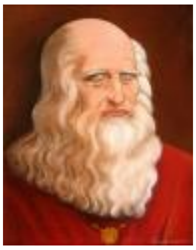
LA SYMETRIE CENTRALE



« Ne lise pas mes principes qui n'est pas mathématicien. » Léonard de Vinci[1].

Non mi legga chi non è matematico, nelli mia principi.

« Correction en rouge et italique. »

- Vous aurez besoin de votre matériel de géométrie pour ce cours : règle, équerre, compas porte crayon, crayons de couleur…
- *Pré requis pour prendre un bon départ :*

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Symétrie axiale : définition et propriétés.			
Construction du symétrique par rapport à un axe.			
Axe de symétrie.			
Lien symétrie axiale↔médiatrice d'un segment (voir mon cours de $6^{ème}$).			
Milieu : définition et propriétés.			

[1] Léonard de Vinci (1452-1519) : L'auteur de la célèbre Joconde impressionna plus ses contemporains par ses qualités scientifiques qu'artistiques. L'analyse scientifique du réel, la réflexion avant l'expérimentation sont les principes de base de la démarche de Vinci, qu'il manifesta aussi bien dans les arts que dans les sciences.

En physique et en astronomie, il traça les voies sur lesquelles s'engageront Copernic, Kepler, et Galilée pour l'étude de la gravitation, du scintillement des étoiles, et du mouvement. Il pressentit les lois de la mécanique des fluides ainsi que, en chimie, celles de la combustion et de la respiration. Au total, un grand nombre des découvertes de la science moderne sont anticipées dans les notes de Léonard, sous une forme balbutiante.

Quant aux Mathématiques, cette discipline revêtait un caractère particulier chez Léonard puisqu'elle était le ferment de toutes les autres. Le recours insistant aux procédés mathématiques était une garantie de rationalité et l'unique moyen de s'assurer des principes stables dans les deux domaines de prédilection où Léonard entendit se « réaliser » : la peinture et la mécanique.

En mécanique, précisément, Léonard s'illustra en inventant un certain nombre de machines dont le principe est toujours en usage (notamment dans l'industrie textile).

NOM et Prénom : ……………………………………………. $5^{ème}$ ……..

➢ <u>Remarque</u> : La structure du présent cours est similaire à celle de mon cours de 6ème sur la symétrie axiale (yalamaths.free.fr / espace 6ème / Symétrie axiale) : il est intéressant de comparer les 2 cours pour voir les points communs et les différences entre les 2 symétries.

I. DE QUOI S'AGIT-IL ?

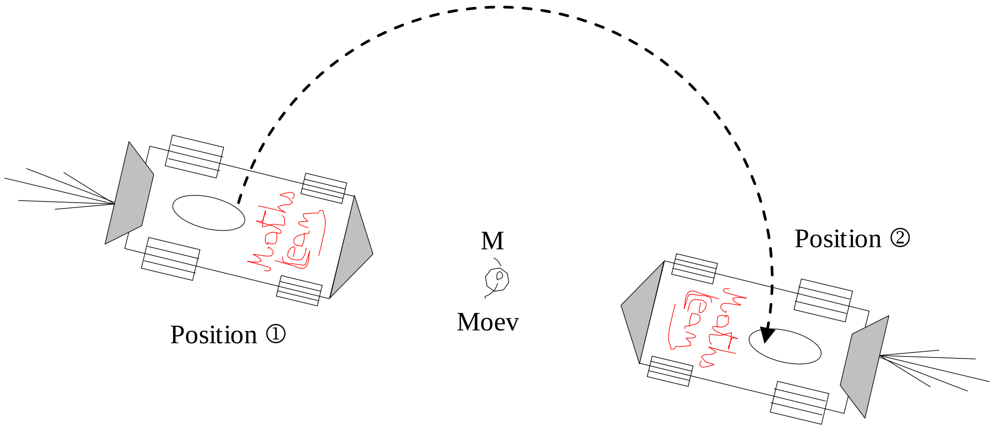
Avant de nous plonger dans les délices de la Symétrie Centrale et de la construction de figures symétriques, il est bon d'en avoir une idée intuitive et claire.

A. Un demi-tour et puis s'en vont…

Qui ne connaît pas la Dragster Maths Team (DMT) ? *Archi connue, ben ouais !*

Elle doit sa renommée mondiale à ses cascades les plus folles, en particulier ses « death têtes à queue » exécutées à plus de 5 km/h ! Complètement dingue !

Rien que pour vous public, Alay de la DMT va exécuter pour vous une de ces mythiques « death têtes à queue ». Attention les yeux, c'est parti ! Vroum vroum…



➢ En fait, lors d'une « death tête à queue », la voiture effectue ce qu'on appelle en langage mathématique « une rotation de mesure d'angle 180°, autour du point M représentant Moev » (voir figure).

Ce mouvement a un autre nom plus usuel : la voiture a effectué un *demi-tour* autour de Moev.

➢ Décalquez la position ① et Moev.

Reposez votre calque sur la position ① et Moev.

Puis faites tourner votre calque d'un demi-tour autour de Moev.

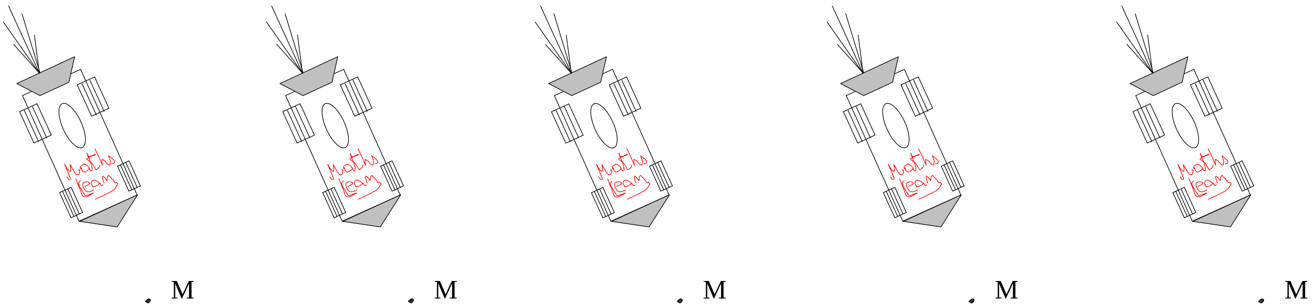
Votre calque se superpose-t-il bien avec la position ② ? *Oui !*

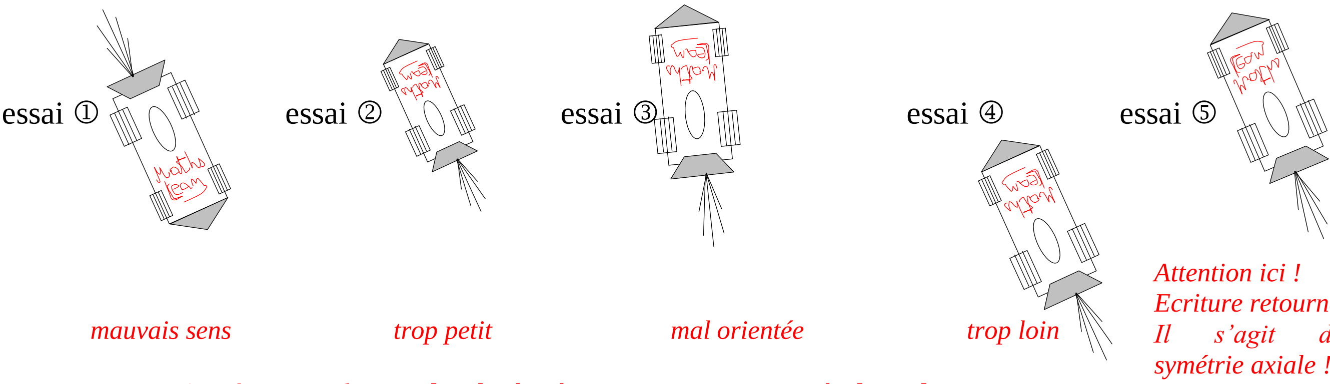
➢ Les positions ① et ② de la voiture sont exactement superposables après **demi-tour** autour de Moev :

On dit que les positions ① et ② sont symétriques par rapport au point M représentant Moev.

On dit aussi que la position ② est la symétrique de la position ① par la symétrie de centre M.

➢ On retrouve la Dragster Maths Team à l'entraînement. Voici plusieurs « death têtes à queue » effectués plus ou moins bien par les pilotes. Barrez les essais qui ne sont pas correctement réalisés (c-à-d ceux qui ne correspondent pas exactement à un demi tour autour du point M représentant Moev) et **expliquez pourquoi**.



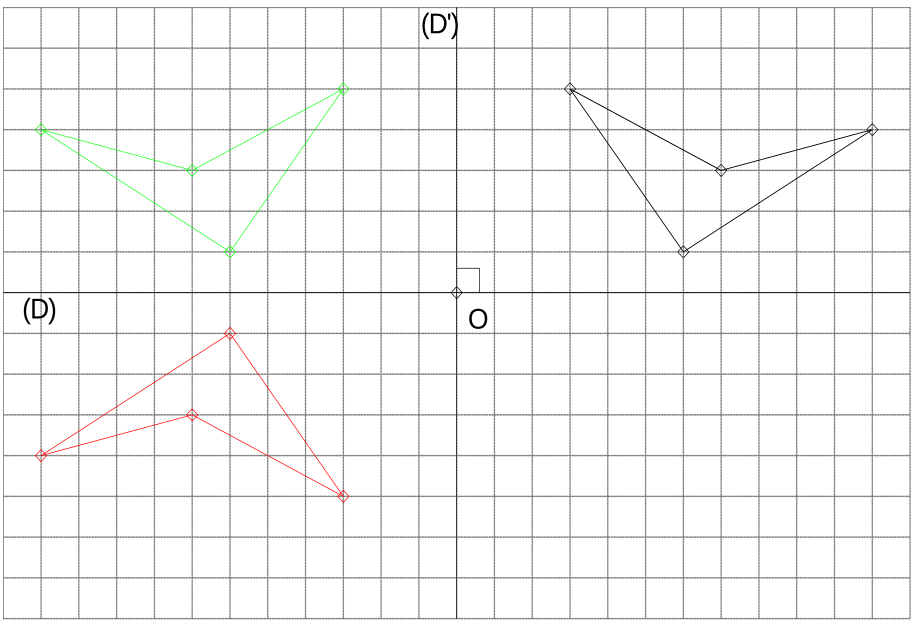


Aucune voiture n'a réussi un bon « death tête à queue » correct, c-à-d un demi tour.

Cette activité précise le sens de l'expression « **superposable après demi-tour autour de M** » :

- **Le symétrique ne doit pas être tourné dans n'importe quel sens :** ***essais n°① ③*****.**
- **Le symétrique ne doit pas être déformé :** ***essais n°② ⑤*****.**
- **Le symétrique ne doit pas être placé n'importe où :** ***essai n°④*****.**

B. De la symétrie axiale à la symétrie centrale :



1) Comment sont les 2 axes (D) et (D') ?

(D) et (D') sont perpendiculaires.

2) Tracez *(en pointillés verts)* le symétrique de la figure par rapport à l'axe vertical (D').

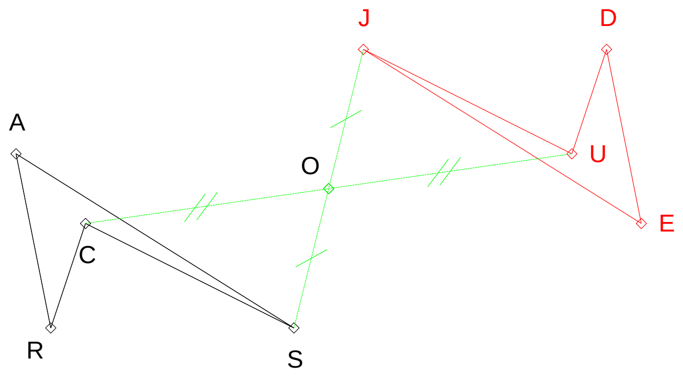
3) Puis tracez *(en traits rouges pleins)* le symétrique de la figure *verte* par rapport à l'axe horizontal (D)

4) Décalquez la fig. noire et le point O. A partir de la position de la fig. noire, faites faire un demi-tour autour de O au calque. Que constatez-vous ?

On constate que la figure noire se superpose exactement à la figure rouge après de mi tour autour de O.

La figure rouge est la symétrique de la figure *noire* par rapport au point *O.*

C. Demi-tour et Mathématiques :



Voici 2 quadrilatères et un point O.

Quand on fait faire à ARCS un demi-tour autour du point O, il se superpose exactement à JUDE (à vérifier avec du calque).

On dit que :

« Les 2 quadrilatères sont donc symétriques par rapport au point (au centre) O. »

❶ Savoir reconnaître des points symétriques :

On va voir si vous savez reconnaître sur cette figure, à vue d'œil, 2 points symétriques par rapport à O :

- Le point E est le symétrique du point A par rapport au centre O !

  En effet, quand on fait faire à A un demi-tour autour du point *O,* les points A et E se *superposent* exactement.

  Le point *U* est le symétrique du point C par rapport à O.

  Le point *J* est le symétrique du point S par rapport à O.

  Le point D est le symétrique du point *R* par rapport à O.
- Quel est le symétrique du point O par rapport à O ? *O* !

❷ Points symétriques et milieu :

Un point, son symétrique et le centre O de la symétrie sont-ils tous les trois placés n'importe comment ? Mon petit doigt me dit que non ! Voyons cela :

- On a vu que U et C sont symétriques par rapport à O. Tracez *en pointillés verts le segment [UC].*

Ce segment passe-t-il par O (le centre de la symétrie) ? *Oui.*

Le point O semble être aussi *le milieu* du segment [UC].

- On a vu que J et S sont *symétriques* par rapport à O. Tracez *en pointillés verts [JS].*

Ce segment passe-t-il par O (le centre de la symétrie) ? *Oui.*

Le point O semble être aussi *le milieu* du segment [JS].

- Généralisez en complétant la phrase suivante :

« Le centre de symétrie semble être le milieu de chaque segment reliant un point et son symétrique. »

Rajoutez le codage manquant sur [UC] et [JS]

❸ Segment image :

Y a-t-il d'autres choses à remarquer ? Regardez bien la figure puis complétez :

[AR] et [ED] sont 2 côtés symétriques : il semble que (AR) *//* (ED) et *AR = AD*

« Un segment et son symétrique semblent être parallèles et de même longueur. »

II. LA SYMETRIE CENTRALE : INTRODUCTION.

A. Sens commun de la symétrie centrale :

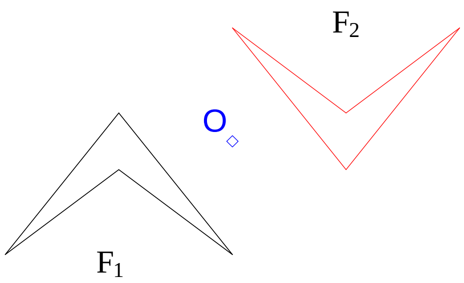
Les 3 activités précédentes p.2 à 4 nous permettent d'affirmer :

La **Symétrie Centrale**, c'est ce qui se passe quand on fait **un demi-tour autour d'un point fixe.**

Plus précisément :

Deux figures sont symétriques par rapport à un point lorsqu'elles se superposent parfaitement après demi-tour autour de ce point.

B. Vocabulaire et notations :



Voici deux flèches F_1 et F_2 superposables après demi-tour autour du point O.

Les flèches F_1 et F_2 sont donc symétriques par rapport au point O.

En reprenant l'exemple de cette situation, on peut dire que :

❶ Le point O prend le nom de **Centre de symétrie**.

❷ On parle ici de **Symétrie centrale de centre O**.

On emploie aussi l'expression équivalente :

- *Symétrie **par rapport au point O.***

Quelque soit le nom utilisé, cette symétrie centrale se note : $\mathbf{s}_{O}$ Le centre écrit bien en dessous du S.

❸ On dit que :

- F_1 et F_2 **sont symétriques** par rapport au point (au centre) O.
- ou bien que F_2 est l'**image** de F_1 par la symétrie centrale $\mathbf{s}_{O}$.
- ou bien que F_2 est **le symétrique** de F_1 par la symétrie centrale $\mathbf{s}_{O}$.
- ou bien que F_2 est **le symétrique** de F_1 par rapport au point (au centre) O.

Dans tous les cas, on note : $\mathbf{s}_{O}(F_1) = F_2$ ou $F_1 \xrightarrow{\mathbf{s}_{O}} F_2$

➢ <u>Exercice sur le vocabulaire et les notations :</u>

① En vous inspirant du ❷ de l'encadré ci dessus, comment note-t-on :

La symétrie centrale de centre K : s_K La symétrie par rapport au point P : s_P

② En vous inspirant du ❸ de l'encadré de la page précédente, comment note-t-on mathématiquement :

M est le symétrique de N par rapport à L ⟺ $s_L(N) = M$

A' est l'image de A par la symétrie de centre Ω ⟺ $s_\Omega(A) = A'$

N est le symétrique de M par la symétrie de centre P ⟺ $M \xrightarrow{s_P} N$

P et P' sont symétriques par rapport à J ⟺ $P \xrightarrow{s_J} P'$

③ Traduire en français les écritures mathématiques suivantes :

s_A ⟺ *La symétrie de centre A.*

$s_V(P) = P'$ ⟺ *P' est le symétrique du point P par la symétrie de centre V.*

$L \xrightarrow{s_K} P$ ⟺ *P est l'image de L par la symétrie de centre K.*

C. Etymologie du mot symétrie :

Le mot grec *summettria* (*juste mesure)* est formé de *sym* (*avec)* que l'on retrouve dans sympathique et de *metron* (*mesure)*. Pour les architectes romains, *symmetria* signifie *proportion* mais parfois déjà *symétrie*, considérée à l'époque comme les justes mesures.

Le mot *symétrie*, apparaît à la Renaissance dans le même sens. Il insiste sur les bonnes proportions d'un édifice pour le rendre plus esthétique.

Au 18$^{\text{ème}}$ siècle, il perd définitivement un « m » et s'étend dans différentes disciplines comme la littérature ou la peinture pour désigner la régularité dans les motifs d'une œuvre. L'adjectif *symétrique* apparaît en architecture au 18$^{\text{ème}}$. Le sens d'aujourd'hui se développe vers la fin du 18$^{\text{ème}}$.

Maintenant que le vocabulaire et les notations sont en place, on va définir « proprement » (mathématiquement) ce qu'est une symétrie centrale !

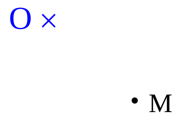
Soient donc un point M et un point fixe O donnés :

« Définir la symétrie s_O de centre O, c'est être capable de donner (construire) sans aucun doute possible l'image de n'importe quel point M du plan par cette symétrie. »

D'où les définitions des pages qui vont suivre :

III. POINTS SYMETRIQUES.

Situation :



Un point fixe O est donné. On considère donc s_O la symétrie de centre O.

Puis un point M est placé.

A. Définition de deux points symétriques :

Il s'agit de définir mathématiquement ce qu'est le symétrique du point M par rapport au centre O.

On va y arriver grâce à l'activité précédente C] p.4. Il y a 2 cas :

❶ Cas particulier où le point **M est le centre O** :

Lorsque **M est confondu avec le centre de symétrie**, le symétrique de M est **lui-même** !

Le symétrique du centre O est donc *lui même !*

❷ Cas général où le point **M est différent du centre O** :

Lorsque M est différent du centre O, son symétrique est l'unique point M' qui vérifie la condition :

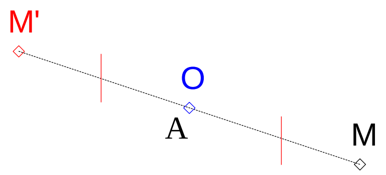
① **O doit être le milieu du segment [MM'].**

- Figure :

❶ Sur la figure ci contre, le point A est confondu avec le centre de la symétrie O :

donc le symétrique de A est *lui-même c-à-d A* !

Comme le symétrique du point A est lui-même, on dit que A est un ***point invariant****.*



❷ Le point M est différent du centre O :

le symétrique de M par rapport à O est le seul point M' tel que :

O est *le milieu* de [MM'].

Rajouter en rouge le codage qui indique que O est le milieu de [MM'].

- Remarque :

La symétrie est l'action (la transformation) qui permet de "passer" d'un point à un autre en faisant un demi-tour autour d'un point fixe. On ne voit donc pas la symétrie centrale : ce n'est pas un objet !

Ce que l'on voit, c'est le résultat de cette symétrie centrale **après le demi-tour.**

B. Vocabulaire et notations :

En considérant la figure précédente, on dit que :

- M et M' **sont *symétriques*** par rapport au point (centre) O.
- ou bien que M' est l'**image** de M par la symétrie centrale s_O .
- ou bien que *M'* est **le symétrique** de *M* par la symétrie de centre **O.**
- ou bien que M' est **le symétrique** de M par rapport à O.

Dans tous les cas, on note : $M \xmapsto{s_O} M'$ ou bien $s_O(M) = M'$

Maintenant que l'on a défini mathématiquement le symétrique d'un point, on veut pouvoir le construire !

C. Construction du symétrique d'un point par rapport au centre :

On veut construire le symétrique d'un point A par rapport au centre O. Il y a deux cas :

1. Cas ❶ : A = O. Autrement dit, le point A est le centre O :

Dans ce cas très particulier où le point A est confondu avec le centre de symétrie O, inutile de réfléchir très longtemps[2] ! Le symétrique du point A par rapport au centre O est *lui même* ! C-à-d $s_O(A) = A$

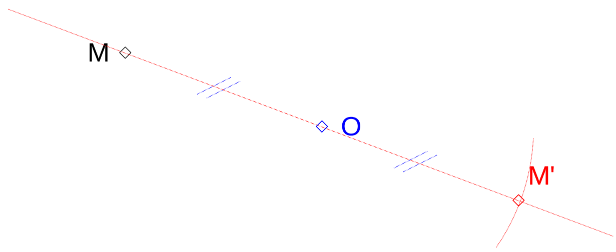
Le centre de symétrie a pour symétrique *lui même* ! **L'unique point laissé invariant par une symétrie centrale est le centre de symétrie.**

2. Cas ❷ : A ≠ O. Autrement dit, le point A est distinct du centre O :

Voyons ce 2ème cas plus général où le point A n'est pas confondu avec le centre de symétrie O.

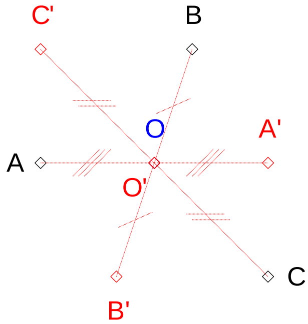
La définition p.7 cas ❷ nous donne indirectement la méthode de construction :

➢ **Construction (à la règle et au compas) du symétrique d'un point M par rapport à un point O :**

Programme de construction en 3 étapes.	Construction à la règle puis au compas.
❶ A la règle, tracer en pointillés noirs la droite (MO). ❷ Sur la droite (MO) : On reporte au compas (ou à la règle graduée) la longueur MO à partir du centre O. ❸ On marque en vert le point M' et on a bien : O *milieu* de [MM']. *(codage !)* M' est le symétrique de M par rapport à O.	 *Traits de construction en pointillés noirs **légers** !* *N'oubliez pas les codages !*

➢ Exercice : **En appliquant rigoureusement la méthode ci-dessus :**

Construire *en rouge* A', B', C' et O', les images respectivement de A, B, C et O par la symétrie de centre O.



codages !

Remarque : puisque O est le centre de la symétrie, alors son image est lui même.

[2] Cela ne changera pas beaucoup de d'habitude n'est-ce pas ? ……….

IV. SYMETRIE CENTRALE ET QUADRILLAGE : CONSTRUCTION.

Le quadrillage facilite grandement la construction de symétriques de points : il permet de se passer de règle et de compas ! Voyons cela.

Sur un des nœuds du quadrillage, on a fixé O le centre de symétrie et on place un point A sur un autre nœud.

Pour placer le symétrique A' de A par rapport à l'axe, on procède ainsi :

❶ **Horizontalement,** on compte le nombre de carreaux qui nous amènent au dessus du centre O.

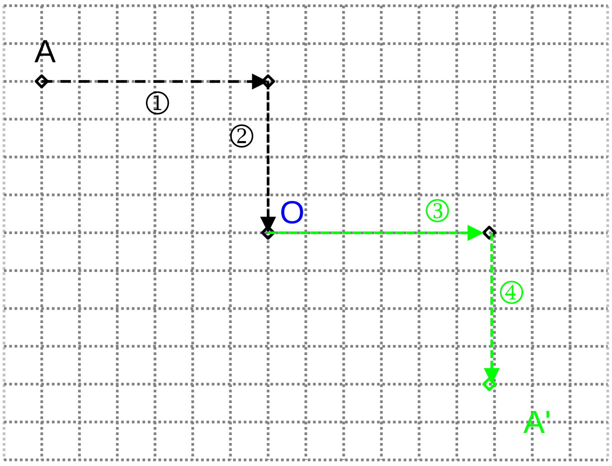
❷ A partir de là, on compte **verticalement** le nombre de carreaux pour aller jusqu'à O.

On connaît maintenant le mouvement horizontal-vertical qui va de A vers O.

Il ne reste plus qu'à reproduire le même mouvement à partir de O :

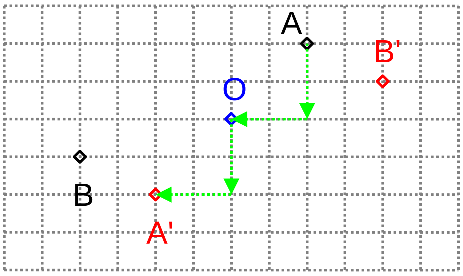
❸ On parcourt **horizontalement** le même nombre de carreaux qu'en ①.

❹ puis **verticalement**, on parcourt le même nombre de carreaux qu'en ②.



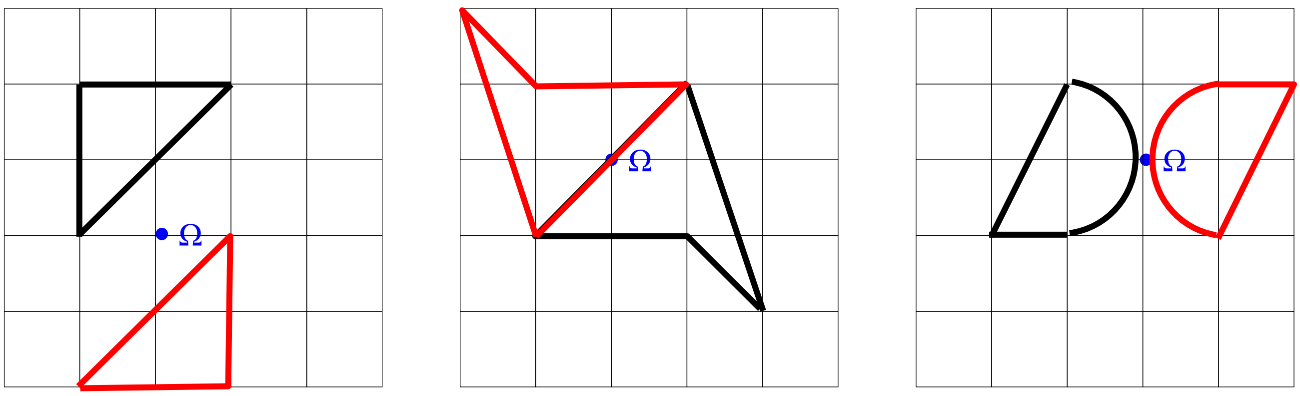
O est-il bien le milieu de [AA'] ? *Oui.* Donc A' est bien le symétrique de A par rapport à O.

A vous maintenant : sans compas ni règle **mais en suivant le quadrillage,** placer *en rouge* A' et B', les symétriques de A et B.



➢ <u>Exercice</u> :

En suivant uniquement le quadrillage, tracer *en rouge* les symétriques par rapport à Ω des figures suivantes.



Vérifiez mentalement que les figures font bien un demi-tour autour de Ω.

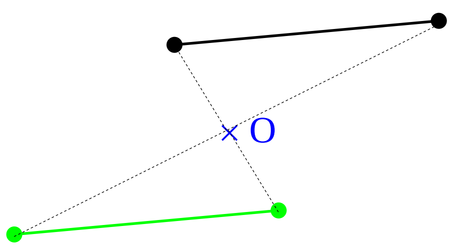
Maintenant que nous savons les bases (définitions, notations et construction), nous allons voir quelques propriétés des symétries centrales.

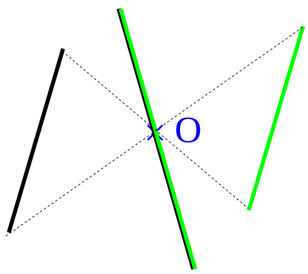
V. PROPRIETES DES SYMETRIES CENTRALES.

A. Transformation par les symétrie centrales des figures de base :

➢ Tracer *en vert* les symétriques par rapport au point O : du segment, des 2 droites, puis du cercle.

Traits de construction légers, en pointillés noirs. Images en vert. Codages !





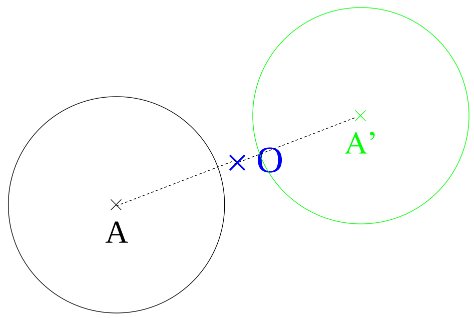


Image d'un segment

Le symétrique d'un segment est aussi un *segment* :

① de même *longueur*

② *parallèle*

Image de droites

• La symétrique d'une droite est aussi une *droite*, qui est *parallèle.*

• Quand la droite passe par le centre de symétrie, son image est *elle même* !

Image d'un cercle

Le symétrique d'un cercle est aussi un *cercle :*

① son centre est le *symétrique* du centre de l'ancien cercle.

② de même *rayon.*

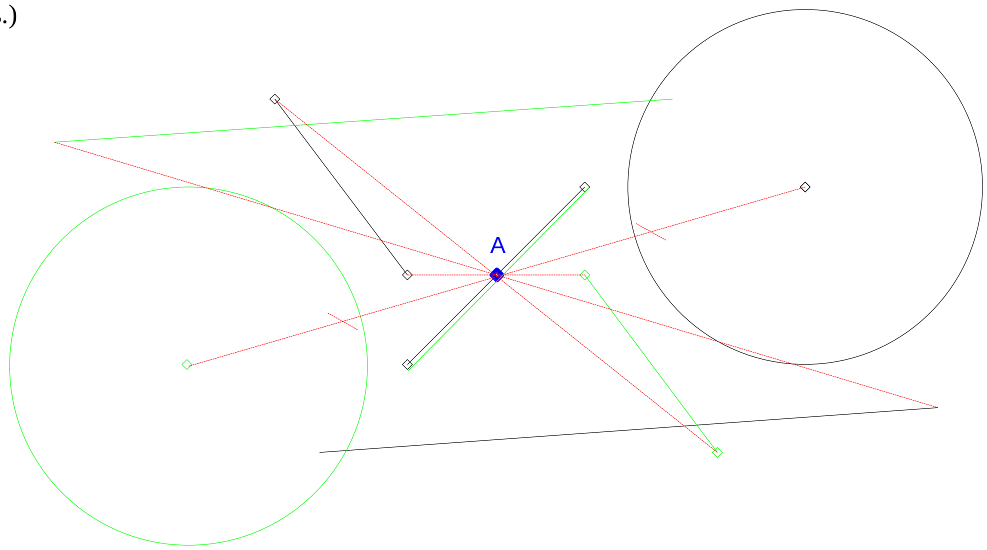
3 propriétés à retenir :

① Deux segments symétriques par rapport à un point sont *parallèles et de même longueur.*

② Deux droites symétriques par rapport à un point sont *parallèles*[3].

③ Deux cercles symétriques par rapport à un point ont *même rayon.*

➢ Exercice : Construire *en vert*, à la règle et au compas, les symétriques des 2 segments, de la droite et du cercle par rapport à A. (contrôlez mentalement que la figure fait un demi tour. Vérifiez que les côtés symétriques des 2 figures sont parallèles.)



---

[3] Cette propriété est-elle vraie pour la symétrie axiale ? *Non ! Sauf dans le cas particulier et rare où la droite est parallèle à l'axe de symétrie.*

B. 4 propriétés de conservation des symétries centrales :

Les 4 propriétés de conservation qui vont suivre traduisent la non-déformation des objets lors d'un demi-tour !

Conservation ❶ Les symétries centrales conservent les Longueurs (donc le milieu).

① Le symétrique d'un segment est aussi un *segment de même longueur.*

② En conséquence, les symétries centrales conservent aussi *le milieu* :

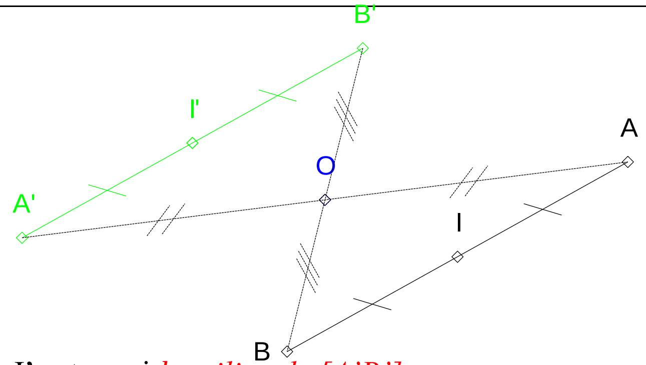
« Le symétrique du milieu d'un segment est le *milieu* du segment image. »

- Figure : Soit la symétrie de centre O.

Tracer *en vert* :

[A'B'], le symétrique du segment [AB]

et I', le symétrique du milieu I du segment.



Vous remarquez que l'image I' est aussi *le milieu de [A'B'].*

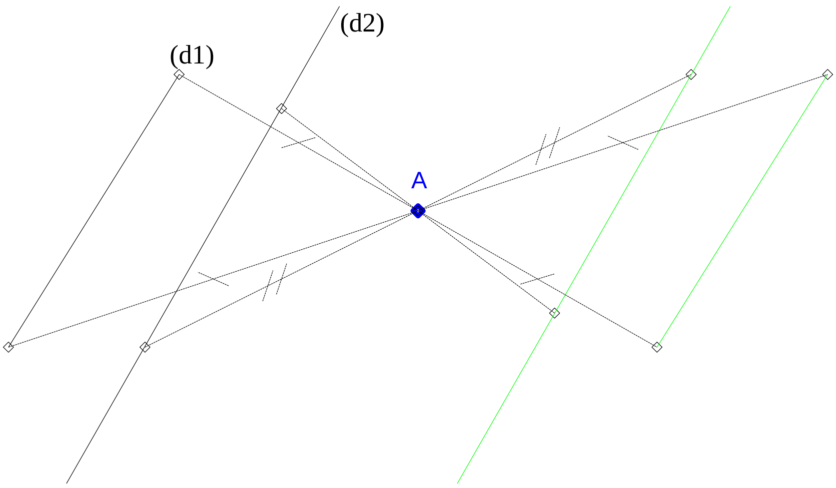
Rédaction : Puisque I est le *milieu* de [AB], alors, par conservation du milieu, son *symétrique* I' est aussi le *milieu* du segment image [A'B'].

Conservation ❷ Les symétries centrales conservent le Parallélisme.

« Les symétriques de deux droites parallèles sont *deux droites qui sont aussi parallèles.* »

- Figure : Soit la symétrie de centre A.

Tracer *en vert* les symétriques (d'1) et (d'2) des 2 droites parallèles (d1) et (d2).



Vous remarquez que les deux droites images (d'1) et (d'2) sont aussi *parallèles* entre elles !

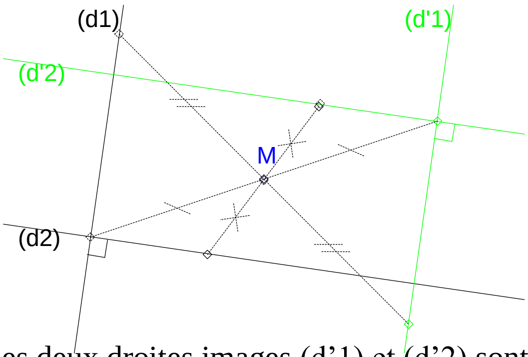
Rédaction : Puisque (d1) // (d2), alors, par conservation du parallélisme, leurs *symétriques* (d'1) et (d'2) sont aussi *parallèles.*

Conservation ❸ Les symétries centrales conservent les mesures d'angles et la perpendicularité.

① **Le symétrique d'un angle est aussi un angle de même *mesure.***

② **En conséquence, les symétriques de deux droites perpendiculaires sont deux droites qui sont aussi *perpendiculaires* entre elles.**

- Figure : Tracer *en vert* (d'1) et (d'2) les symétriques des 2 droites perpendiculaires (d1) et (d2) par rapport à M.



Codage !

Vous remarquez que les deux droites images (d'1) et (d'2) sont aussi *perpendiculaires* entre elles !

Rédaction : Puisque (d1) ⊥ (d2), alors, par conservation de la mesure d'angle (donc de la perpendicularité), leurs *symétriques* (d'1) et (d'2) sont aussi *perpendiculaires.*

*Attention ! **Il n'est nulle part dit qu'une droite et son image sont perpendiculaires, ce qui est toujours faux !** Regardez (d1) et (d'1). D'après le cours IV A] p.10, elles sont, elles sont parallèles !*

- Exercice : Prouver sur la figure au dessus que les droites (d1) et (d'2) sont perpendiculaires.

Puisque (d2) et (d'2) sont symétriques par rapport à M, alors (d2) // (d'2).

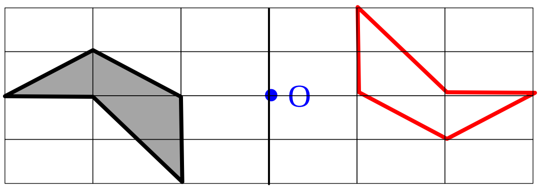
Puisque $\begin{cases}(d'2) \,//\, (d2) \\ (d1) \perp (d2)\end{cases}$ *alors (d1) ⊥ (d'2).*

Conservation ❹ Les symétries centrales conservent les Aires.

« Une figure et sa figure symétrique ont la même *aire.* »

Sans compas, tracez *en rouge* le symétrique de la figure grise par rapport à O.

Ont-elles la même aire ? *Evidemment que oui !*



Rédaction : Puisque la figure rouge est la *symétrique* de la figure grise, alors, par conservation des aires :

Aire (figure rouge) = Aire (figure grise)

❺ Conséquences des 4 propriétés de conservation.

Puisque les symétries centrales conservent les distances, les mesures d'angles, le parallélisme… alors quelle est l'image par une symétrie centrale :

d'un triangle isocèle ? *un triangle isocèle identique et superposable !* équilatéral ? *un triangle équilatéral identique et superposable !* d'un parallélogramme ? *Un parallélogramme identique et superposable !* d'un losange ? *Un losange identique et superposable !* d'un rectangle ? *Un rectangle identique et superposable !* d'un carré ? *Un carré identique et superposable !*

- **<u>Exercice fondamental : Propriétés de conservation ; Construction du symétrique d'une figure.</u>**

Sur la figure ci dessous, on sait que : (d1) // (d2) et (d3) ⊥ (d1).

Placer D le milieu de [AB]. Codage ?

1. *Sans rien tracer et en vous inspirant des propriétés de conservation,* répondez aux questions suivantes :

a) Comment seront la droite (d3) et son image (d'3) ? *Puisque (d3) et (d'3) symétriques, alors (d3) // (d'3).*

b) Pourquoi D', l'image de D sera-t-il le milieu du segment image [A'B'] ? *Puisque D milieu de [AB] alors, par conservation du milieu, son symétrique D' sera lui aussi milieu du segment symétrique [A'B'].*

c) Comment seront (d'1) et (d'2), les images de ($d_{1)}$ et (d_2) ? *Puisque (d1) // (d2), alors, par conservation du parallélisme, leurs symétriques seront aussi parallèles : (d'1) // (d'2).*

d) Pourquoi aura-t-on (d'1) ⊥ (d'3) ? *Puisque (d3) ⊥ (d1), alors, par conservation de la perpendicularité, leurs symétriques seront aussi perpendiculaires : (d'3) // (d'1).*

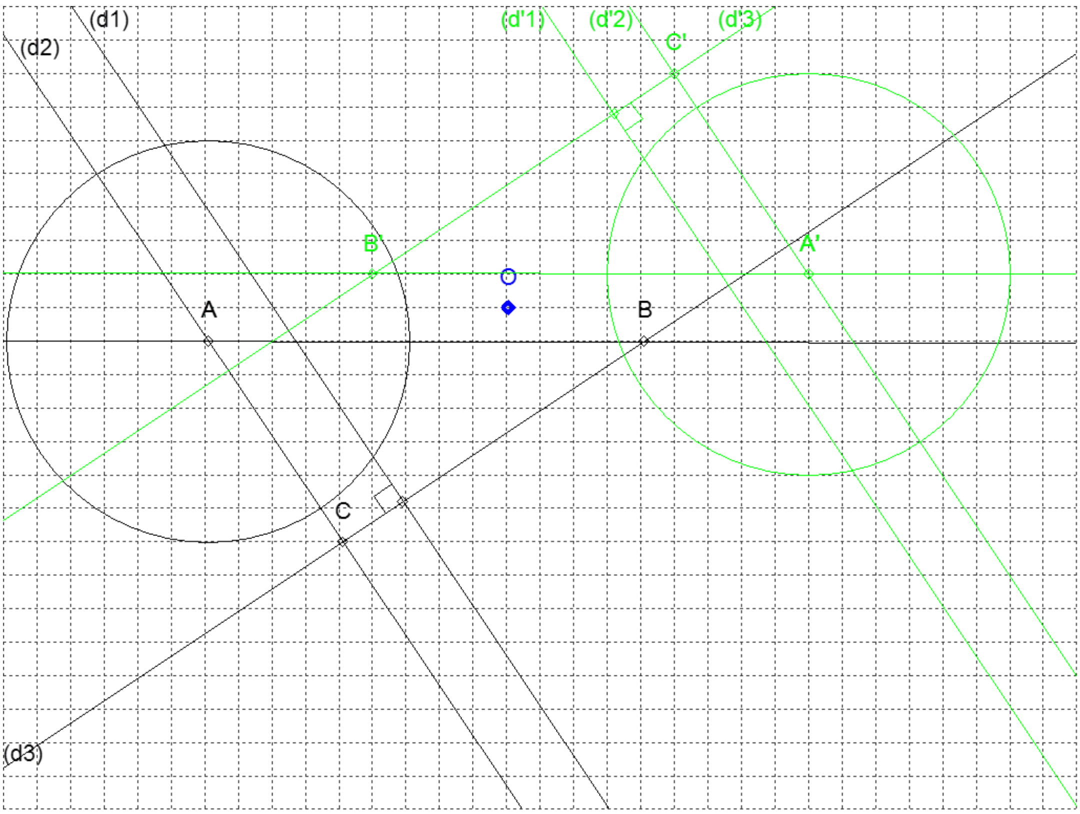
e) Comment seront les mesures de $\widehat{ABC}$ et de son symétrique $\widehat{A'B'C'}$?

Puisque $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ symétriques, alors, par conservation des mesures d'angle, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

f) Comment seront les rayons du cercle et de son symétrique ?

Puisque Les 2 cercles sont symétriques, alors ils ont même rayon.

2. En vous aidant du quadrillage, tracez *en vert* le symétrique par rapport à O de toute la figure.



3. Montrer que (d'3) est perpendiculaire à (d1).

Puisque (d3) et (d'3) symétriques, alors (d3) // (d'3).

Puisque $\begin{cases} (d'3) \,//\, (d3) \\ (d1) \perp (d3) \end{cases}$ *alors (d'3) ⊥ (d1).*

VI. LIEN « POINTS SYMETRIQUES ↔ MILIEU D'UN SEGMENT ».

La définition p.7 nous permet d'écrire les 2 relations très importantes suivantes :

Passage « Points Symétriques → Milieu » :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	A et B sont symétriques par rapport à un point O	alors	O est le *milieu* du segment *[AB].*

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un point est le *milieu* d'un segment.

Réciproquement :

Passage « Milieu → Points Symétriques » :

	(1 condition ou hypothèse)		(1 résultat ou conclusion)
Quand	O est le *milieu* d'un segment [AB]	alors	A et B sont *symétriques* par rapport à *O.*

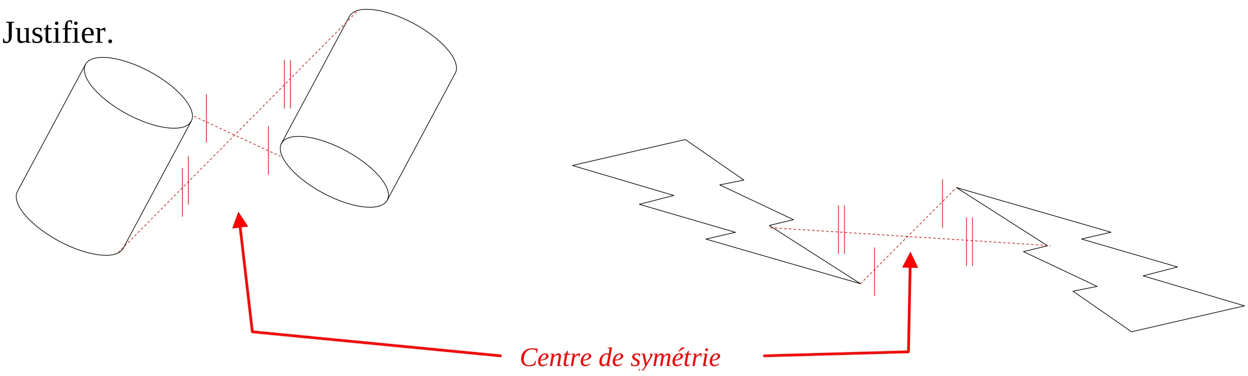
Utilité : Cette propriété sert à prouver que 2 points sont *symétriques* par rapport à un 3ème point.

Ce lien profond dit une chose très importante : quand vous voyez « symétrie centrale », il faut tout de suite penser « milieu » ; quand vous voyez « milieu », il faut savoir traduire « symétrie centrale » !

Ce lien profond est souvent mis en jeu dans les problèmes de construction et dans les exercices de raisonnement.

➢ Problèmes de construction :

① Pour chacune des 2 paires de figures symétriques, sans rien mesurer, construire *en rouge* le centre de symétrie. Justifier.



Méthode :

① On repère 2 côtés qui semblent symétriques (parallèles et de même longueur).

On joint les extrémités de ces 2 segments symétriques, en croisant parce qu'il y a demi-tour.

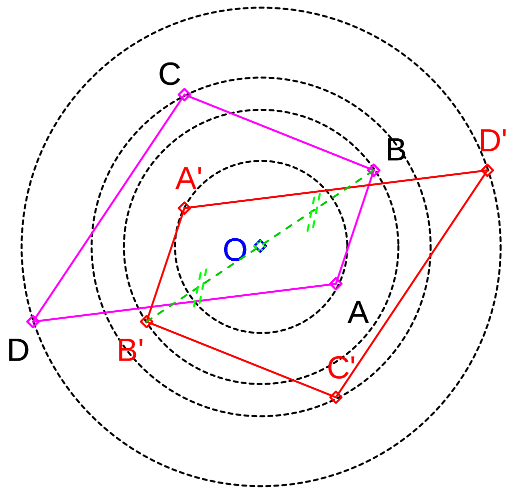
② Le centre de symétrie est, par définition le milieu de tous les segments reliant par un point et son image, donc le centre est à l'intersection de tous ces segments.

③ On peut vérifier que ce point d'intersection est bien le milieu de tout segment [point ; image].

② Sur la figure ci contre, O est le centre de tous ces cercles concentriques.

En utilisant uniquement le côté non gradué de la règle, construire le symétrique de ABCD par rapport à O.

Rédiger et justifier votre méthode.



- *Comment construire B', l'image de B ?*

Puisque B et B' doivent être symétriques par rapport à O, alors O doit être le milieu de [BB'].

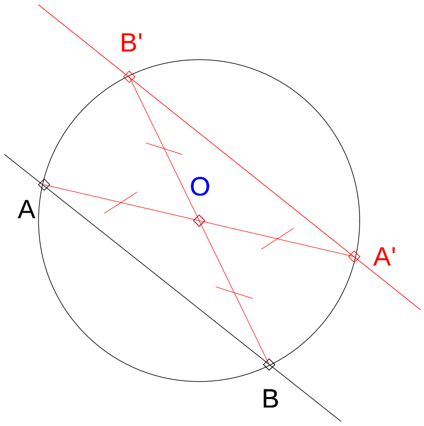
Donc [BB'] doit être un diamètre du cercle de centre O passant par B.

On trace ce diamètre passant par B, on obtient donc B'.

- *Et ainsi de suite pour tous les autres points.*

③ Sur la figure ci contre, O est le centre du cercle passant par A et B.

En utilisant uniquement le côté non gradué de la règle, construire une droite parallèle à (AB). Rédiger et justifier votre méthode.



- *Analyse : On sait que lorsque 2 droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.*

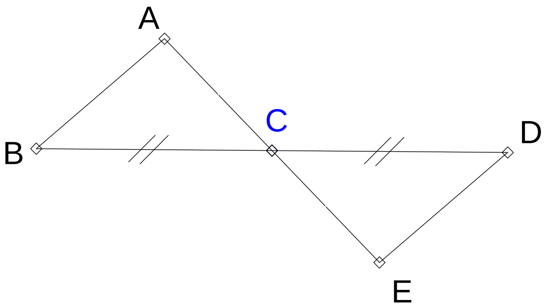
Il suffit dont de tracer l'image de (AB) par symétrie centrale. Reste à savoir par rapport à quel point !

- *Comme on nous dit de n'utiliser que la règle non graduée, la méthode de l'exercice ② ci dessus avec le cercle de centre O et ses diamètres fonctionne.*

On construit donc A' et B',les symétriques par rapport à O de A et B. La droite (A'B') est parallèle à (AB).

- <u>Lien « Symétrie Centrale ↔ Milieu ».</u>

④ Sur la figure codée à droite, on sait aussi que A est le symétrique de E par rapport à C.



1. Montrez que B et D sont symétriques par rapport à *C.*

D'après le codage, C est le milieu de [BD], donc B et D sont symétriques par rapport à C.

2. Montrez que C est le *milieu* de [AE].

Puisque A et E sont symétriques par rapport à C, alors C est le milieu de [AE].

3. Montrez que [AB] et [ED] sont *symétriques* par rapport à C. Que peut-on dire alors pour AB et ED ?

Puisque $\begin{cases} \text{E symétrique de A par rapport à C} \\ \text{D symétrique de B par rapport à C} \end{cases}$ *alors [ED] symétrique de [AB] par rapport à C.*

Puisque [ED] symétrique de [AB] par rapport à C, alors $\begin{cases} [ED] \,//\, [AB] \\ AB = ED \end{cases}$

4. Montrez que (AD) // (EB).

On montre facilement que [AD] symétrique de [EB] par rapport à C, donc (AD) // (EB).

VII. CENTRE DE SYMETRIE D'UNE FIGURE.

Avez-vous remarqué que certains objets qui nous entourent dans la vie quotidienne (tables, ronds points, panneaux, etc.) restent identiques après demi-tour sur eux même.

Ils possèdent en fait un centre de symétrie.

A. Définition du centre de symétrie :

Un point O est le **centre de symétrie** d'une figure lorsque :

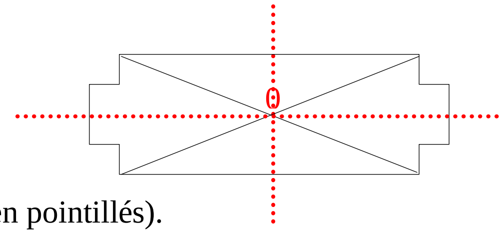
- le symétrique de cette figure par rapport à ce point O est la figure elle même !

Autrement dit : Lorsque la figure et son image sont confondues après un demi-tour autour de O.

➢ Exemple :

La figure à droite possède un centre de symétrie : le point O.

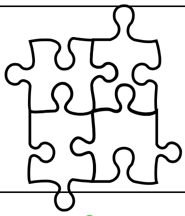
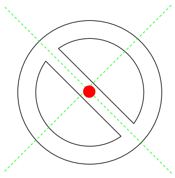
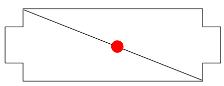
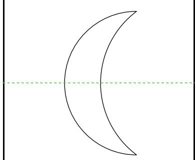
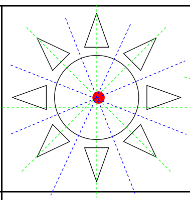
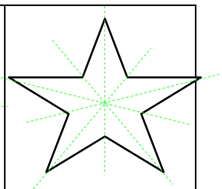
En effet, quand on fait faire un demi-tour à la figure autour de O, elle se superpose à elle même.



Remarque : La figure possède aussi 2 axes de symétrie perpendiculaires (en pointillés).

B. Exercices sur le centre et les axes de symétrie :

① Tracer, s'ils existent : le centre de symétrie *en rouge* et le ou les axes de symétrie *en vert*.

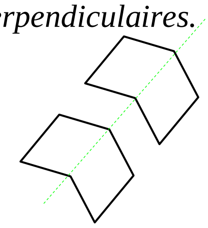
• centre - - - - axe						
nb d'axes :	*0*	*2 axes ⊥*	*0 à cause de la diagonale*	*1*	*8*	*5*
nb de centre :	*0 ! à cause du 4ème puzzle*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*

② • Parmi les chiffres quels sont ceux avec un centre de symétrie : 0 ; 8 (2 ; 5 ; 1 cela dépend de l'écriture).

• Parmi les voyelles majuscules, citez celles qui ont un centre de symétrie : O (I, cela dépend de l'écriture).

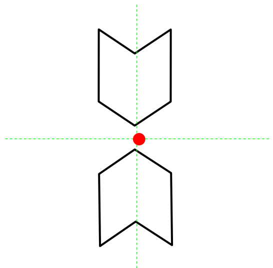
③ Les 4 figures ci dessous ont-elles ou non un (ou plusieurs) axe(s) de symétrie ? Si oui, le(s) tracer *en vert* puis *indiquer leur nombre. Coder les axes perpendiculaires.*

Ont-elles un centre de symétrie ? Si oui le placer *en rouge* et *indiquer le nombre. Coder les axes perpendiculaires.*



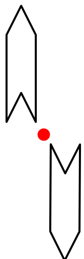
1 axe

0 centre



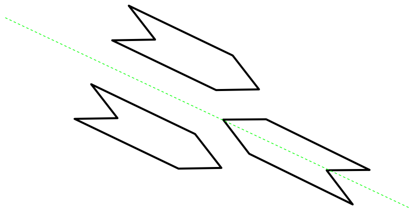
2 axes perpendiculaires

1 centre



0 axe

1 centre

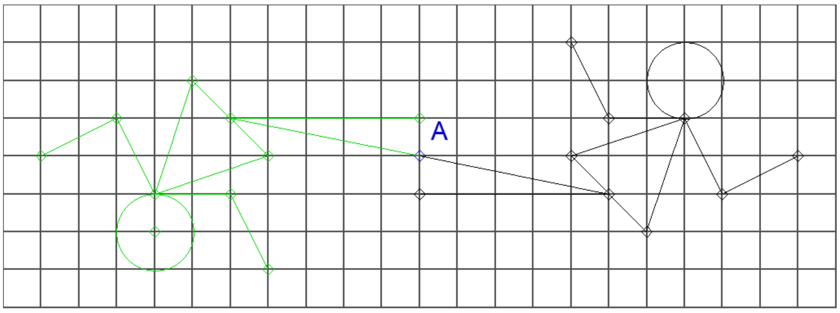


1 axe

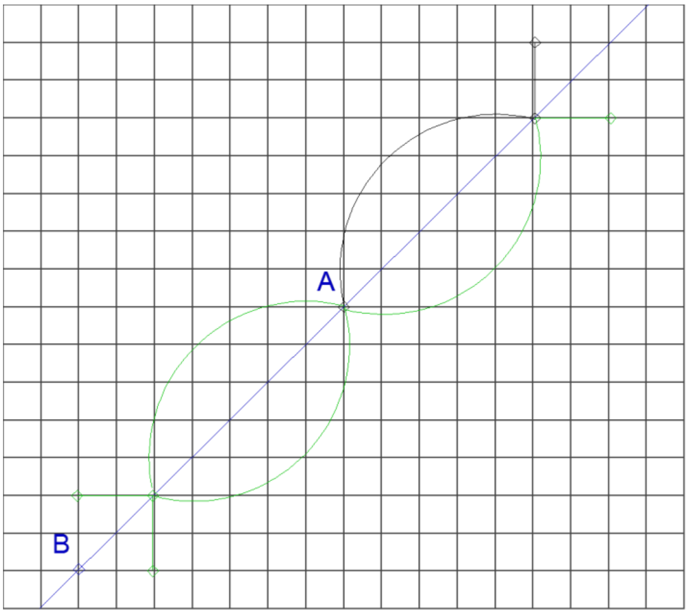
0 centre

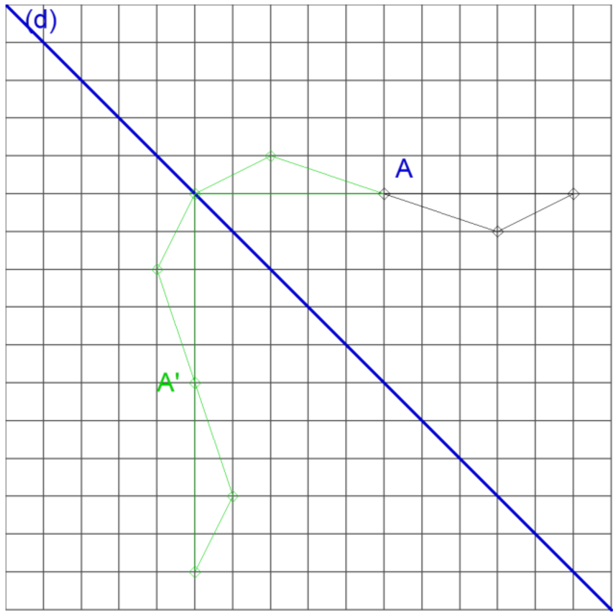
④ Compléter *en vert* la figure suivante afin que le point A soit centre de symétrie :

Il suffit de tracer le symétrique de la figure par rapport à A.



⑤ Pour chacune de ces 2 figures, compléter *en vert* afin que le point A soit centre de symétrie **et** que la droite (d) soit en même temps axe de symétrie. *Il suffit de tracer les symétriques de la figure par rapport à A et à (d).*



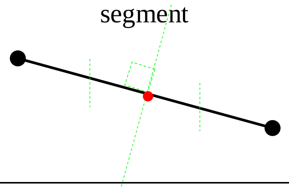
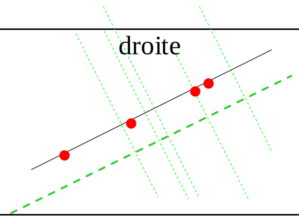
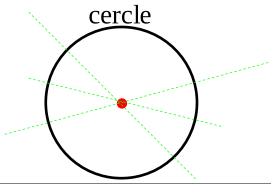


VIII. CENTRE DE SYMETRIE ET FIGURES USUELLES.

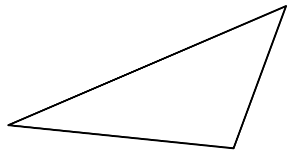
A. Segment, droite et cercle :

Tracer s'ils existent : *le ou les centres de symétrie en rouge* et *le ou les axes de symétrie en vert*.

Coder les axes perpendiculaires.

• centre - - - - axe	segment 	droite 	cercle 
nombre d'axe(s) :	*2 axes :* *la médiatrice et la droite portant le segment.*	*Infinité d'axes + 1 :* *toutes les perpendiculaires à la droite et la droite elle-même !*	*Infinité : toutes les droites portant les diamètres*
nombre de centre(s) :	*1 centre : le milieu.*	*Infinité de centres :* *tous les points de la droite !*	*1 centre : le centre du cercle.*

B. Symétrie et Triangles :



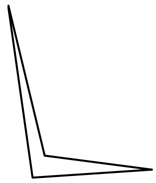
Ce triangle quelconque a-t-il un centre de symétrie ? ………..

Essayez de dessiner à droite un triangle qui a un centre de symétrie :

Est ce possible ? *Impossible !*

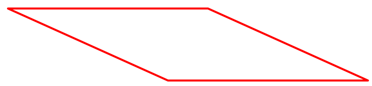
Attention, ***aucun*** triangle ne possède de centre de symétrie !

C. Symétrie et Quadrilatères :



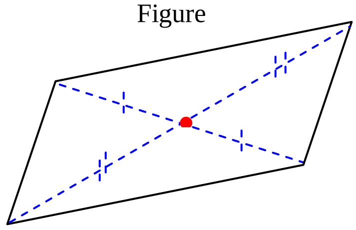
Ce quadrilatère quelconque a-t-il un centre de symétrie ? *Non !*

Essayez de dessiner à droite un quadrilatère qui a un centre de symétrie :



Ce quadrilatère est-il particulier ? *Oui !*

A quelle famille appartient-il ? *A la famille des parallélogrammes.*

1. Le quadrilatère ayant un centre de symétrie s'appelle *un parallélogramme.* 2. Son centre de symétrie est le point d'intersection de ses *2 diagonales.* 3. Le centre de symétrie est donc le milieu commun des 2 diagonales.	Figure  • centre de symétrie

➢ *Deux remarques :*

① Attention ! Nous rappelons que ***le parallélogramme quelconque n'a pas d'axe de symétrie !***

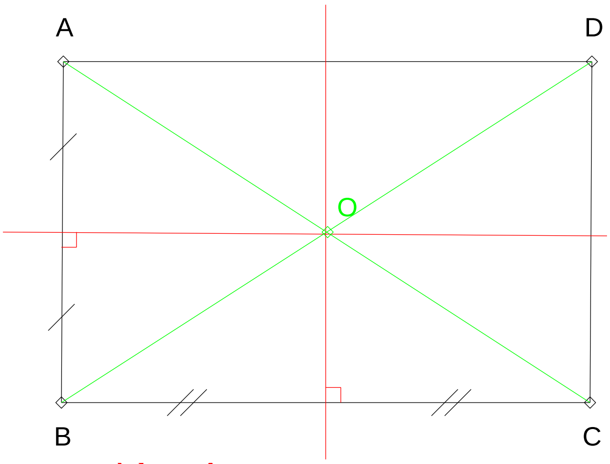
② Puisque le rectangle, le losange et le carré font partie de la famille des parallélogrammes, tous les trois possèdent aussi un centre de symétrie qui est l'intersection des 2 diagonales.

- <u>Exercice : Vrai ou faux ?</u>

Soit ABCD un rectangle de centre O, l'intersection des diagonales.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

On fait d'abord in croquis avec les diagonales, les 4 axes de symétrie qui sont les médiatrices, et le centre O de symétrie qui est l'intersection des diagonales.



1. (AC) est un axe de symétrie.

Faux : une diagonale de rectangle n'est pas axe de symétrie !

2. A et C sont symétriques par rapport à O.

Vrai : O est le milieu de [AC].

3. A et C sont symétriques par rapport à (BD).

Faux : car (AC) non perpendiculaire à (BD).

4. O est centre de symétrie.

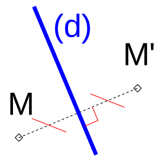
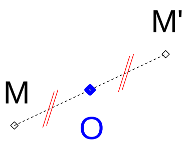
Vrai : par demi-tour autour de O, le rectangle se superpose exactement à lui même.

5. ABCD a 4 axes de symétrie.

Faux : 2 axes de symétrie seulement, à savoir les 2 médiatrices des paires de côtés parallèles.

IX. RECAPITULATIF.

Récapitulons ce que l'on sait sur les symétries sous forme de tableau :

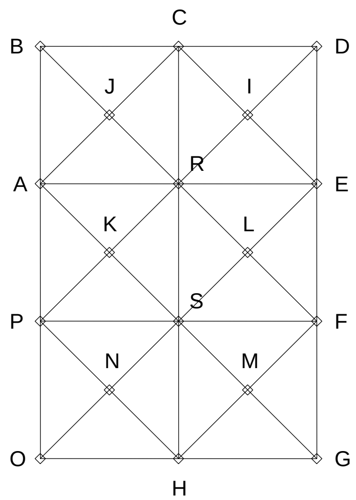
Transformations	*« Sens commun »*	*Elément(s) caractéristique(s)*	*Figure (Repasser le codage en rouge)*	*Objet(s) géométrique(s) associé(s)*	*Elément(s) invariant(s)*
Symétrie *axiale* vue en $6^{ème}$	« Effet *miroir* ou Réflection »	Axe de symétrie		*Médiatrice d'un segment*	*Axe de symétrie*
Symétrie *centrale* vue en *5*^{ème}	*« Demi-tour »*	*Centre de symétrie*		*Milieu*	*Centre*

- <u>Exercice ① : Reconnaître symétrie axiale et symétrie centrale.</u>

Observer la figure ci contre puis compléter en colonne le tableau ci dessous :

Souvent des confusions entre symétries axiale et centrale.

Attention aux notations : l'axe de symétrie est une droite et non un segment !



La figure	ABJ	(IE)	AJICB	*HPO*	*MER*
est la symétrique de la figure	IDE	(KM)	*ELKSF*	OSH	ISF
par rapport à	*(CR)*	*(BF) ou tout point de (BF)*	R	(JK)	L

- Exercice ② : Contrôle 2006.

ABCD est un rectangle tel que AD = 2 et BA = 3.

1. Construire en bleu A'B'C'D', le symétrique du rectangle ABCD par rapport à E. (…………... / 1 pt)
2. Montrer que (CD) ⊥ (B'C'). (………..….. / 1 pt)
3. Calculer le périmètre de A'B'C'D'. (……………..…… / 1 pt)

2. Puisque ABCD est un rectangle,

alors (BC) ⊥ (CD)

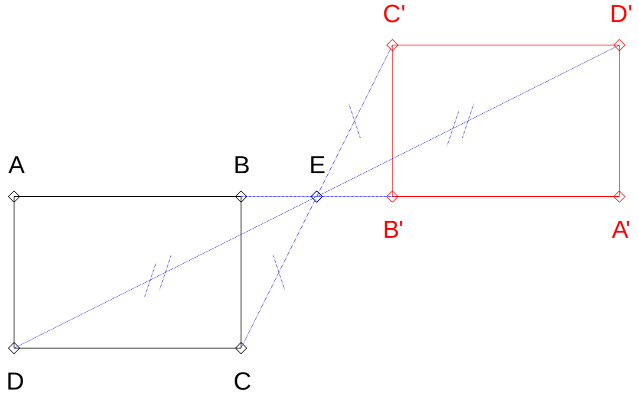
Puisque (BC) et (B'C') sont symétriques par rapport à E, alors (BC) // (B'C').

Puisque $\left\{\begin{array}{c}(BC) \perp (CD)\\(BC) \,//\, (B'C')\end{array}\right\}$ *alors (CD) ⊥ (B'C').*

3. Calculons le périmètre $\mathscr{P}$ *(ABCD) du rectangle ABCD.* $\mathscr{P}(ABCD) = 2\,AB + 2\,BC$

$= 2 \times 3 + 2 \times 2$

$= 10$



Puisque A'B'C'D' est le symétrique de ABCD, alors, par conservation des longueurs :

$\mathscr{P}(A'B'C'D') = \mathscr{P}(ABCD) = 10.$

- Exercice ③ (…………………..…… / 4 points) : Test 2009.

Laure Azutat a réalisé une superbe figure et sa symétrique.

Malheureusement, elle a perdu sa feuille !

Elle se rappelle seulement que tous les points sont distincts, que les points U, K et S n'étaient pas alignés, ainsi que les points V, I et J.

Et elle avait pris la précaution de faire le tableau suivant sur son cahier :

Objet	E	T	(SU)	(KS)	A	C	R
Symétrique	V	J	(SX)	(WS)	Z	D	I

« Mais avec un tel tableau, tu peux obtenir des indications sans avoir besoin de la figure ! » lui fait remarquer Jean Untelly, un rien moqueur.

Exercice peu traité.

1. Quel est le centre de la symétrie ? *S* (……………. / 0,5 pts) Justifier. (…..………….. / 0,5 pts)

La droite (SU) a pour image (SX). La droite (KS) a pour image (WS). On en déduit donc que ***S est un point invariant et c'est le seul !*** *Donc S est le centre de la symétrie considérée.*

Preuve complète (non exigée) :

Puisque les points U, K et S ne sont pas alignés, alors les droites (SU) et (KS) sont sécantes en S. Leurs symétriques (SX) et (SW) sont donc aussi sécantes et leur point d'intersection est aussi le point S.

Donc le symétrique du point S est S lui-même. ***Donc S est un point invariant.***

Puisqu'une symétrie centrale n'admet qu'un unique point invariant qui est son centre, alors ici S est le centre de la symétrie centrale considérée.

2. ETAC est en fait un parallélogramme. Comment seront les droites (VJ) et (ZD) ? Justifier. (………………… / 1,5 pts)

• *Puisque ETAC est un parallélogramme, alors (ET) // (AC).*

• *Puisque (ET) // (AC), alors, par conservation du parallélisme, leurs symétriques (VJ) et (ZD) seront aussi parallèles.*

3. On sait que VJ = JI. Quelle est la nature du triangle ETR ? Justifier. (………………… / 1,5 pts)

Puisque VJ = JI, alors le triangle VJI est isocèle en J.

Et donc, par conservation des longueurs, son symétrique ETR sera aussi un triangle isocèle en T.