LES NOMBRES RELATIFS

Jean Michel Espitallier, lecture à la Biennale Internationale des Poètes en Val de Marne, janvier 2010.

« Les amis de mes amis sont mes amis.
Les amis de mes ennemis sont mes ennemis.
Les ennemis de mes amis sont mes ennemis.
Les ennemis de mes ennemis sont mes amis.
(J'aimerais ne pas avoir à vous le répéter) »

Début du poème « De la Guerre Civile » in « Théorème d'Espitallier[1] », 2003.

➢ *Pré requis :* Nombres décimaux	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Définition des nombres décimaux.			
Ecriture décimale.			
Ordre des nombres décimaux.			
Addition et soustraction : propriétés.			
Placement d'un point sur une droite munie d'un repère.			

[1] **Jean-Michel Espitallier** est un écrivain français né le 4 octobre 1957. C'est l'un des enfants terribles de la poésie contemporaine française. Il est le cofondateur de la revue "Java" (1989-2006) qui fut l'une des principales revues de poésie et d'écritures expérimentales des années 90 et 2000.

NOM et Prénom : ……………………………………………….. 5ème …….

I. DE NOUVEAUX NOMBRES !

Les nombres relatifs ne sont pas des nombres si nouveaux que cela !

On les a souvent déjà rencontrés dans la vie courante. En voici deux exemples :

A. Les températures :

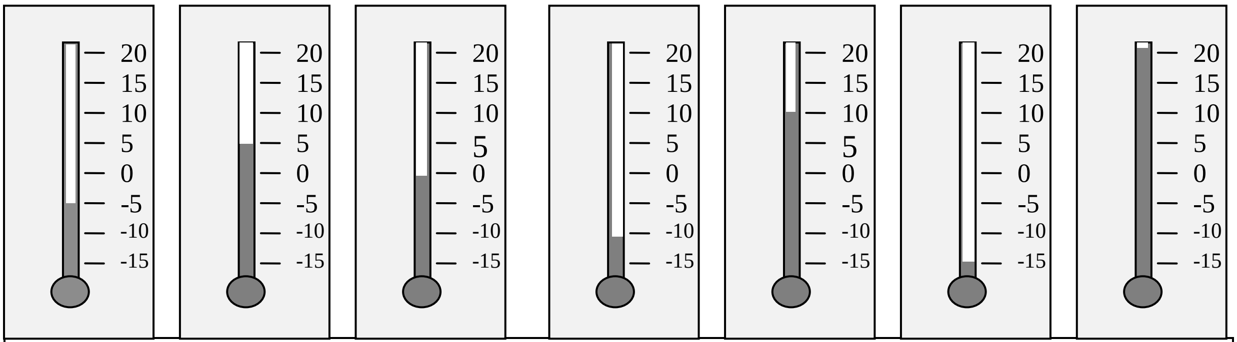
Pour mesurer les températures, on utilise un thermomètre qui est gradué en degrés Celsius **(noté °C)**.

Les deux températures qui servent à graduer le thermomètre sont :

la température à laquelle l'eau gèle ou la glace fond, qui correspond à ………°C.

la température à laquelle l'eau bout ou la vapeur se liquéfie, qui correspond à ………°C.

Lorsque la température baisse en dessous de 0°C, on emploie un nombre en lui rajoutant un signe « – » qui indique que la température est ……………… grande que 0°C.

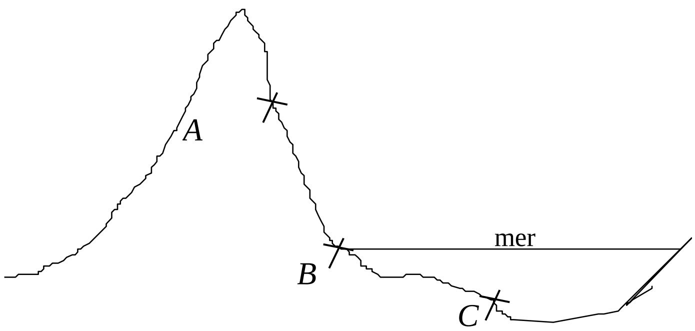


Températures relevées						
°C	°C	°C	°C	°C	°C	°C

Classer ces sept températures de la plus basse à la plus élevée (ordre croissant) :

< < < < < <

B. Altitudes terrestres :



Les altitudes sont repérées par rapport "**au niveau de la mer" (niveau zéro)**.

Pour des lieux situés **au dessus du niveau de la mer, on emploie des altitudes positives**, sans d'ailleurs avoir besoin de le préciser.

Pour les lieux situés **en dessous du niveau de la mer, on emploie des altitudes négatives : on parle de profondeur**. C'est le cas lorsque l'on est sous la mer (dans l'eau). Il existe des endroits sur terre qui sont à une altitude négative ! Par exemple, la Mer Morte qui est une mer intérieure entre Israël et la Jordanie, est située à une altitude d'environ -300 m.

Pour ces altitudes négatives, les plus profondes sont celles qui ont les parties numériques les plus grandes après le signe « - ».

<u>Ex</u> : Sur le dessin, le point A a une altitude positive. Le point C a une altitude ………………

Le point B a pour altitude ….. !

- Exercice 1 : Indiquer à l'aide de nombres relatifs les températures suivantes.

Ex : 3° au-dessus de zéro = +3°C = 3°C 7° en dessous de zéro = -7°C

15° au-dessus de zéro = 36° au-dessus de zéro = 24° en dessous de zéro =

- Exercice 2 : Donner les altitudes et les profondeurs suivantes sous forme d'un nombre relatif :

Ex : Tour Eiffel : 320 m au-dessus du niveau de la mer = +320 m = 320 m

Profondeur de la fosse des Mariannes dans l'Océan Pacifique : 11 034 m = -11 034 m

Profondeur de la fosse de Porto Rico dans l'Atlantique : 3 602 m =

Profondeur de la fosse centrale dans la Manche : 172 m =

Mont Blanc : 4 807 m au-dessus du niveau de la mer = Mont Everest : 8 848 m au-dessus du niveau de la mer =

II. NOMBRES DECIMAUX RELATIFS.

A. Définition des nombres décimaux relatifs :

Définition : Un **nombre relatif** est composé de deux parties : Ex : **- 3**

① Un **signe** : **+** ou **-** qui indique si le nombre est **plus grand ou plus petit que 0.**

② Une **partie chiffre finie (**entière ou décimale) qui indique **l'écart avec le nombre 0.**

Ce nombre placé après le signe porte le nom de « **distance à 0 (ou valeur absolue)** ».

Les nombres relatifs qui utilisent le signe « **+** » (ex : +2,4) sont appelés les nombres ………………..

Les nombres relatifs précédés du signe « - » (ex : -7) sont appelés les nombres …………………

Le seul nombre qui est à la fois positif et négatif est ………

Un nombre écrit sans signe est un nombre de signe …………………

B. Nombres opposés :

- Définition : Deux nombres qui ont la **même distance à 0**, mais qui sont **de signes contraires** sont appelés des **nombres opposés**.

  Exemples : -2 et +2 ou bien +7 et …… ou bien -π et …….

- Notation : De manière générale, **l'opposé d'un nombre « a » se note « -a »**.
- Attention : Si « a » est un nombre négatif, son opposé « -a » sera un nombre positif !

Par exemple, l'opposé de -81 est +81 autrement dit -(-81) = +81.

Il ne faut donc **pas confondre les mots négatif et opposé (c-à-d de signe contraire).** ;-)

- Application :

8 est un nombre entier positif car il n'a pas de ………………………….. Sa distance à 0 est 8.

-7,1 est un nombre décimal négatif car il a un signe ……………………….. Sa distance à 0 est 7,1.

+17,3 est un nombre décimal ……….……..........…… car il a un signe …… Sa distance à 0 est …..

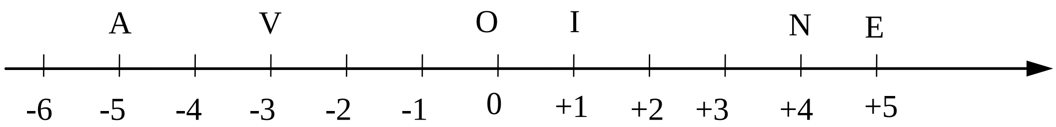
-8 est un nombre ……………….……….. négatif car son signe est ….. Sa valeur absolue est ….

-7 et +7 sont deux nombres ……………..…... L'opposé de -3,5 est ….. 5 est l'opposé de ……

-(+3) = …… -(-5) = …… -(+π) = …… -(-b) = ……

C. Position d'un point sur un axe repéré :

On a parfois besoin de repérer sur une droite (un axe) la **position d'un point par rapport à point fixe appelé « Point Origine »**. Pour cela, il faut d'abord munir cet axe d'un repère.



➢ Un axe muni d'un repère est une droite :

① **orientée** (en général de la gauche vers la droite lorsqu'elle est horizontale ou de bas en haut lorsqu'elle est verticale).

② sur laquelle on a placé un **point fixe** appelé **l'Origine** (lettre O généralement).

③ qu'on a **graduée** à partir de cette origine **régulièrement à l'aide d'une longueur unité** OI (1 cm ou 1 carreau généralement).

④ à chaque graduation unité est associée un nombre entier relatif.

A l'origine O correspond toujours le nombre 0. Les nombres négatifs sont à gauche de 0, les nombres positifs à droite de 0.

Plus on va vers la droite et plus les nombres augmentent.

Et c'est tout ! ;-}

- Définition : **Le nombre relatif qui donne la position** d'un point sur un axe repéré s'appelle l'**abscisse.**
- Notation : L'abscisse du point V se note $\mathbf{x_V}$ (on dit « x indice V », **l'indice** V est écrit **EN DESSOUS** du x).
- Exemple : Sur l'axe ci dessus, l'abscisse du point V vaut -3 et se note : $x_V = -3$.

➢ Exercice : En reprenant la droite du haut :

L'abscisse du point O est le nombre 0 (car O est le point Origine) c-à-d x_O = ……

L'abscisse du point I est le nombre 1 (car OI est la longueur unité) c-à-d x_I = ……

L'abscisse de A est ……… c-à-d x_A = ………

x_E = …..… c-à-d l'……………………… de …… vaut … x_N = ………..

Placez le point S(6) c-à-d le point S d'abscisse 6 puis le point K(-1,5).

D. Comparaison sur un axe repéré.

Usuellement, les nombres négatifs sont placés à gauche de 0, les nombre positifs sont à droite de 0.

La position des nombres sur l'axe gradué permet une comparaison immédiate de deux nombres relatifs :

Entre deux nombres relatifs, le plus grand est celui qui se trouve le plus à droite.

Exemples : Comparer à l'aide des signes < ou > les paires de nombres suivantes :

-5 …… +2   +3 …… -4   -6 ……-2   -1 ……-5

Et par cette méthode, on peut obtenir les trois règles de comparaison de deux nombres relatifs :

① Un nombre positif est toujours plus ……….………. qu'un nombre négatif.

② Entre deux nombres **positifs**, le plus …………....……. est celui qui a **la plus grande distance à 0**.

③ Inversement, entre deux nombres **négatifs**, le plus grand est celui qui a **la plus petite distance à 0.**

➢ Exercice 1 : Ecrire les opposés des nombres suivants :

-12   +7   -π   -(+5)   -(-8)   -(-(+6)   0

➢ <u>Exercice 2 :</u> A l'aide des symboles « < » ou « > » ou « = », comparer les paires suivantes :

-3 ...... +7 5 ….. -8 -5 .... 0 -12 ...... -11 -3 ….. -(+3)

-12 …... -(-11) -21 ….. -10 -(-6,8) ….. 6,1 5 ….. -(-(+5)) -(+4,1) ….. +4,01

➢ <u>Exercice 3 :</u> Ranger les 7 nombres suivants par ordre décroissant :

-1,011 1,011 1,101 -1,101 -1,1 1,1 -1,111

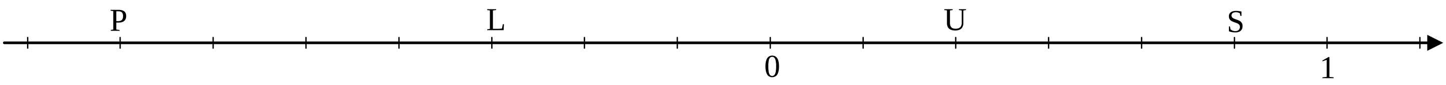
➢ <u>Exercice 4 :</u> Abscisses et fractions.

<u>Méthode</u> : ❶ On compte en combien de parties les segments unité (les segments de longueur 1) sont partagés : cela donnera les dénominateurs des abscisses des points.

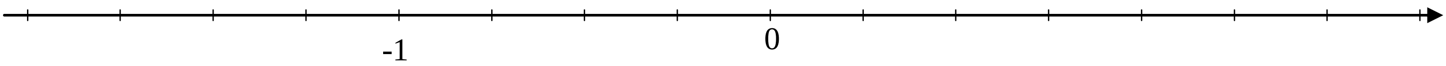
❷ Pour trouver le numérateur :

- *Soit on compte le nombre de parties à partir de l'Origine si elle est visible.*
- *Soit on compte à partir d'un point dont on connaît déjà la position qu'on aura pris soin de mettre au bon dénominateur.*

1. Ecrire les abscisses (*sous la forme la plus simple possible !*) des 4 points P,L, U et S.



2. Puis placer les 3 points M ($\frac{-7}{4}$), O ($\frac{-8}{8}$), I ($\frac{-1}{2}$), S ($\frac{18}{12}$) et (N ($\frac{5}{5}$).



➢ <u>Exercice 5</u> : Nombres relatifs et valeur absolue.

- ***La valeur absolue (ou partie chiffre ou distance à 0) d'un nombre a se note : /a/.***

  Par exemple : /+5,2/ = 5,2 (c-à-d la distance à 0 de +5,2 est 5,2) ou encore /-6,37/ = 6,37

- ***L'opposé d'un nombre a se note : -a.***

  Par exemple : -(+3,4) = -3,4 c-à-d l'opposé du gain +3,4 est la perte -3,4.

  Autre exemple -(-8) = +8 c-à-d l'opposé de la perte -8 est le gain +8.

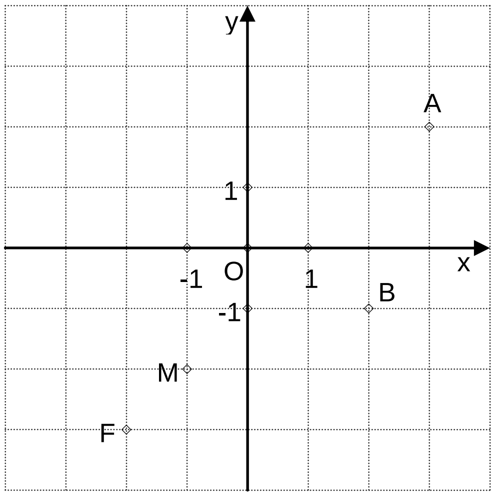
1. Compléter ***colonne après colonne*** le tableau suivant :

Notation symbolique	*Ecriture en français*	*Exemples à compléter* **colonne après colonne**.					
a	Le nombre a	-3	+6,1		0		-π
	L'opposé de a	+3		-17		-9	
| a |		3					
-| a |	L'opposé de la valeur absolue de a	-3					
| -a |		3					

2. Que remarquez vous pour les lignes | a | et | -a | de ce tableau ?………………………………….

Dit autrement : « Les valeurs absolues d'un nombre et de son opposé sont toujours …………………….. ».

III. REPERAGE DANS LE PLAN.



On a parfois besoin de repérer facilement la position sur un plan (une feuille, une carte) d'un point par rapport à un point fixe origine. Pour cela, il faut d'abord munir le plan (la feuille, la carte) d'un repère au doux nom savant de :

Repère orthonormé.

Un repère orthonormé est composé :

- **D'un axe « horizontal » (Ox)**, en général orienté de gauche à droite, qui s'appelle **l'axe des abscisses.**
- **D'un axe « vertical » (Oy)**, en général orienté de bas en haut, qui s'appelle **l'axe des ordonnées**.
- Le point O, point d'intersection des deux axes, s'appelle **l'Origine**.
- Les 2 axes (Ox) et (Oy) sont perpendiculaires (d'où le préfixe ortho) et on a choisi la **même unité** de longueur sur chacun des deux axes (d'où le suffixe normé).

Remarque : Le quadrillage a été dessiné pour vous faciliter la lecture des positions **mais en général, on ne le dessine pas !**

A. Définitions : Abscisse, ordonnée, coordonnées.

La position de chaque point M du plan est donnée par un unique couple de deux nombres relatifs :

- le premier nombre relatif indique le décalage horizontal « gauche – droite » du point M.
- le deuxième nombre relatif indique le décalage vertical « l'altitude » du point M.

① Le « décalage horizontal » de M s'appelle l'**abscisse de M** : ce nombre se lit **sur l'axe horizontal** et se note $\mathbf{x_M}$.

Par exemple, sur la figure plut haut, on a $x_M = -1$.

② Le « décalage vertical » de M s'appelle l'**ordonnée de M** : ce nombre se lit **sur l'axe vertical** et se note $\mathbf{y_M}$.

Par exemple, sur la figure plus haut, on a $y_M = -2$.

③ Ce couple de deux nombres qui donnent la position de M s'appelle **le couple des coordonnées de M.**

Par exemple, sur la figure, le point A a pour coordonnées le couple (3 ; 2) c-à-d $x_A = +3$ et $y_A = +2$.

Notation des coordonnées du point A : A (3 ; 2)

x_A, abscisse de A y_A, ordonnée de A

Attention : ***Ne pas confondre ordonnée et coordonnée !***

➢ Compléter :

- Puisque le point O est le point Origine du repère, alors les coordonnées de O sont (………. ; ………..).
- Le point F a pour coordonnées le couple (…… ; ……) c-à-d x_F = ……. et y_F = …….

Autrement dit, l'abscisse de F vaut ………, et son ……………………… vaut ……..

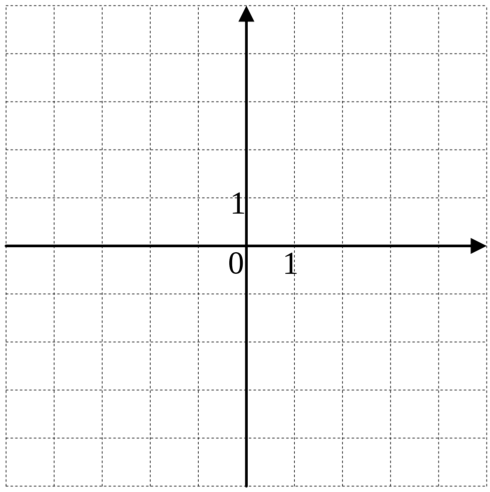
- Le point B a pour ordonnée ………… c-à-d ……… = ………

x_B = ………, autrement dit, son ………………………… vaut ……

Le point B a donc pour …………………………… le couple …………..

- Placer sur le repère plus haut les 3 points : C(-3 ; -2) D(2 ; -4) E(-4 ; -2).

Exercice 1 : (………………… / 8 pts)



1. Placer les points R(1 ; 2) et A(3 ; 3). (1 pt)
2. Placer sur le quadrillage les points V et I afin que VRAI soit un carré. (1 pt)
   Quelles sont toutes les coordonnées *possibles* pour les points V et I ? (2 pts)
3. Placer les 4 points P, E, U et L, les symétriques respectifs de V, R, A et I par *rapport à l'origine O* du repère. (1 pt)
   Quel est la nature de PEUL ? Justifier. (1 pt)
4. Ecrire les coordonnées des points R et E. Que remarquez-vous ? (1 pt)

Compléter la règle suivante : (1 pt)

« Lorsque deux points sont *symétriques par rapport au point origine du repère*, leurs abscisses sont ……………….…………. et leurs ordonnées sont ……………….……………… ».

Exercice 2 : Coordonnées et symétries. A faire en face ou sur le cahier d'exercices.

1. Tracer un repère orthonormé du plan (sans le quadrillage). Placer A(3 ; 2), B(-2 ; 4) et C(1 ; -1).
2. Placer en rouge les points A', B' et C', symétriques de A, B et C par rapport à l'axe des abscisses puis écrire leurs coordonnées. Compléter la règle suivante :

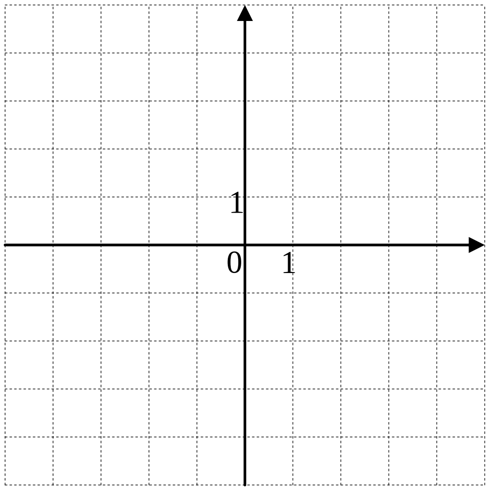
« Lorsque deux points sont *symétriques par rapport à l'axe horizontal des abscisses*, leurs abscisses sont ……………….…………. et leurs ordonnées sont …………..………………. ».

3. Placer en vert les points A", B" et C", symétriques de A', B' et C' par rapport à l'axe des ordonnées et donner leurs coordonnées. Compléter la règle suivante :

« Lorsque deux points sont *symétriques par rapport à l'axe vertical des ordonnées*, leurs abscisses sont ………………………….. et leurs ordonnées sont ……………..…………….. ».

4. Tracer les segments [AA"], [BB"] et [CC"]. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 : Dans le repère ci-contre,



1. Hachurez légèrement en rouge l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) tels que : $-1 < x < 1$ et $-2 < y < 4$.
   Quel est la nature de cet ensemble rouge ?
2. Hachurez légèrement en bleu l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) tels que : $x < -4$.
3. Placez en vert les points F(3 ; 5), A(3 ; -4), U(-3 ; -4) et X(-3 ; 5).

Les points de coordonnées (x ; y) qui sont à l'intérieur du rectangle FAUX sont les points M(x ; y) qui vérifient : ……. < x < ……… et ……. < y < ……..

IV. ADDITION DE DEUX NOMBRES RELATIFS.

A. Exemples :

- Douglas Alavanillesiouplait fait ses comptes. Deux cas se présentent :

Soit il a reçu de l'argent; il y aura donc de l'argent en plus sur son compte. S'il reçoit 53€, on écrira (+53).

Soit il a payé quelque chose; il y aura donc de l'argent en moins sur son compte. S'il paie 8€, on écrira (-8).

- En combinant ces deux possibilités, on peut obtenir les 4 situations suivantes :

① Douglas **reçoit** 2 €. **puis reçoit** 7 €. Il a donc reçu en tout : (2 + 7) €.

Ce qui se traduit par le calcul suivant : (+2) + (+7) = + (2 + 7) = +9

② Douglas **paie** 7 €. **puis paie** 5 €. Il a donc payé en tout : (7 + 5) €.

Ce qui se traduit par le calcul suivant : (-7) + (-5) = - (7 + 5) = -12

③ Douglas **reçoit** 4 €. **puis paie** 3 €. Il a donc reçu en tout : (4 – 3) €.

Ce qui se traduit par le calcul suivant : (+4) + (-3) = + (4 – 3) = +1

④ Douglas **paie** 7 €. **puis reçoit** 3 €. Il a donc payé en tout : (7 – 3) €.

Ce qui se traduit par le calcul suivant : (-7) + (+3) = - (7 – 3) = -4

B. Règle d'addition des nombres relatifs :

- Des exemples ci-dessus, on peut tirer la règle générale d'addition des nombres relatifs :

La somme de deux nombres relatifs est un nombre relatif :

❶ Le **signe** du résultat est celui des 2 nombres qui a la plus grande distance à 0.

❷ La **distance à 0** (la partie chiffres) du résultat est :

soit la **somme des distances à 0** quand les 2 nombres sont de **même signe.**

soit la **différence des 2 distances à 0** quand les 2 nombres sont de **signe différent**.

C. Cas particulier important : addition de deux nombres opposés :

La somme de deux nombres opposés vaut toujours ……… !

Exemple : (+3) + (-3) = ……. ! Effectivement, un gain de 3€ ajouté à une perte de 3€ revient à 0€ !

(-5) + 5 = …… (-254879854,25) + (+254879854,25) = ……… $(+\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3}) =$ ……. !

Après l'addition passons à la ……………………….

V. SOUSTRACTION DE DEUX NOMBRES RELATIFS.

Que signifie soustraire un nombre relatif à un autre ? Je sais : pas grand chose pour un élève de Cinquième normalement constitué ! En fait, il n'y a que deux cas possibles :

➢ **1er cas : Soit on soustrait un nombre positif :**

Que veut dire soustraire un nombre positif ? Reprenons les exemples de bilan d'argent.

Soustraire un nombre positif peut se comprendre comme « enlever du gain ». Mais enlever du gain peut se traduire par « augmenter les pertes », c-à-d additionner un nombre négatif !

En résumé : **« Soustraire un nombre positif revient à ajouter le nombre négatif opposé. »**

Illustration de cette règle sur 2 exemples :

- (+7) – (+4) On a déjà un gain de 7 €, et on réduit ce gain de 4 €.
  = (+7) + (-4) C'est comme si, au gain de 7€ de départ, on « rajoutait » une perte de 4 €.
  = 3 Les deux calculs donnent comme résultat un gain de 3 €.
- (-8) – (+3) On est déjà à 8m de profondeur, et on perd encore 3m d'altitude.
  = (-8) + (-3) C'est comme si, aux 8m de profondeur de départ, on rajoutait 3m de profondeur (on descend).
  = -11 Les deux calculs donnent comme résultat une profondeur de 11m.

➢ **2ème cas : Soit on soustrait un nombre négatif :**

Que veut dire soustraire un nombre négatif ? Reprenons les exemples d'altitude.

Soustraire un nombre négatif peut se traduire par « perdre de la profondeur ». Mais perdre de la profondeur revient à « gagner de l'altitude », c-à-d additionner un nombre positif !

En résumé : **« Soustraire un nombre négatif revient à ajouter le nombre positif opposé. »**

Illustration de la règle précédente sur 2 exemples :

- (-6) – (-5) On est déjà à 6m de profondeur, et on perd 5m de profondeur.
  = (-6) + (+5) C'est comme si, aux 6m de profondeur de départ, on rajoutait 5m d'altitude (on remonte).
  = -1 Les deux calculs donnent comme résultat 1m de profondeur.
- (+7) – (-12) On a déjà un gain de 7 €, et on réduit les pertes de 12 €.
  = (+7) + (+12) C'est comme si, au gain de 7 € de départ, on rajoutait un gain de 12 €.
  = 19 Les deux calculs donnent comme résultat un gain de 19 €.

➢ Résumons les quatre calculs précédents :

(+7) – (+4) = (+7) + (-4)   (-6) – (-5) = (-6) + (+5)

(-8) – (+3) = (-8) + (-3)   (+7) – (-12) = (+7) + (+12)

On peut constater que ces quatre calculs vérifient la règle importante (à retenir) :

Règle de soustraction :	**Soustraire** un nombre revient à **Ajouter son Opposé**.

VI. SOMME ALGEBRIQUE.

A. Définition des sommes algébriques :

➢ Comme nous l'avons vu précédemment, une addition peut remplacer une soustraction et inversement (avec des nombres de signes différents). Par exemple : (+7) – (-3) = (+7) + (+3).

Il est donc inutile de faire la différence entre une addition et une soustraction : C'est pourquoi on parle de **sommes algébriques**.

Définition : Une **somme algébrique** est une suite d'additions et/ou de soustractions.

➢ Une somme algébrique peut se présenter selon 4 formes :

Sous forme d'*une suite d'additions.*

Sous forme d'*une suite de soustractions.*

Sous forme d'*une suite d'additions et de soustractions.*

Sous forme d'*une suite de nombres relatifs* où signes d'addition et parenthèses sont sous-entendus.

Voici *le même exemple* écrit sous ces 4 formes différentes :

Suite d'additions :	(+24) + (-12) + (-9) + (+34) + (-25) + (+42) + (-1)
Suite de soustractions :	(+24) – (+12) – (+9) – (-34) – (+25) – (-42) – (+1)
Suite d'additions et soustractions :	(+24) + (-12) – (+9) – (-34) + (-25) – (-42) + (-1)
Suite de nombres relatifs :	24 -12 -9 + 34 -25 + 42 -1

Quelle forme vous paraît la plus simple ? ………………

Il semble évident que la dernière forme est la plus simple d'écriture : on l'appelle la **forme simplifiée de la somme algébrique.** Essayez d'expliquer pourquoi.

B. Six règles de simplification d'écriture des sommes algébriques :

➢ Deux conventions d'écriture :

① On peut toujours enlever les parenthèses ( ) du **1er terme d'une expression.**

② On peut toujours enlever le signe « + » et les parenthèses ( ) des nombres **positifs.**

Exemples : (-2) + (+3) s'écrit simplement ………….. (+3) – (+6) s'écrit simplement ………………

➢ Finalement, d'après les règles de calculs pour l'addition et la soustraction et les conventions ci dessus, on utilisera systématiquement les règles suivantes de simplification des sommes algébriques, rappelées par Simon Stevin dans son *Arithmétique* (1625) :

③ L'écriture **+ (+x)** est remplacée par l'écriture **+ x.** ex : + (+3) = +3 +(+2,3) = ……..

④ L'écriture **– (-x)** est remplacée par l'écriture **+ x.** ex : – (-7) = +7 – (-5) = ………

⑤ L'écriture **+ (-x)** est remplacée par l'écriture **– x.** ex : + (-5) = – 5 + (-3) = ………

⑥ L'écriture **– (+x)** est remplacée par l'écriture **– x.** ex : – (+8) = – 8 – (+1) = ………

Exemples : (+24) + (-12) – (+9) – (-34) + (-25) – (-42) + (-1) Somme algébrique non simplifiée.

= 24 – 12 – 9 + 34 – 25 + 42 – 1 On a simplifié les écritures.

Application : Simplifier d'abord l'écriture de ces sommes algébriques puis calculer en colonnes :

(-3) + (-6) =	(+5) – (+6) =	(-7,5) – (-2,5) =
=	=	=

C. Changement de l'ordre des termes dans une somme algébrique :

Ouh là ! Je vous vois déjà changer l'ordre des termes pour effectuer des regroupements judicieux.

On a le droit, mais pas n'importe comment évidemment ! (Et comme vous aimez trop le NPQ…)

Soit une somme algébrique :

Règle ① : On pourra changer l'ordre de ses termes seulement si la somme est **sous forme simplifiée** !

Règle ② : Dans ce cas, lorsqu'on change un terme de place, on n'oublie surtout pas de prendre son signe avec lui ! **Il faut toujours tenir compte du signe devant chaque nombre.**

Exemple : -12 – 24 + 13 peut se transformer en – 24 – 12 + 13 et non pas en 24 – 12 – + 13 (faux) !

Exercice : Simplifier les écritures puis calculer judicieusement en changeant l'ordre des termes :

A = (+13) + (+20) + (-13) – (+20)	B = +(-3) + (-10,5) – (+17) – (-0,5)
=	=
R = 0	R = -30

D. Trois autres conventions d'écriture :

J'en profite pour rappeler 3 conventions qui permettent de rendre les calculs plus clairs :

① Un calcul ne commence jamais par le signe « = ».

② Il doit toujours y avoir quelque chose écrit **à droite d'un signe égal.**

③ Deux signes opératoires ne peuvent jamais être écrits l'un à côté de l'autre sans parenthèses.

④Les calculs doivent être écrits **en colonnes** !

➢ Application : *Corriger en rouge les fautes d'écriture* puis simplifier puis calculer en colonnes :

= + (-3) + +2 – -3 + -5 =	= + -2 × +3 =
=	=

E. Une méthode de calcul meilleure que toutes les autres :

Pour calculer une somme algébrique de plus de deux nombres, toutes les méthodes qui donnent le bon résultat sont correctes.

Voici la méthode par simplification d'écriture qui est la plus évoluée, la plus puissante et la plus simple, nécessitant juste de connaître les règles de simplification d'écriture et de savoir calculer des additions (gains) et soustractions (pertes).

C'est la meilleure et celle qu'on utilisera systématiquement.

Somme algébrique à calculer.	**Méthode par Simplification d'écriture.**
(+12) – (+5) + (-8) + (+15) + (-9) – (-24)	On part d'une somme algébrique non simplifiée.
= 12 – 5 – 8 + 15 – 9 + 24	On simplifie d'abord les écritures en appliquant les règles de simplification.
= 7 – 8 + 15 – 9 + 24	On effectue les calculs soit de la gauche vers la droite, **soit par regroupements astucieux en faisant bien attention aux signes.**
= -1 + 15 – 9 + 24	Et ainsi de suite… (remarquez la présentation des calculs)
= etc. etc. etc. = 29	

➢ Remarque : Après la simplification d'écriture, on peut, au lieu de commencer les calculs à la chaîne, changer l'ordre des termes en faisant très ***attention* à déplacer chaque nombre *avec le signe qui le précède***. Cela peut servir à faire des **regroupements judicieux** (nombres opposés, regroupements donnant de petits résultats ou des nombres simples : dizaines, centaines etc…).

Exemple : +(-99) – 13 + (+30,7) – (-13) – 10,7 + 100

= -99 – 13 + 30,7 + 13 – 10,7 + 100 On a simplifié les écritures.

= **+13** – 13 + 30,7 **– 10,7 – 99** + 100 En gras, les nombres qui ont bougé **(avec leur signe !).**

= 0 + 20 + 1 On calcule par paire. Attention pour la dernière paire, on a -99 + 100 et non 99 + 100. On tient toujours compte du signe devant chaque nombre !

= 21

Au final, je ne vois pas de façon plus simple pour effectuer ce calcul.

VII. EXERCICES SUR LES SOMMES ALGEBRIQUES.

➢ Exercice 1 : Simplifier les écritures de ces sommes algébriques puis calculer en colonnes.

A = (+7) – (-4)
=
=

U = (-9) – (-11)
=
=

E = (-3) – (+5)
=
=

B = (-18) – (-11)
=

S = (-48) – (+13)
=

R = (+1) – (+14)
=

- Exercice 2 : Variations d'un phénomène et sommes algébriques.

Ce matin, il faisait +5°C. Le soir, le thermomètre indique -3°C. La température a donc baissé de 8°C.

Retrouvons ce résultat évident par Analyse-Synthèse : Variation de température = t°(soir) – t°(matin)

= (-3) – (+5)

= -3 – 5

= -8°C.

On retiendra la formule générale des variations d'une grandeur (ex : la température, la taille, le prix etc.) :

Variation d'une grandeur = cette grandeur (à l'état final) – cette grandeur (à l'état initial)

Calculer de même les variations de température suivantes entre le matin et le soir :

t°C matin	+ 5°C	- 7°C	+ 4°C	- 5°C	+ 6°C	- 8°C
t°C soir	- 7°C	- 9°C	+ 10°C	+ 12°C	- 3°C	- 10°C
Opération Simplification Variation	-7 – (+5) = -7 – 5 = -12°C	……… – …….. = = ………..	……… – …..… = = ………..	……… – …….. = = ………..		

- Exercice 3 : Écarts et sommes algébriques.

*Dans les compétitions de sport collectif (par exemple au football), on utilise pour départager certaines équipes dans les classements la notion de différence de buts (**goal average** en anglais).*

Ex : L'équipe des Warriors a plus marqué de buts qu'elle n'en a encaissés. Sa différence de buts est donc positive et vaut 9.

L'équipe des Loosers a plus encaissé de buts qu'elle n'en a marqués. Sa différence est donc négative. Et l'écart est de 23.

Equipes	Buts marqués	Buts encaissés	Opérations	Différence de buts	Classement
Warriors	38	29	38 – 29	+9	2
Matheux	42	17	42 – 17	+25	1
Loosers	13	36	13 – 36	-23	3

Classer les équipes suivantes dans l'ordre décroissant de leur différence de buts.

Equipes	Buts marqués	Buts encaissés	Opérations	Goal average	Classement
Sèvres	49	65			
Kinshasa	36	47			
Orsay	41	34			
Meudon	30	42			
Bab el Oued	55	53			
Tananarive	52	29			

- Exercice 4 : Simplifier les écritures de ces sommes algébriques puis calculer en colonnes.

O = (+7) + (-3) – (-4) – (+5) – (+9) + (+1)

=

O = -5

S = -48 + (-18) – 11 – (-48) – (-18) – (-11)

=

S = 0

➢ Exercice 5 : Simplifier les écritures puis calculer en colonnes en regroupant judicieusement.

E = -43 + (-19,5) – (-49) – (+33) – (+0,5)

=

E = -47

R = -36,6 – (-53) – (-16,6) – (+14)

=

R = 19

➢ Exercice 6 : Calculer (résultat sous la forme la plus simple possible) :

$T = \frac{2}{3} - \frac{5}{6}$

=

$E = \frac{-25}{30} - \frac{77}{33}$

=

$C = \frac{1}{2} + \frac{-2}{3} - \frac{-1}{9}$

=

$H = \frac{-8}{40} + \frac{27}{15} \times \frac{9}{81}$

=

➢ Exercice 7: Calculer les sommes algébriques suivantes :

J = - (- 1) – (+ 2) – (- 3) – (+ 4) – (- 5) – (+ 6)

=

R = -3

E = -(-1) – 2 – (-3) – 4 – (-5) – 6 – … etc … – (-51) – 52

R = -26

➢ Exercice 8: Calculer les expressions suivantes :

$D = [-6 - (-2)] - [-8 + (-2)]$

=

R = 6

$U = \frac{-4}{16} - \frac{6}{12} + 1$

=

$R = \frac{1}{4}$

$O = \frac{(-3) + (-2)}{-5 - (-9) - (-16)}$

=

$R = \frac{-1}{4}$

- <u>Exercice 9</u> : On donne x = +5 et y = -2,5. On veut donc calculer la valeur de l'expression littérale x + y.

<u>Méthode :</u> *x + y = (+5) + (-2,5)* *On a réécrit l'expression puis remplacé chaque lettre par sa valeur. Pas d'oubli de signes !*

= 5 – 2,5 *On a simplifié les écritures.*

= 2,5 *On a calculé.*

Toujours la même méthode !

Pour x = -7 et y = +5	Pour x = -7 et y = +5	Pour x = +7, y = -5 et z = -2	Pour x = +7, y = -5 et z = -2
x – y =	-x + y =	(x – y) – z =	x – (y – z) =

- <u>Exercice 10 :</u> Pour a = -5, b = 2 et c = 2a = ………, calculer :

5b – (-a) + (-c) – 5b – a + c	2a – (-(-a)) – (-b + c)
=	=
R = 0	R = 7

- <u>Exercice 11</u> : Vérifier si les valeurs proposées vérifient ou non les égalités ci dessous.

u = -1 pour 5 + 5u = 8u – 5

D'une part, on a 5 + 5u =

D'autre part, on a

Puisque

x = 1 et w = -2 pour -2x – 2 = 2w

D'une part, on a

$$2a - (-b) - (-2) = \frac{4b + a - 1}{2}$$ pour a = -3 et b = -2

VIII. LES CARRES MAGIQUES.

Définitions :

❶ Un carré de nombres est dit magique lorsque les sommes des nombres inscrits en ligne, en colonne ou en diagonale, sont toutes les mêmes.

❷ La somme commune à toute ligne, colonne et diagonale s'appelle la « **somme ou constante magique** ».

❸ L'**ordre** d'un carré magique est sa « taille ». Par exemple, un carré magique d'ordre 4 contient 16 cases.

Deux exemples de carrés magiques :

Voici un carré magique d'ordre ……..

Sa somme magique vaut ……

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Voici un carré magique d'ordre ……...

Sa constante magique vaut ……

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

➢ Exercice 1 :

Ce carré ① est-il magique ?

2,5	-2,5	-1,5
-4,5	-0,5	3,5
0,5	1,5	-3,5

Corrigez ce carré ② pour qu'il soit magique.

6	1	-1	-8
-3	-6	4	3
0	7	-8	-2
-5	-4	2	5

Complétez ce carré magique ③.

2	-5	
	-1	
		-4

➢ Exercice 2 :

• Construisez un carré magique d'ordre 1 :

Combien en existe-t-il ? …………………

• Construisez un carré magique d'ordre 2 et de somme magique -6.

Peut-on construire un carré magique d'ordre 2 non trivial (cases non toutes égales) ?

• Avec chacun des entiers de 1 à 9, complétez ce carré magique d'ordre 3 et de constante magique 15 :

	5	

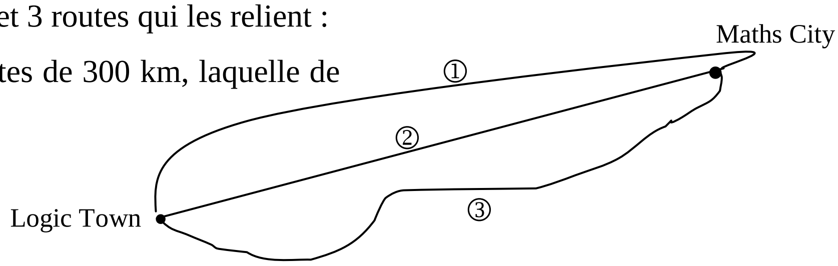
Pour plus d'informations sur les carrés magiques : Wikipedia évidemment.

http://lycees.ac-rouen.fr/bruyeres/maths/fscarmag.html.

IX. DISTANCE ENTRE DEUX POINTS.

Voici 2 villes symbolisées par 2 points et 3 routes qui les relient :

Si je vous dis que les villes sont distantes de 300 km, laquelle de ces 3 routes a cette longueur ?



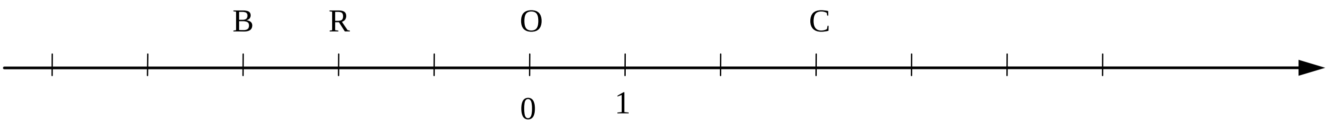
A. Définition de la Distance ; Notations :

Définition : La **distance entre 2 points** est la longueur du ……………..………….. reliant ces 2 points.

Remarque : La distance est donc **un nombre, forcément de signe** …………………

Notations : La distance entre 2 points A et B est notée : **AB** ou **d(A ; B)**

Exemple : Soit un axe muni d'un repère comme ci dessous :



Ecrivez les abscisses manquantes des points B, R et C.

Combien vaut la distance entre O et C ? ….. RC = ……. d(R ; B) = …….

La distance peut se trouver comme plus haut par simple comptage sur l'axe. Mais cela marchera-t-il pour deux points très éloignés l'un de l'autre ? …………... Et pour des points à abscisses fractionnaires ? …..……

Bien sûr que non ! Il nous faut donc une méthode qui repose sur le calcul.

B. Formule de la distance entre deux points d'un axe :

➢ Activité : Je vous donne 3 couples de points, essayez de me donner la distance les séparant.

$x_A = 25$ et $x_B = 29$	$x_C = 1$ et $x_D = -3$	$x_E = -3$ et $x_F = -1$
AB =	CD =	EF =
Quelle opération entre x_B et x_A redonne ce résultat ?	Quelle opération entre x_C et x_D redonne ce résultat ?	Quelle opération entre x_E et x_F redonne ce résultat ?

Généralisons : La distance entre 2 points d'un axe est donnée par la formule suivante :

Distance entre 2 points d'un axe = la plus grande abscisse – la plus petite abscisse

Comment utilise-t-on cette formule de la distance ? Voyons cela d'un peu plus près.

<u>Méthode</u> : Soient A(-25) et B(-11). Sans placer les points sur un axe, on veut calculer la distance AB :

$AB = x_B - x_A$	*On a appliqué la formule : ici c'est x_B qui est plus grand que x_A.*
$= -11 - (-25)$	*On a remplacé rigoureusement* ***en n'oubliant aucun signe****.*
$= -11 + 25$	*On calcule comme d'habitude : simplification puis calculs.*
$= 14$	

C. <u>Quatre exercices sur la distance entre deux points d'un axe :</u>

➢ <u>Exercice 1</u> : Calculer, **en appliquant rigoureusement la méthode**, la distance entre les points suivants :

A(-37) et C(-13)

AC =

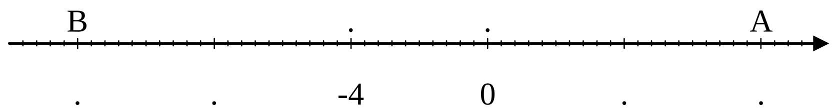
B($-\frac{8}{5}$) et D($-\frac{3}{5}$)

BD =

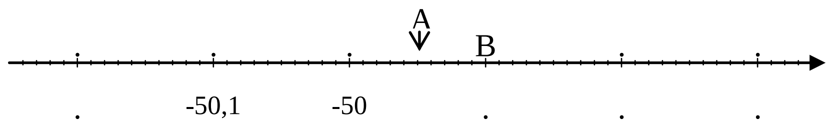
G($\frac{1}{6}$) et H($\frac{-16}{32}$)

E($-\frac{11}{33}$) et F($-\frac{2}{9}$)

➢ <u>Exercice 2</u> : Ecrire les abscisses des points A et B puis ***calculer*** **la distance AB.**



AB =



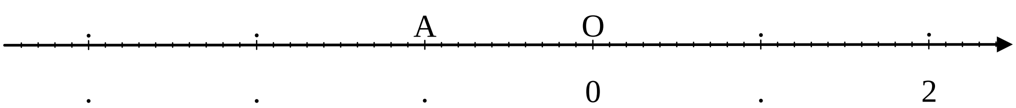
AB =

➢ <u>Exercice 3</u> :

Sur l'axe ci dessous, on a placé un point A. Quelle est son abscisse ? x_A = …….. Reportez cette abscisse sous l'axe.

1. Hachurez en rouge la zone de tous les points **de cette page** qui se trouvent à une distance inférieure à 1 cm du point A.
2. Ecrivez la ou les abscisses des points **de l'axe** se trouvant à une distance 1 exactement de A ? x = ……
3. Coloriez en vert tous les points de la feuille qui sont équidistants des points A et O.

   Comment s'appelle cet ensemble de points verts ? ……………………………………..
4. Comment s'appelle le point **sur l'axe** qui est à mi-distance de A et O ? …………....……….......................... Son abscisse ? ….
5. **Calculer** la ou les positions d'un point C qui se trouverait sur l'axe, à 99 de distance du point A.



- <u>Exercice 4 : Frise chronologique.</u>

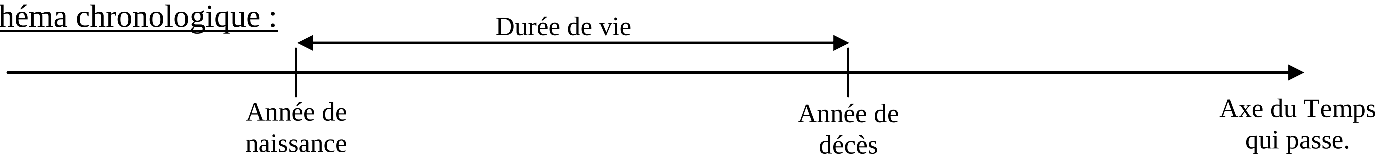
On représente généralement le Temps qui passe par un axe chronologique orienté vers la droite (voir ci dessous).

Le point Origine O correspond à l'année …..... : c'est l'année supposée de la naissance de ………………………..

Une année négative correspond à une année ………........…… J.C.

Une année positive correspond à une année ………..…..…… J.C.

<u>Schéma chronologique :</u>



Ce schéma dit que : **Les années sont équivalentes à des positions chronologiques (c-à-d dans le Temps).**

La durée est équivalente à la distance séparant deux positions chronologiques.

Les calculs d'année ou de durée sont donc analogues aux calculs de positions ou de distances, soit par addition, soit par soustraction.

<u>Donc dans l'analyse d'une situation chronologique, on s'aidera toujours d'un schéma comme au dessus.</u>

<u>Remarque</u> : Cette méthode est aussi valable pour des problèmes de température, d'altitude, c-à-d tout ce qui peut se modéliser par une recherche de distance sur un axe gradué avec des nombres relatifs.

A vous maintenant : **résoudre dans votre cahier d'exercices les 4 situations suivantes :**

❶ En quelle année est né Archimède, grand mathématicien et physicien grec (« Euréka », c'est de lui) mort en 212 av.J.C. à l'âge de 75 ans ?

❷ Le grand mathématicien arabe Al-Khwarizmi[2], fondateur de l'algèbre et auteur du « Livre sur la science de la transposition et de la réduction » (« Kitab Al jabr w'al mouqabala »), est né en 780 ap.J.C et s'éteignit à l'âge de 70 ans.

En quelle année Al-Khwarizmi est-il mort ?

❸ L'Ecriture est née à Sumer en Mésopotamie (actuellement en Irak) vers 2950 av.J.C.

Depuis combien d'années utilisons-nous l'Ecriture ?

❹ Le grand mathématicien et astronome indien Brahmagupta, mort en 660 ? à l'âge de 62 ans, est sans doute **le premier à avoir utilisé des nombres négatifs** (dans des calculs commerciaux pour signifier les pertes et les profits). Il les a utilisés en algèbre en énonçant la règle des signes.

En quelle année est né Brahmagupta ?

*Brahmagupta emploie dans ses calculs les chiffres décimaux (graphisme très proche de nos chiffres actuels dits arabes, fruit d'une évolution sur plusieurs siècles commençant au $3^{\text{ème}}$ siècle av.J.C.) et principalement **le zéro** (notation « o ») que les Arabes adopteront au $9^{\text{ème}}$ siècle avec, principalement, les travaux d'Al-Khwarizmi. Ce célèbre chiffre manqua cruellement aux grandes civilisations babylonienne, égyptienne et grecque. Son apparition en Inde, tout particulièrement dans l'œuvre de Brahmagupta, est un pas de géant en algèbre et pour l'Humanité !*

---

[2] Du mot Al jabr est tiré le mot Algèbre.

Nous verrons en $4^{\text{ème}}$ dans le contrat sur les équations ce que signifie transposer ou réduire des quantités.

X. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

- Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Nombres relatifs : définition, distance à 0, opposé, etc.			
Cordonnées d'un point dans le plan, placement d'un point.			
Classer des nombres relatifs.			
Simplifier l'écriture d'une somme algébrique.			
Calculer une somme algébrique après l'avoir simplifiée.			
Calculer la distance entre 2 points sur un axe repéré.			
Résoudre un problème chronologique à l'aide de nombres relatifs.			
Aimer les nombres relatifs.			

- **Pour préparer le test et le contrôle : «Livre» Evaluations p.62 et 78.**

B. Conseils :

- Nombres relatifs :
  - Ne pas confondre opposé et négatif.
  - Ne pas confondre ordonnée et coordonnée ; abscisse (horizontale) et ordonnée (verticale).
- Calculs de sommes algébriques :
  - **On simplifie toujours les écritures en premier.**
  - Toujours tenir compte **du signe devant** chaque nombre.
  - Traduire en terme d'argent les sommes algébriques : positif = gain et négatif = perte.
- Distance : On écrit la formule (truc pour la retenir : « le plus grand – le plus petit ! ») puis on calcule.

  Une distance est un nombre **positif !**

C. Erreurs fréquentes :

- Beaucoup d'erreurs de signe, surtout quand on remplace une lettre par sa valeur :

Exemple : (-a) + 5 = -2 + 5 pour a = -2 Faux ! Corrigez : (-a) + 5 = …………………..

- Distance : faire « le plus petit – le plus grand » Faux ! Corrigez :
- Oublier de tenir compte du signe devant chaque nombre. Ex : -2 + 5 = -7 Faux ! On n'a pas tenu compte du – devant le 2 ! Corrigez :

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ……………………………………….