet. ❷ (d) passe par le milieu d'un côté. ❸ (d) est perpendiculaire à ce côté.

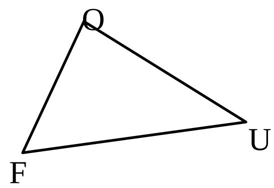
En fait, chacune de ces 3 propositions prises séparément n'est pas très intéressante en elle même !

C'est la conjonction (réunion) de **2** propositions choisies parmi ces 3 propositions qui va aboutir à quelque chose de remarquable.

Exemple : En réunissant les propositions ❷ et ❸, on obtient le couple de propriétés suivant :

❷ (d) passe par le milieu d'un côté ([FU] par exemple).

❸ (d) est perpendiculaire à ce même côté [FU].



Tracer en vert la droite (d) correspondante à ce couple (**n'oubliez pas le double codage !**).

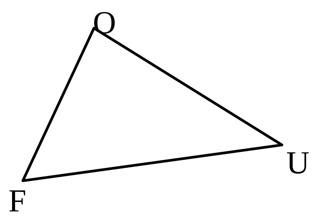
Comment s'appelle cette droite (d) ? (d) est la ……………………………..….. de [……...].

- Au total, combien de couples de 2 propriétés choisies parmi les 3 propriétés encadrées, pouvons nous former ? …….

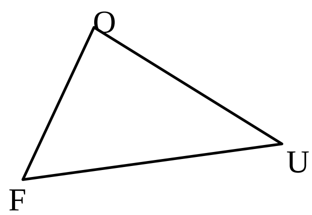
Ecrivez les 2 autres couples manquants puis dessinez en vert, la droite (d) correspondante **sans oublier le codage quand il y en a.**

❶

❷



Comment s'appelle (d) dans ce cas ? …………………………………… codage !



Comment s'appelle (d) dans ce cas ? …………………………………… codage !

Maintenant, résumons tout cela dans un cours bien propre !

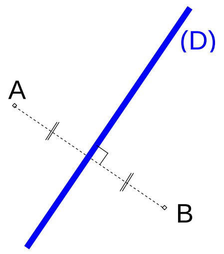
V. MEDIATRICES D'UN TRIANGLE.

A. Définition, notation, figure et double codage (rappels de 6ème) :

On se rappelle que la médiatrice d'un segment est l'un des 2 axes de symétrie de ce segment : plus précisément l'axe qui est perpendiculaire à ce segment.

En fait, on utilise plutôt la définition équivalente suivante plus pratique pour les exercices :

- Définition : La **médiatrice** d'un segment est ……… droite :
  - ❷ passant par le ……………………..…… de ce segment,
  - ❸ ……………………………………………. à ce segment.

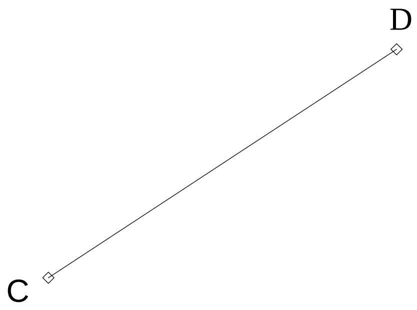


- Notation : La médiatrice d'un segment [AB] est notée : **med [AB].**
- Figure et double codage : Du fait de la définition, un **double codage** apparaît lorsqu'on trace la médiatrice d'un segment donné. **Repasser ce double-codage en rouge.**

➢ Exercice 1:

1. Comment note-t-on la médiatrice de ce segment [CD] ci-dessous ?

2. Tracer en bleu med [CD] au compas et à la règle.

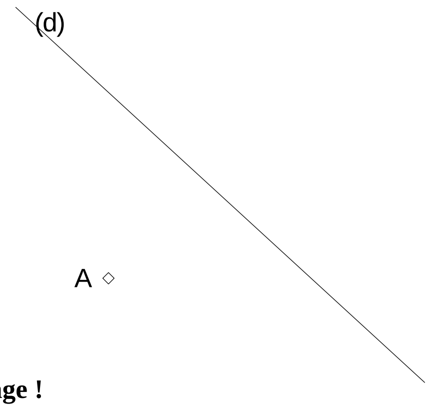


N'oubliez pas le **double-codage** de la figure !

➢ Exercice 2 :

1. Ci dessous, placer le point B de telle sorte que la droite (d) soit la médiatrice de [AB].
Comment sont les points A et B par rapport à (d) la médiatrice de [AB] ? ……………………

2. Placer un point M sur med [AB].
Quel est la nature du triangle AMB ?
……………………………………………………



Double-codage !

B. Propriété métrique caractéristique de la médiatrice :

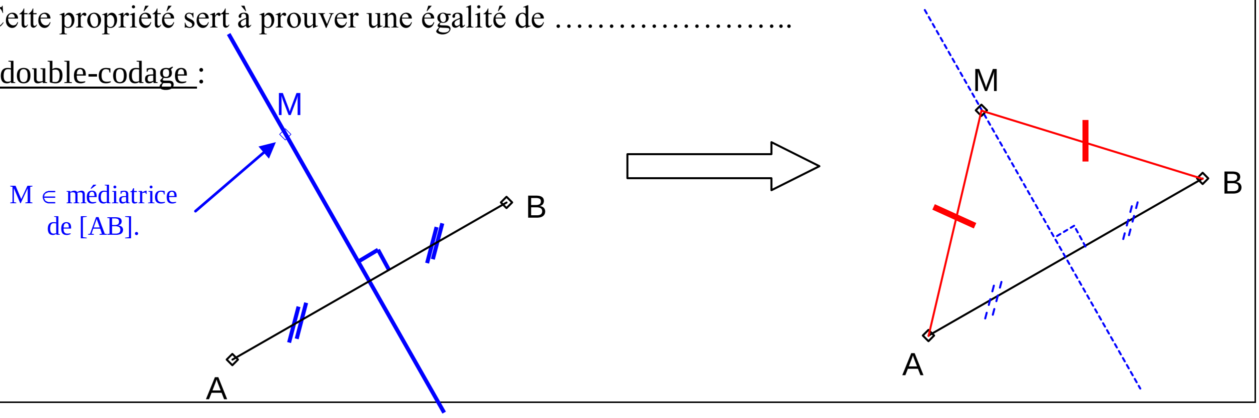
Propriété métrique de la médiatrice :

	(…… condition ou hypothèse)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	M est sur la médiatrice d'un segment [AB]	alors	MA = MB

Autrement dit : Lorsqu'un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est situé à égale distance des deux extrémités de ce segment.

Utilité : Cette propriété sert à prouver une égalité de …………………..

Figure et double-codage :



Inversement :

Réciproque de la propriété métrique de la médiatrice :

	(….. condition ou hypothèse)		(……. résultat ou conclusion)
Quand	…….. = …….	alors	M est sur la ……..…………………..……… du segment [AB].

Autrement dit : Lorsqu'un point est ***équidistant*** *des extrémités d'un segment, alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.*

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un point est sur une …………………..

Figure : C'est la même que celle de la propriété métrique *mais dans le sens contraire.*

Remarque : **Rechercher l'ensemble des points équidistants de 2 points fixés, revient à tracer la ………………………….. du segment reliant ces 2 points.**

- Remarque :

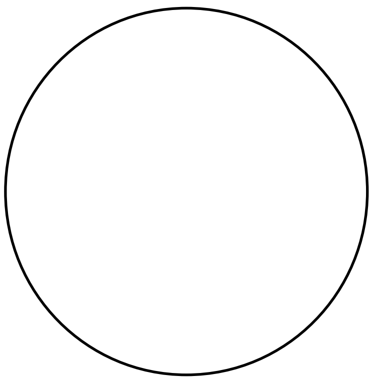
Quand une propriété et sa réciproque sont vraies en même temps, on dit que cette propriété est **caractéristique** : ici, seul l'objet médiatrice et lui seul a tous ses points équidistants de 2 points fixes.

- Application directe : ***Construction à la règle et au compas du centre d'un cercle.***

Placer de façon quelconque 3 points *distincts (séparés)* sur ce cercle.

Puis, grâce aux médiatrices, construire le centre de ce cercle.

Double-codages des médiatrices !

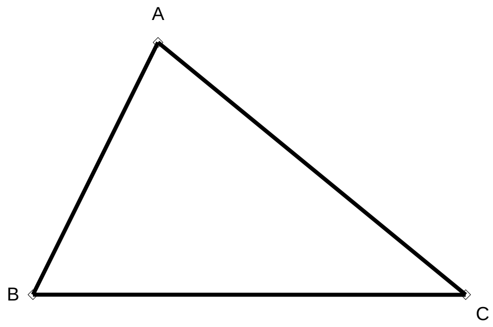


Combien de médiatrices suffit-il de tracer pour obtenir le centre ?

…………………………………………………………..

C. Cercle circonscrit à un triangle :

Activité :



1. Tracer en rouge les 3 médiatrices du triangle ABC ci-contre.

Que remarquez-vous ?

2. Appelez O le point de concours (d'intersection) des trois médiatrices.
3. Tracer en bleu le cercle de centre O et de rayon OA.

Que remarquez-vous ?

Théorème : Concourance des 3 médiatrices d'un triangle (figure ci-dessus).

❶ Les 3 médiatrices d'un triangle ABC se ………………………………….. en un point O.

On dit que les 3 médiatrices sont **concourantes** en le point O.

❷ Ce point O est le centre du ……………………………………………………….. à ce triangle ABC.

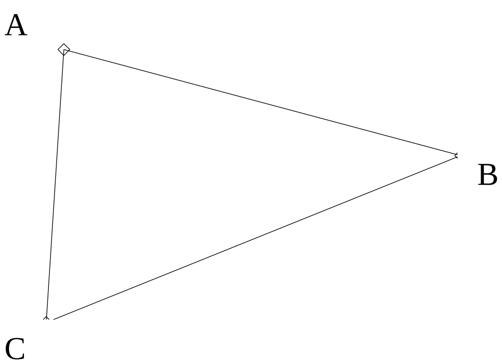
❸ Ce centre O est donc équi……………………..……… des 3 sommets A, B et C du triangle.

Autrement dit : OA = ……..… = ……..…

- Figures :

① Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

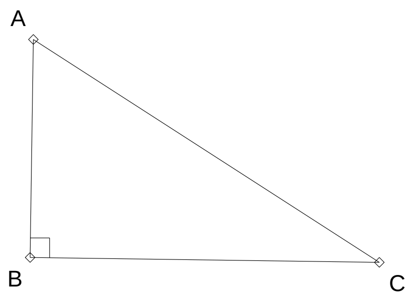
Il suffit de tracer …… médiatrices !



Double-codages des médiatrices !

② Cas particulier du triangle rectangle :

Construire le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC.



Double-codages des médiatrices !

Où semble se trouver le centre du cercle circonscrit à ce triangle rectangle ?

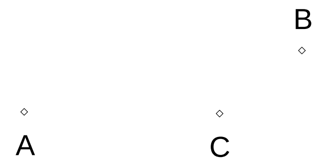
D. Exercices sur les médiatrices d'un triangle :

① Tracer le triangle POU rectangle en O tel que PU = 5 cm et $\widehat{PUO} = 30°$. Figure

Construire en couleur le cercle circonscrit au triangle POU.

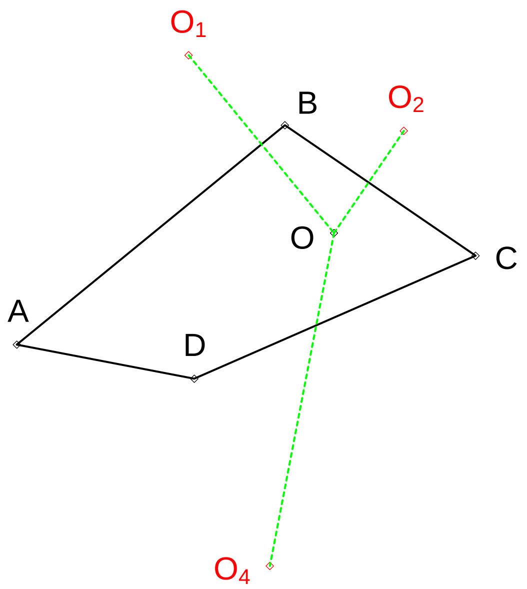
Où semble se trouver le centre de ce cercle ?

② Voici 3 villes assimilées aux points A, B et C. Où placer « équitablement » l'aéroport L ?



③ Sur la figure ci contre, on a placé O_1, O_2 et O_4 les symétriques respectifs de O par rapport à (AB), (BC) et (AD).

1. Placer proprement les codages manquants.
2. Tracer O_3 le symétrique de O par rapport à (DC).
3. Prouver que B est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_2.
4. Quel est le centre du cercle circonscrit à OO_3O_4 ?
5. Quel est le centre du cercle circonscrit à OO_1O_4 ?
6. Tracer ces 3 cercles.



④ Construire le triangle NAP tel que PA = 5 cm, $\widehat{NPA} = 65°$ et $\widehat{PAN} = 50°$.

Les 3 points P, A et N symbolisent 3 villes et la Direction de l'Aménagement du Territoire souhaite construire une nouvelle gare près de ces 3 villes mais pas n'importe où ! Cette gare doit être placée plus près de la ville P que de la ville A et plus près de la ville A que de la ville N.

Hachurez la zone correspondante sur la figure.

Figure

VI. MEDIANES D'UN TRIANGLE.

<u>Définition de la médiane :</u> Dans un triangle, la **médiane relative à un sommet** est ..…… droite :

❶ qui passe par ce ……………………..

❷ et qui passe par le …………………… du côté opposé à ce sommet.

➢ <u>2 remarques :</u>

① Puisqu'un triangle a 3 côtés, alors il y a …… médianes dans un triangle.

② On dit aussi **« médiane relative à un côté »** : elle passe par le milieu de ce côté.

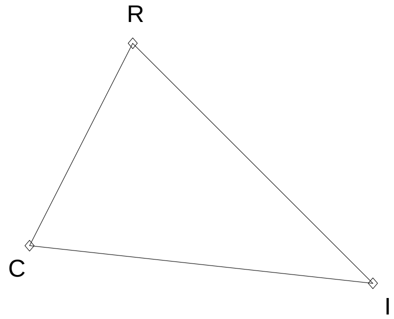
➢ <u>Figure et codage des médianes</u> :

Tracez en rouge les 3 médianes du triangle CRI ci-contre. Codages !

Que remarquez-vous ? …………………………………

Appelez G ce point de concours des 3 médianes.

L'intersection G des 3 médianes s'appelle le centre de gravité du triangle.



VII. HAUTEURS D'UN TRIANGLE.

<u>Définition de la hauteur :</u> Dans un triangle, la **hauteur relative à un sommet** est ..…… droite :

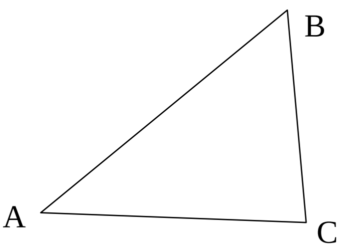
❶ qui passe par ce ……………………..

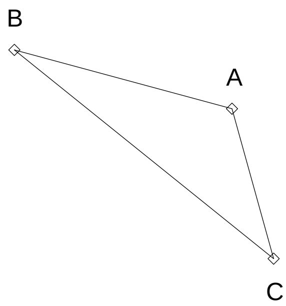
❸ et qui est ………………………………………… à la droite supportant le côté opposé à ce sommet.

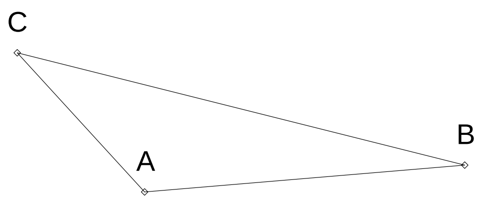
➢ <u>Figure et codage des hauteurs</u> :

Pour chacun des trois triangles ci dessous, tracez en rouge la hauteur issue du sommet C. Codages !

Puis placez H le point d'intersection entre cette hauteur dessinée et la droite (AB) (*H s'appelle le pied de cette hauteur issue du sommet C*).







➢ <u>Trois remarques</u> :

① Puisqu'un triangle a 3 côtés, alors il y a …… hauteurs dans un triangle.

② On dit aussi **« hauteur relative à un côté »** : elle est ………………………………. à ce côté.

③ Pourquoi parle-t-on de hauteur ?

En fait cette hauteur relative à un sommet indique la distance de ce sommet au côté opposé.

VIII. EXERCICES SUR LES DROITES REMARQUABLES.

Livre (Magnard 5ème 2006) : n°2-11-32 p.92 à 95 et n°6-7 p.99 à faire sur le cahier d'exercices.

IX. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

- Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Construction d'un triangle à partir des 3 longueurs.			
Construction d'un triangle à partir de 2 longueurs et 1 angle.			
Construction d'un triangle à partir de 1 longueur et 2 angles.			
Construction d'un triangle rectangle ou isocèle à partir d'1 longueur et d'1 angle.			
Calculs d'angles : utiliser la somme des angles dans un triangle.			
Calculs d'angles : utiliser les propriétés angulaires des triangles isocèle, équilatéral ou rectangle.			
Calculs d'angles : angles alternes internes, correspondants, opposés par le sommet.			
Médiatrices : définition, propriété métrique, lien « symétrie axiale ↔ médiatrice »			
Cercle circonscrit : définition, construction.			
Bissectrices : définition, propriété angulaire.			
Médiane : définition, construction.			
Hauteur : définition, construction.			
Inégalité triangulaire : triangle constructible ou non, cas de l'égalité triangulaire.			
Aimer les triangles.			

- **Pour préparer le test et le contrôle : Livre p.98 et 99 ; p.136 et 137 (Magnard 5$^{\text{ème}}$ 2006).**

B. Conseils :

- Constructions :
  - On fait d'abord un croquis complet **à main levée** de la figure pour avoir une idée de la forme.

    On reporte sur ce petit croquis **les informations** données par l'énoncé (longueurs, angles, codages etc.)
  - Laissez les traits de construction, **légers et nets.**
  - **Couleurs + codages** induits par l'énoncé.
- Calculs d'angles :
  - Quand on fait des calculs d'angles dans un triangle, on écrit dans quel triangle on se place.
  - Penser aux propriétés angulaires des triangles isocèles, équilatéraux.
  - Penser à la propriété angulaire de la bissectrice.
- Inégalité triangulaire :
  - On compare **le plus grand côté** à la somme des 2 autres (ne pas oublier le cas de l'égalité).
- Preuves :
  - Ne pas essayer de répondre en une fois aux questions mais en plusieurs étapes.
  - Parallèles et triangles : penser aux angles alternes internes ou correspondants.
  - Etre précis : isocèle où, rectangle où, bissectrice de quel angle etc.
  - Une affirmation non justifiée soit par un raisonnement soit par une donnée de l'énoncé ne vaut RIEN !

C. Erreurs fréquentes :

Inventer des hypothèses ou du codage qui nous arrangent.

Inventer des théorèmes.

Dans l'inégalité triangulaire : ne pas considérer la plus grande longueur.

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé du prochain contrat n°5 ? ……………………………..