LES ANGLES

« Pour vous parler franchement de la Géométrie,
je la trouve le plus haut exercice de l'Esprit. » *Pascal*[1]

- <u>Matériel requis :</u> **Matériel de géométrie (rapporteur en particulier).**
  Livre « Magnard 5ème 2006 » dès le début de contrat.
  Cahier d'exercices dès le début de contrat.

- <u>Pré requis pour prendre un bon départ :</u> **<u>Voir mon cours de 6ème sur les angles (espace 6ème contrat 5)</u>**.

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Angles : Définition.			
Utilisation du rapporteur ; constructions d'angles.			
Angles particuliers (nul, aigu, droit, obtus, plat, saillant, rentrant).			
Calculs de mesures d'angle par addition ou par soustraction.			
Bissectrice d'un angle.			
Symétries axiale et centrale.			

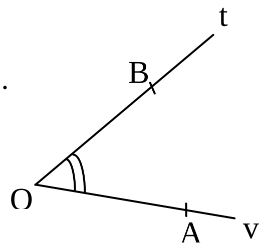
[1] <u>Blaise Pascal (1623-1662) :</u>Un des plus grands philosophes et mathématiciens français. « Un génie ». Tel est le qualificatif le plus souvent associé au nom de Blaise Pascal. Un génie qui, malgré une mort prématurée et une grande partie de son temps consacrée à la religion, a marqué l'histoire de la Science, en particulier par sa grande rigueur d'analyse et son sens de l'expérience.

NOM et Prénom : ………………………………….. *5ème …*

I. DU TEMPS DE LA SIXIEME.

La notion d'angle apparaît intuitivement lorsqu'on veut mesurer l'« écartement » ou l'« inclinaison » entre deux demi-droites : comme par exemple l'« ouverture » entre les deux branches d'un compas.

A. Vocabulaire et notations :

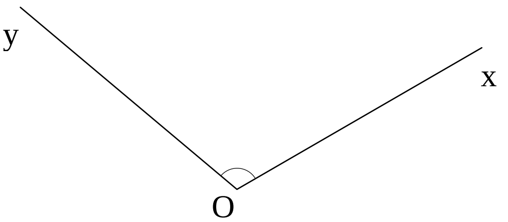


- Cet angle se nomme .... ou .... ou …………. ou ……………
- Le point O est son ....……..........................
- Les demi-droites ....….. et ....…. sont ses …....................

B. Mesure et construction au rapporteur :

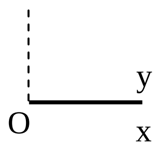
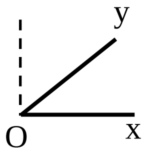
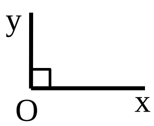
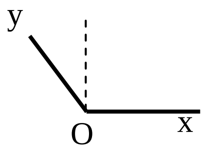
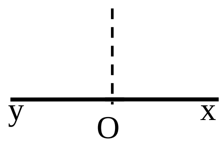
- L'unité utilisée au collège pour mesurer les angles s'appelle le ………….., noté « ° ». Ex. : $\widehat{BOA} = 45°$.
- Un *tour complet* correspond à la mesure d'angle …………

Mesurer l'angle $\widehat{xOy}$ au rapporteur. $\widehat{xOy}$ = ………



Construire un angle $\widehat{xOy}$ de 130° :

C. Classification croissante des angles suivant leur mesure :

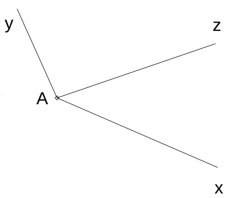
Catégorie d'angle :	………….	…………	…………	………….	………….
Figure :					
Mesure :	$\widehat{xOy}$ = …..…. °	….. °< $\widehat{xOy}$ < …... °	$\widehat{xOy}$ = ……. °	….. °< $\widehat{xOy}$ <….. °	$\widehat{xOy}$ = …..…. °

D. Calcul d'angles par addition ou par soustraction :

Calculer l'angle $\widehat{xAy}$ sachant que :

① $\widehat{zAx} = 40°$ et $\widehat{yAz}$ est un angle droit.

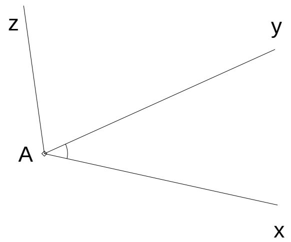
(Méthode par addition d'angles)



Calculer l'angle $\widehat{xAy}$ sachant que :

② $\widehat{zAx} = 110°$ et $\widehat{zAy} = 80°$.

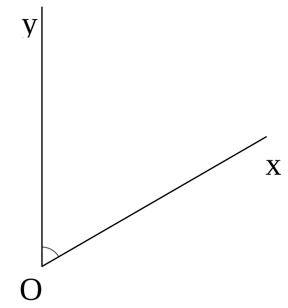
(Méthode par soustraction d'angles)



Nous allons voir maintenant six angles d'un nouveau genre.

II. ANGLES ADJACENTS.

A. Découverte :



- Voici un angle $\widehat{xOy}$.

Tracer une droite « intérieure » à $\widehat{xOy}$ et passant par le sommet O de l'angle.

Placer un point A sur cette droite, à « l'intérieur de l'angle ».

- En combien d'angles est partagé $\widehat{xOy}$? En ……….. angles.

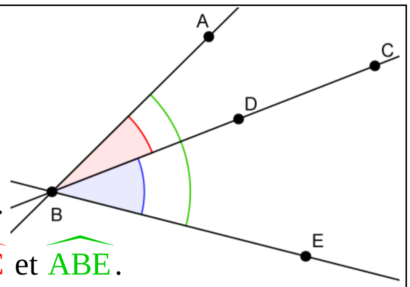
Ces 2 angles ont-ils forcément la même mesure ? Mais …………….. !

Quel est leur sommet commun ? ……. Ont-ils un côté en commun ? ………… Lequel ? ……….

B. Définition des angles adjacents :

<u>Définition :</u> Deux angles sont dits **adjacents**, lorsque :

① Ces deux angles ont le **même sommet**.
② Ces deux angles ont **un côté en commun**.
③ Ces deux angles sont situés **de part et d'autre de ce côté commun**.

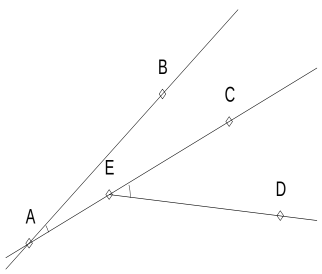


<u>Exemples :</u> Sur la figure ci contre, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ sont adjacents mais pas $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABE}$.

➢ <u>Exercice :</u> Les angles représentés sont-ils adjacents ? Si c'est non, expliquez pourquoi.

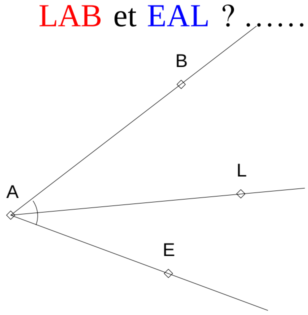
<u>Rappel :</u> La notation $\overset{\smile}{MAK}$ désigne l'angle *rentrant* MAK, c'est à dire le « grand » angle (de mesure > 180°).

$\widehat{BAE}$ et $\widehat{CED}$? …….



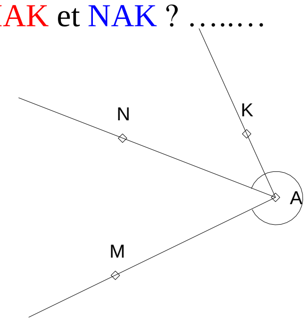
$\widehat{CED}$ et $\widehat{DEA}$? ……..

$\widehat{LAB}$ et $\widehat{EAL}$? ……..



$\widehat{BAE}$ et $\widehat{LAE}$? …….

$\overset{\smile}{MAK}$ et $\widehat{NAK}$? ……..



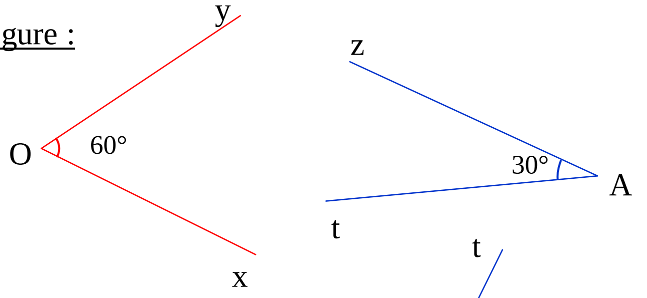
$\overset{\smile}{MAN}$ et $\overset{\smile}{MAK}$? ……..

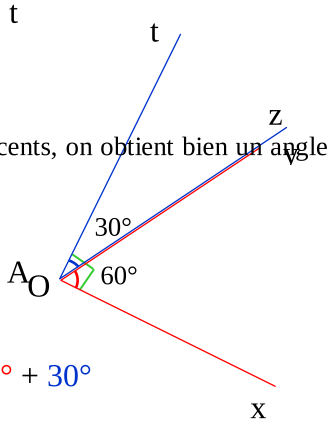
III. ANGLES COMPLEMENTAIRES ; ANGLES SUPPLEMENTAIRES.

A. Définitions des angles complémentaires et supplémentaires :

Lorsque la somme des mesures de deux angles est **égale à celle d'un angle droit** c-à-d ……….°, alors ces deux angles sont dits **complémentaires.**

Figure :





En rendant les deux angles adjacents, on obtient bien un angle droit.

Méthode :

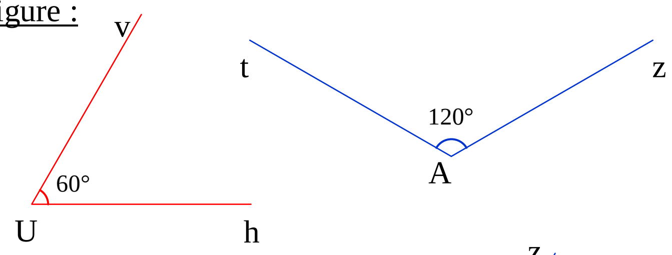
Puisque $\widehat{xOy}$ + $\widehat{tAz}$ = 60° + 30°

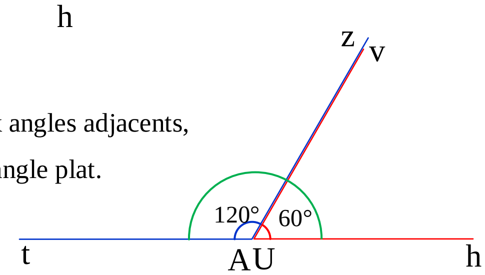
= 90°

alors $\widehat{xOy}$ et $\widehat{tAz}$ sont des angles ……………………………………….

Lorsque la somme des mesures de deux angles est **égale à celle d'un angle plat** c-à-d ……..….°, alors ces deux angles sont dits **supplémentaires.**

Figure :





En rendant les deux angles adjacents, on obtient bien un angle plat.

Méthode :

Puisque $\widehat{vUh}$ + $\widehat{tAz}$ = 60° + 120°

= 180°

alors $\widehat{vUh}$ et $\widehat{tAz}$ sont des angles ……………………………………….

Faire sur votre cahier d'exercices les exercices d'application n°3-4-5-17 p.130 livre Magnard 5ème 2006.

IV. ANGLES ET SYMETRIE CENTRALE.

A. Rappel du contrat 2 sur les angles symétriques :

Soient $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FEG}$ deux angles symétriques par rapport à un point Ω (lire « oméga ») :

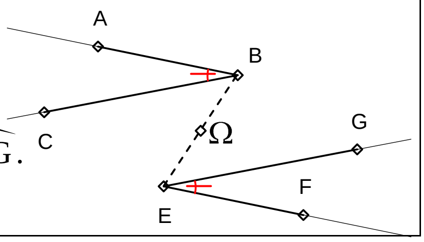
Propriété des angles symétriques :

	(…. donnée ou hypothèse)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	$\widehat{ABC}$ et $\widehat{FEG}$ sont symétriques	*alors*	$\widehat{………}$ = $\widehat{………}$

Autrement dit : Lorsque deux angles sont symétriques, alors ils sont de ……………………………………..

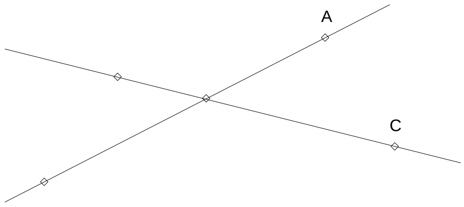
Utilité : Cette propriété sert à écrire des égalités de mesure d'angles.

Méthode et Figure :



Puisque $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FEG}$ sont symétriques par rapport à Ω, alors $\widehat{ABC}$ = $\widehat{FEG}$.

B. Des angles symétriques un peu particuliers :



- Soient deux droites (AB) et (CD) sécantes en un point O.

Placez les 3 noms manquants des points.

- Puisque O ∈ (AB), alors la symétrique de (AB) par rapport à O est elle même !

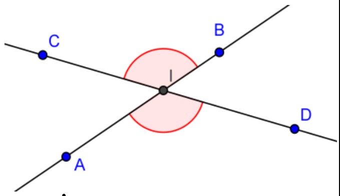
Quelle est la symétrique de la droite (CD) par rapport à O ? ………………

Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{AOD}$ par rapport à O ? ……………

- Puisque $\widehat{BOC}$ et …..……….. sont symétriques par rapport à O alors, par conservation des mesures d'angles par la symétrie centrale, …………… = ………….. Codez en rouge sur la figure ces deux angles de même mesure.

Y a-t-il une autre paire d'angles de même mesure ? ………... Lesquels ? ………………………………

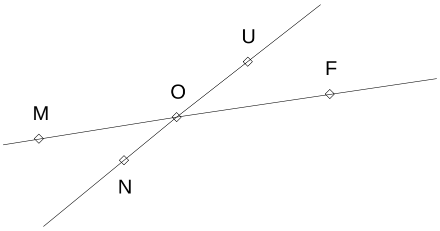
C. Définition des angles opposés par leur sommet commun :

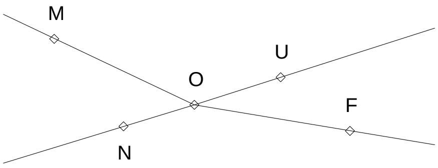


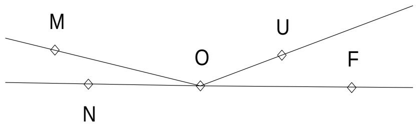
Définition : Deux angles sont dits **opposés par leur sommet commun**, lorsque :
① Ils ont le **même sommet**.
② Leurs **côtés forment 2 droites sécantes.**

Exemples : $\widehat{AID}$ et $\widehat{BIC}$ sont opposés par leur sommet commun I. $\widehat{AIC}$ et $\widehat{BID}$ aussi.

➢ Exercice : Les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{FOU}$ sont-ils opposés par leur sommet commun O ? Justifiez.







D. Propriété des angles opposés par leur sommet commun :

Par conservation des mesures d'angles par la symétrie centrale, on peut énoncer la propriété suivante :

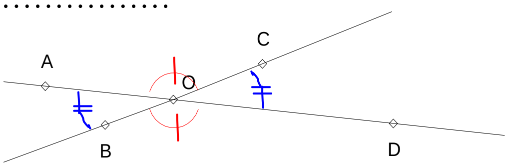
Propriété : « Angles opposés par leur sommet commun » :

	(…. donnée ou hypothèse)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	$\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par leur sommet commun O	*alors*	$\widehat{……….}$ = $\widehat{……….}$

Autrement dit : Lorsque deux angles sont opposés par leur sommet commun, alors ils sont de ………………………….

Utilité : Cette propriété sert à écrire une égalité de ………………………………

Méthode et Figure :



Puisque $\widehat{COA}$ et $\widehat{BOD}$ sont opposés par leur sommet commun O,

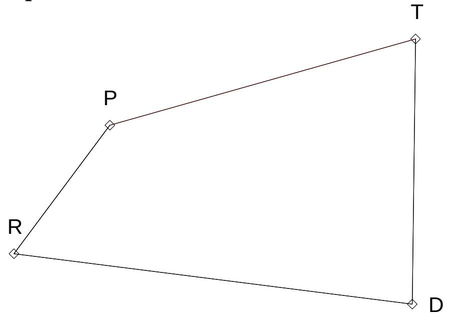
alors $\widehat{COA} = \widehat{BOD}$.

Remarque : Deux droites ………………………….. en un point vont toujours donner 2 paires d'angles opposés par leur sommet commun qui sera le point d'intersection des deux droites.

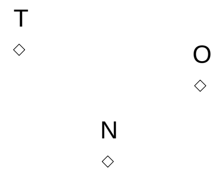
➢ Exercices sur les angles opposés par leur sommet commun.

① Les diagonales de PTDR se coupent en O.

Montrer que $\widehat{TOP}$ et $\widehat{DOR}$ ont même mesure.



② Construire S et U les symétriques de T et N par rapport à O. Puis montrer que $\widehat{TON} = \widehat{SOU}$.



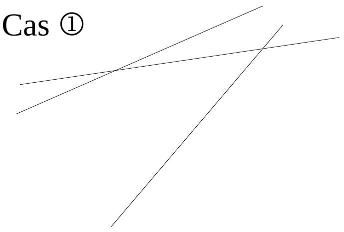
V. ANGLES ALTERNES-INTERNES : CAS GENERAL.

Nous allons maintenant étudier une nouvelle configuration à trois droites : 2 droites formant une bande et une troisième droite traversant cette bande (donc sécante avec les deux droites formant la bande).

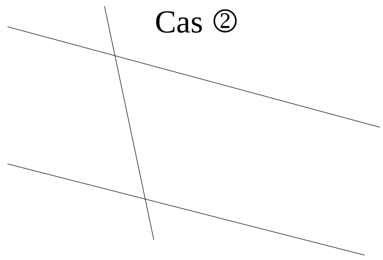
A. Découverte :

1. Pour chacune de ces 3 configurations, hachurer la bande en bleu puis repasser en rouge la sécante.

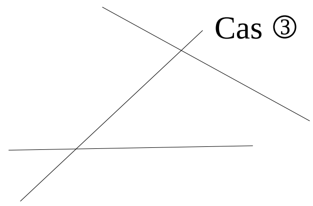
Cas ①



Cas ②



Cas ③



2. Dans chaque cas, matérialiser (en vert par des arcs de cercle) une paire d'angles :
   - ① se trouvant à l'intérieur de la bande.
   - ② situés de part et d'autre de la sécante (c-à-d *pas tous les deux* du même côté de cette sécante).
   - ③ et *non adjacents.*

Pour chaque configuration, combien de paires d'angles vérifient ces 3 conditions ? ……………….

3. Pour laquelle de ces trois configurations semble-t-on obtenir une paire d'angles *de même mesure* ?

……………………………………….…..

Quelle condition sur les deux droites formant la bande du cas ② semble permettre ce résultat ?

………………………………………………………………………..

Dans les deux autres configurations ① et ③, obtient-on des paires d'angles de même mesure ? ……………

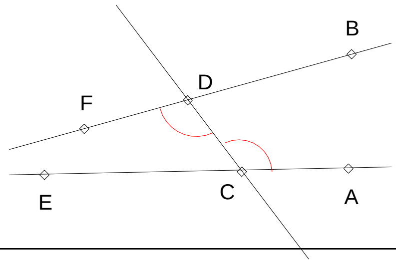
Les droites formant la bande sont-elles alors parallèles ? ……………

B. Définition des angles alternes-internes :

L'activité de découverte page précédente nous permet de définir les paires d'angles construits à partir de deux droites formant une bande et d'une sécante à cette bande :

Définition : Deux angles forment une **paire d'angles alternes-internes** lorsqu'ils sont situés :

① de part et d'autre de la sécante commune à ces deux droites (*alternés autour de cette sécante*).
② entre les 2 droites formant la bande (*internes à la bande*).
③ sans être adjacents.

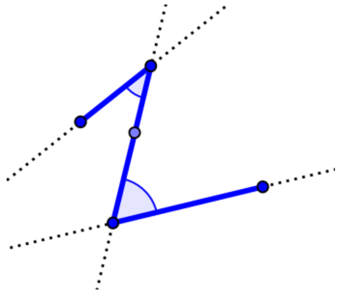


Exemples : $\widehat{FDC}$ et $\widehat{ACD}$ sont alternes-internes.

$\widehat{BDC}$ et ………….. sont aussi alternes-internes.

Remarques : Deux droites et une sécante induisent ……… paires d'angles alternes-internes.

Une paire d'angles alternes-internes se repère facilement : ces deux angles forment une espèce de « **Z** » :

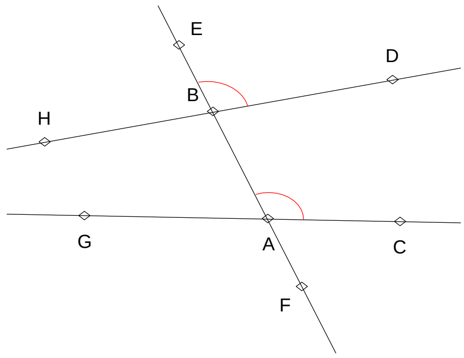


Attention : *Sans condition supplémentaire sur les 2 droites formant la bande*, il n'y a aucune raison que des angles alternes-internes soient de même mesure !

VI. ANGLES CORRESPONDANTS : CAS GENERAL.

Définition : Deux angles forment **une paire d'angles correspondants** lorsqu'ils sont situés :

① du même côté de la sécante.
② l'un dans la bande, l'autre en dehors.



Exemples : $\widehat{EBD}$ et $\widehat{BAC}$ sont correspondants.

$\widehat{HBA}$ et ………..…. sont aussi correspondants.

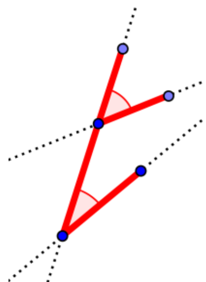
$\widehat{FAC}$ et ………….. sont aussi correspondants.

$\widehat{HBE}$ et ………….. sont aussi correspondants.

Remarques : Pourquoi parle-t-on d'angles correspondants ? En fait, lorsqu'on fait « glisser » l'angle $\widehat{EBD}$ vers l'angle $\widehat{BAC}$, ces deux angles correspondent !

Deux droites et une sécante induisent ……… paires d'angles correspondants.

Une paire d'angles alternes-internes se repère facilement : ces deux angles forment une espèce d'épi :



Attention : *Sans condition supplémentaire sur les 2 droites formant la bande*, il n'y a aucune raison que des angles correspondants soient de même mesure !

<u>Faire les exercices d'application n°6-7-8 p.130 du livre « Magnard 5ème 2006 ».</u>

VII. ANGLES ET DROITES PARALLELES.

A. Angles alternes-internes et droites parallèles :

➢ Maintenant, plaçons-nous dans le cas particulier où **les 2 droites formant la bande sont parallèles** :

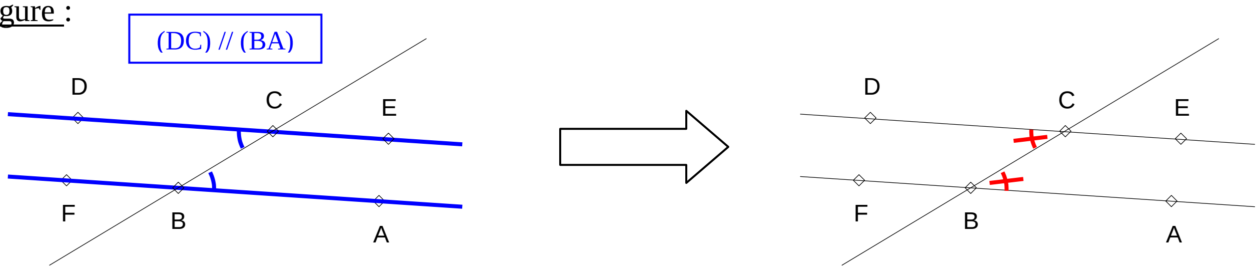
Propriété : « Angles alternes-internes définis par deux droites parallèles » :

	(…. données ou hypothèses)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	① $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ sont alternes-internes ② (DC) // (BA)	*alors*	$\widehat{\ldots\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$

Autrement dit : Lorsque deux angles alternes-internes sont définis par deux parallèles, alors ils sont de …………………………..

Utilité : Cette propriété sert à écrire des égalités de ………………………………..

Figure :



.

Preuve : Cette propriété se montre facilement en considérant la symétrie de centre le milieu de [BC] et par conservation des mesures d'angles par cette symétrie centrale.

Application : Sur la figure ci dessus, montrer que les angles $\widehat{FBC}$ et $\widehat{BCE}$ sont de même mesure.

➢ La réciproque de cette propriété sur les angles alternes-internes et droites parallèles est aussi vraie :

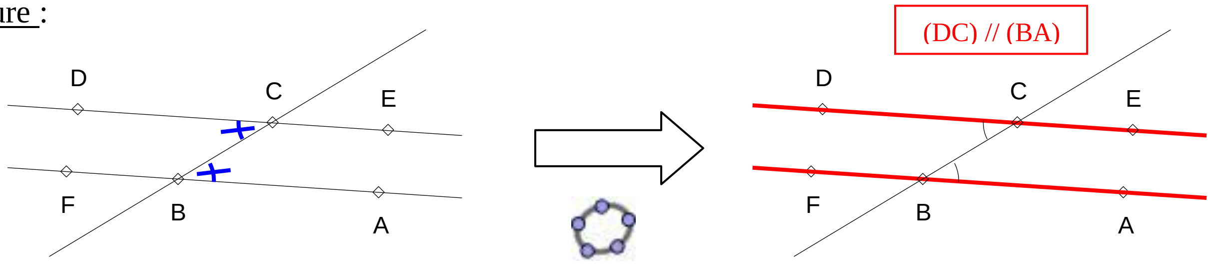
***Réciproque* de la propriété « Angles alternes-internes définis par deux droites parallèles » :**

	(…. données ou hypothèses)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	① $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ sont alternes-internes ② $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$	*alors*	………… // ………

Autrement dit : Lorsque deux angles alternes-internes sont de …………………………………………….., alors les deux droites les définissant sont …………………………..

Utilité : Cette propriété sert à montrer que deux droites sont ……………………………..

Figure :



B. Angles correspondants et droites parallèles :

➢ Nous sommes toujours dans le cas particulier où **les 2 droites formant la bande sont parallèles :**

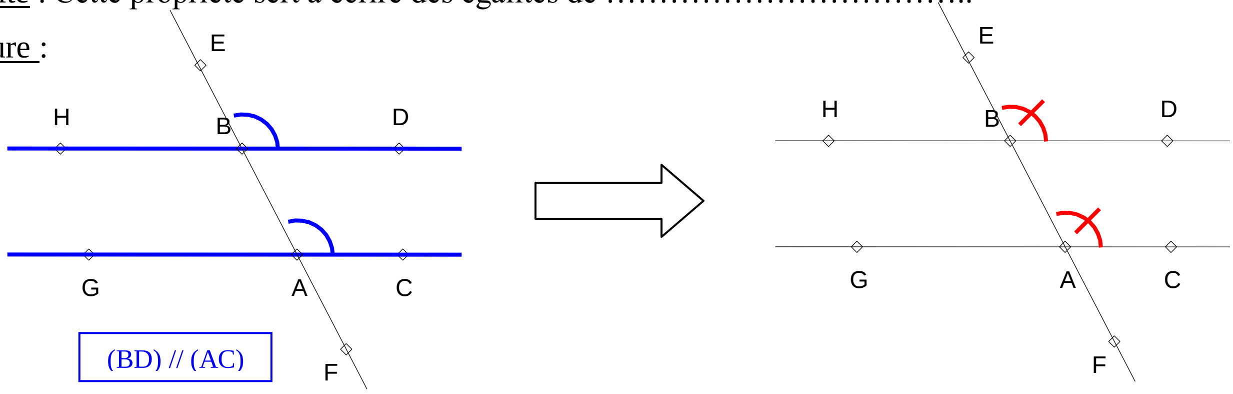
Propriété : « Angles correspondants définis par deux droites parallèles » :

	(…. données ou hypothèses)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	① $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBE}$ sont correspondants ② (BD) // (AG)	*alors*	$\widehat{\dots\dots\dots}$ = $\widehat{\dots\dots\dots}$

Autrement dit : Lorsque deux angles correspondants sont définis par deux parallèles, alors ils sont de …………………………..

Utilité : Cette propriété sert à écrire des égalités de ……………………………..

Figure :



Application : Sur la figure, montrer que les angles $\widehat{FAC}$ et $\widehat{ABD}$ sont de même mesure.

Preuve de la propriété précédente « Angles correspondants et droites parallèles » :

1. En utilisant la propriété « Angles alternes-internes et droites parallèles », montrer que $\widehat{CAB} = \widehat{HBA}$.
2. En utilisant la propriété « Angles opposés par leur sommet commun », montrer que $\widehat{HBA} = \widehat{DBE}$.
3. Conclure.

- La réciproque de cette propriété sur les angles correspondants et droites parallèles est aussi vraie :

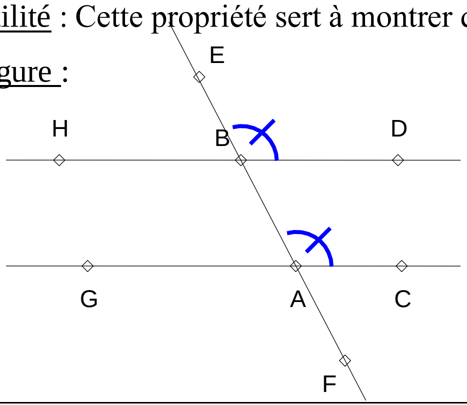
<u>*Réciproque* de la propriété « Angles correspondants définis par deux droites parallèles » :</u>

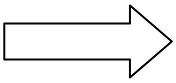
	(…. données ou hypothèses)		(…. résultat ou conclusion)
Quand	① $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBE}$ sont correspondants ② $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$ = $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$	*alors*	………… // ………

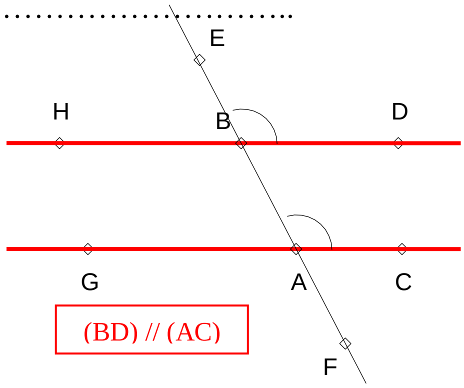
Autrement dit : Lorsque deux angles correspondants sont de ……………………………………………….., alors les deux droites les définissant sont ………………………..

<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à montrer que deux droites sont ……………………………..

<u>Figure</u> :







<u>Remarque :</u> On retrouve en fait les 2 propriétés analogues à celles pour les angles alternes-internes et droites //.

<u>Faire les exercices d'application n°23-27-29 p.132 du livre « Magnard 5ème 2006 ».</u>

VIII. BISSECTRICE D'UN ANGLE (RAPPELS DE SIXIEME).

A. Définition de la bissectrice :

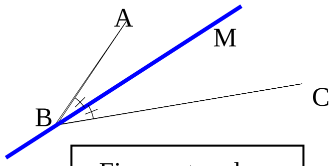


Figure et codage

La bissectrice est l'axe de symétrie d'un secteur angulaire.

Par abus de langage, on dit que : **« la bissectrice d'un angle est l' …..……… de symétrie de cet angle. »**

B. Propriété angulaire fondamentale de la bissectrice :

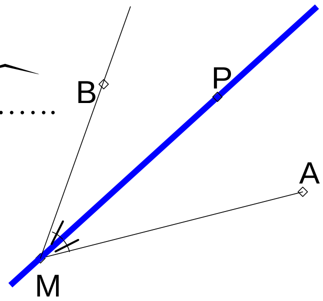
➢ D'après la conservation des angles par la symétrie axiale, on peut donc affirmer, en reprenant les notations de la figure ci-dessus, la propriété suivante :

Propriété angulaire de la bissectrice :

	(……. condition ou hypothèse)		(3 résultats ou conclusions)
Quand	(BM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$	alors	$\widehat{\ldots\ldots\ldots} = \widehat{\ldots\ldots\ldots} = \dfrac{\widehat{\ldots\ldots\ldots}}{2}$

Autrement dit : Lorsque une droite est la …………………………… d'un angle, alors elle partage cet angle en 2 angles de même …………………......

Utilité : Cette propriété sert à prouver une égalité de …………………..



➢ Application: Sur la figure ci contre, on sait que $\widehat{AMB} = 56°$.

- D'après le ……………..…, la droite (MP) est la ……..……..………………. de $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$
- Calcul des mesures de $\widehat{PMB}$ et $\widehat{PMA}$:

Puisque (PM) est la ……………………..……………… de …………

alors ……...… = ………… = $\dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots.}$ = ……..°

C. Réciproque : Comment prouver qu'une droite est la bissectrice.

➢ La réciproque de la propriété angulaire directe ci dessus est vraie aussi :

Réciproque de la propriété angulaire : Comment prouver qu'une droite est une bissectrice.

	(……. condition ou hypothèse)		(…... résultat ou conclusion)
Quand	$\widehat{BMP} = \widehat{PMA}$ (ou $\widehat{BMP} = \widehat{BMA}/2$)	alors	(MP) est ………………..….…. de l'angle $\widehat{\ldots\ldots\ldots}$

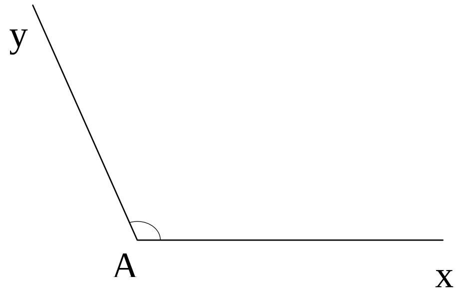
Autrement dit : Lorsque 2 angles adjacents sont de ………………………………………….., la droite portée par le côté commun aux 2 angles est la ……………………………….. de l'angle formé par ces 2 angles adjacents.

Utilité : Cette réciproque sert à prouver qu'une droite est la ………………..………….. d'un ………….

➢ Conséquence : Puisque la propriété angulaire directe et sa réciproque sont vraies, on dit que cette propriété angulaire **caractérise** la bissectrice. En gros, dés que vous avez une bissectrice, il faut penser à une égalité d'angles et inversement.

D. Construction au compas de la bissectrice d'un angle :

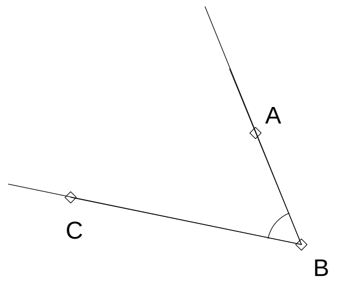
Cette construction de la bissectrice utilise une propriété des diagonales du losange (qui sera vue plus tard).

Construction de la bissectrice en …… étapes.	Construction au Compas.
① Tracer un arc de centre A. Il coupe le côté [Ax) en M et le côté [Ay) en N. ② Tracer 2 arcs, de même rayon, l'un de **centre M**, l'autre de **centre N**. Ils se recoupent en I. ③ Tracer [AI). (AI) est la bissectrice de $\widehat{xAy}$. Les 2 demi-droites [Ax) et [Ay) sont ………………….. par rapport à la bissectrice ……….	 **Codage !**

E. Exercices sur la bissectrice :

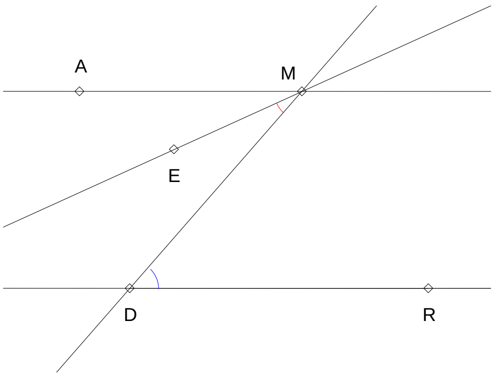
➢ Exercice 1 : Construction au compas ; Propriété angulaire de la bissectrice.

1. *Au compas*, construire en vert l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Comment s'appelle cette droite verte ?
3. Tracer [AC]. La droite verte coupe [AC] en M. M est-il le milieu de [AC] ?
4. On sait que $\widehat{ABC} = 50°$. Calculer la mesure de $\widehat{ABM}$.



Codage !

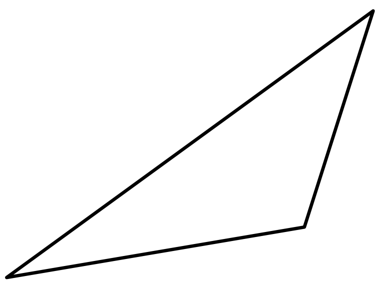
➢ Exercice 2 : Angles alternes-internes ; Réciproque de la propriété angulaire de la bissectrice.



Sur la figure ci contre, on sait que :

(AM) // (DR) $\widehat{MDR} = 60°$ $\widehat{EMD} = 30°$.

1. Montrer que (ME) est la .... de $\widehat{AMD}$.
2. (ME) coupe-t-elle le segment [AD] en son milieu ?



➢ Exercice 3 : Intersection des 3 bissectrices d'un triangle.

Construire au compas les trois bissectrices de ce triangle. Codages !

Que semble-t-on constater ?