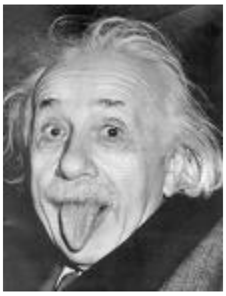
LA PROPORTIONNALITE



« La Théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La Pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. »
« Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue. »
Albert Einstein[1]

- *Pré requis pour prendre un bon départ :*

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Simplification des écritures fractionnaires.			
Multiplication d'un nombre par une écriture fractionnaire.			
Comparer deux fractions.			
Fraction d'une quantité.			
Fractions et proportions.			
Pourcentages.			
Proportionnalité : définition, tableau et propriétés.			
Proportionnalité : calcul du coefficient.			
Trouver une quantité inconnue x dans une égalité de fractions type $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$ *ou* $\frac{3}{x} = \frac{5}{7}$.			

[1] Einstein, Albert (1879-1955) : Grand physicien allemand naturalisé américain. Il proposa la théorie de la relativité restreinte (1905) et générale (1915) et reçut le Prix Nobel de Physique en 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Il a ainsi largement contribué au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie. Son travail est notamment connu pour l'équation E=MC² qui explique la puissance de l'énergie nucléaire. Il est aussi connu pour ses nombreuses facéties, Science et fantaisie faisant chez lui bon ménage.

NOM et prénom : ………………………………………………………. *5*[ème] *……*

➢ *Abréviations utilisées : pplté = proportionnalité*
pptiel = proportionnel

I. UN PROF INJUSTE !

Un professeur très sévère a l'habitude de punir les élèves qui bavardent un peu trop en leur donnant des exercices à faire à la maison !

Ainsi hier, il a puni un 1^er^ élève qui a parlé 2 fois en lui donnant 6 exercices à faire.

Puis un 2^ème^ élève a été puni de 11 exercices pour avoir bavardé 4 fois.

➢ Remplissez le tableau ① ci-dessous résumant la situation.

Nombre de bavardages	2	4
Nombre total d'exercices à faire	…	…

La situation vous paraît-elle juste ? ……

Pour qui est-elle injuste ? ……………….

Pourquoi ? ……………………………………………

……………………………………………………..

➢ Remplissez ce nouveau tableau ② pour que la situation précédente soit juste maintenant.

÷ ….

Nombre de bavardages	2	4
Nombre total d'exercices à faire	6	…

× ….

Par une multiplication par combien passe-t-on de la 1ère à la 2ème ligne ? Une multiplication par …….

Par quelle opération passe-t-on de la 2ème à la 1ère ligne ? Une ………………………….. par ……..

Quelle égalité peut-on écrire entre le « *Nombre total d'exercices à faire* » et le « *Nombre de bavardages* » ?

Nombre ………………………………… = …… × *Nombre de* …………………………

➢ En conclusion, on pourra dire que souvent, dans la vie quotidienne, l'idée de situations « justes » se confond avec un concept mathématique très important : **la Proportionnalité**.

• L'égalité « Nb d'exercices = 3 × Nb de bavardages » s'appelle :

une relation de p…………………………..

• Le tableau ② où on passe de la 1ère ligne à la 2ème ligne en multipliant par le coefficient 3 s'appelle :

un tableau de p…………………………….

• Cette relation et ce tableau sont 2 représentations différentes[2] de la même situation :

une situation de proportionnalité.

Nous allons maintenant définir proprement (mathématiquement) ce qu'est la proportionnalité.

[2] On verra plus tard à la fin de ce cours une troisième représentation de la proportionnalité : la représentation graphique.

II. DEFINITION ET REPRESENTATIONS DE LA PPLTE.

Prenons un autre exemple de situation de proportionnalité :

Jeff aimékours achète *7 cannelés* pour un *prix total de 14€.*

Le lendemain, il succombe à son péché mignon et rachète dans le même magasin 3 cannelés.

Remplissez le tableau.

Nombre de ………………………......	7	….
……………………………...... (en €)	14	….

× …..

Par quelle opération passe-t-on de la 1ère à la 2ème ligne ? Une …………….……………….. par …….

Quelle relation peut on écrire entre le *Prix total à payer (en €)* et le *Nombre de cannelés achetés* ?

…………….………………..………… (en …..) = ……. × *Nombre de* ………………………..

A. Définition de la proportionnalité :

Les exemples du haut et de la page précédente nous permettent maintenant de définir la proportionnalité.

Dans une situation où les valeurs d'une grandeur Y s'obtiennent en multipliant les valeurs d'une autre grandeur X par un nombre fixé, **on dit que** :

① Les grandeurs **Y et X sont proportionnelles**.

② La situation est une **situation de proportionnalité**.

③ Le nombre fixe multiplicateur s'appelle le **coefficient de proportionnalité.**

En fait, on utilise rarement la définition telle qu'elle, mais plutôt les 2 représentations suivantes :

B. Deux représentations de la proportionnalité :

- Une situation de proportionnalité peut être présentée sous 2 formes :

<u>Sous forme de relation (formule) :</u>

Grandeur Y = nb fixe × Grandeur X

Toute relation de type :

une grandeur = une autre grandeur × nb fixe

s'appelle : **Une relation de proportionnalité.**

<u>Sous forme de tableau :</u>

Grandeur X		
Grandeur Y		

× nb fixe

On passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par le même nombre fixe :

On dit que ce tableau est :

Un tableau de proportionnalité.

- Dans ces 2 représentations, le coefficient multiplicateur s'appelle le **coefficient de proportionnalité.**

Il pourra avoir un nom plus particulier suivant la situation de proportionnalité. Nous en verrons quelques exemples plus loin.

- Au collège, on va surtout travailler à partir de la représentation sous forme de tableau.

III. TROIS EXEMPLES IMPORTANTS DE COUPLES DE GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

A. 1er exemple : Pourcentages et Proportionnalité.

➢ Soit une crème contenant 25 % de Matière Grasse (MG). Cela signifie que :

la proportion de la *Masse de matière grasse* par rapport à la *Masse totale de la crème* est de $\frac{\dots}{\dots}$.

Autrement dit : « Pour ……… g de crème, il y a …….. g de matière grasse. »

Et on a la formule : *Masse de matière grasse dans la crème* = $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × ……………………………………

C'est une relation de …………………………. Les masses de crème et de MG sont donc proportionnelles.

Complétez le tableau de proportionnalité correspondant :

Masse totale de la crème (en g)	100	500	40	…..	24
Masse de matière grasse (en g)	25	…..	10	50	6

Coefficient de proportionnalité

$\times \frac{25}{100}$

➢ Trois remarques :

❶ On passe bien de la première ligne à la deuxième ligne du tableau en multipliant par le nombre fixe $\frac{25}{100}$ qui représente la proportion de MG dans la crème. Cela revenait en fait à appliquer la formule 5 fois de suite, à 100 d'abord ($100 \times \frac{25}{100} = 25$), puis à 500 ($500 \times \frac{25}{100} = 125$), puis à 40, puis à 200, puis à 24.

❷ Le coefficient doit être écrit sous **la forme la plus simple possible : soit un entier, soit une fraction irréductible :** ici $\frac{25}{100}$ = ……. F.I ! (modifiez le coefficient dans le précédent tableau !)

❸ La formule : Masse de matière grasse dans la crème = $\frac{1}{4}$ × Masse totale de la crème

peut se transformer en : Masse de matière grasse dans la crème = $\frac{\text{Masse totale de la crème}}{4}$

Et dans la boîte de l'opérateur à droite du tableau, on peut aussi bien écrire $\times \frac{1}{4}$ que ÷ 4.

La proportionnalité fonctionne aussi bien avec une multiplication entre les lignes du tableau qu'avec une division (par l'inverse).

➢ En conclusion :

① ***« Appliquer un pourcentage à une grandeur » est une situation de proportionnalité !***

Le pourcentage donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

② Plus généralement, ***« Prendre la fraction d'une quantité » est une situation de proportionnalité.***

La proportion (la fraction) donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

B. 2ème exemple : Echelle et Proportionnalité.

- Sur la reproduction d'un dessin *à l'échelle 3*, les *Longueurs Dessinées* sont obtenues en multipliant les *Longueurs Réelles* par le même coefficient de proportionnalité qui vaut évidemment ……

L'échelle 3 signifie : « Si la longueur réelle vaut 1, alors la longueur dessinée correspondante vaudra …… »

D'où la formule : *Longueur Dessinée* = ……. × ………………………………………………

Complétez le tableau de proportionnalité correspondant.

Longueurs Réelles (en cm)	1	50		200	
Longueurs Dessinées (en cm)	3		300		210

échelle

× …..

- En conclusion :

① ***« Appliquer une échelle à une grandeur » est une situation de proportionnalité !***

On utilise donc la proportionnalité pour tout ce qui est plans, cartes, agrandissements, modèles réduits, etc.

② **Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité s'appelle : l'…………………………**

Formule de l'échelle : **Echelle** $= \dfrac{\textbf{Longueur Dessinée (unité)}}{\textbf{Longueur Réelle (même unité)}}$

L'échelle donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

C. 3ème exemple : Conversions et Proportionnalité.

① ***Les formules de conversion sont des relations de proportionnalité !***

② **Le coefficient porte, dans les situations de conversion, un nom spécial : le coefficient de conversion.**

Ex : Pour convertir des mètres en centimètres, on a la relation de proportionnalité :

Longueur (en cm) = 100 × Longueur (en m)

Donc les longueurs en cm et les longueurs en m sont ……………………….………………..……...

Le coefficient de conversion est : …….

- Exercice : Compléter les 4 relations de conversion suivantes :

Poids (en kg) = 0,001 × Poids (en ……..) Durée (en s) = 3 600 × Durée (en ………………….)

…………………………… = 100 × Distance (en dam) Aire (en m²) = ………….. × Aire (en ha)

IV. COEFFICIENT DE PPLTE ET EGALITE DE FRACTIONS.

A. Activité :

➢ Voici une situation de pplté : « Un paresseux (l'animal, pas l'élève !) parcourt 2 km en 4 heures. »

En supposant que le paresseux garde toujours la même allure, on cherche à prévoir *la distance* que cet animal pas pressé va parcourir *durant* 8 h ; durant 30 min ; durant 1 journée.

➢ Complétez le tableau de proportionnalité représentant cette situation :

……………… du parcours (en ………)	4	…	…	…
……………………… parcourue prévue (en km)	2	…	…	…

$\times \frac{1}{c}$ $\times$ c

Le coefficient de proportionnalité (ici noté c) est le nombre inconnu qui vérifie l'égalité : $4 \times c = 2$.

Pour trouver un nb inconnu dans une multiplication, on utilise une division donc $c = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ F.I !

➢ En formant les 4 fractions $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{0{,}25}{0{,}5}, \frac{12}{24}$ correspondant aux 4 colonnes *inversées*, on remarque qu'elles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$! Le coefficient de proportionnalité est donc bien $\frac{1}{2}$.

B. Coefficient de proportionnalité et colonnes inversées :

L'activité précédente nous permet d'énoncer la propriété suivante :

① Toutes les colonnes inversées forment des fractions toutes égales au coefficient de proportionnalité.

② Pour calculer le coefficient de proportionnalité, il suffit donc d'avoir une colonne complète :

Le coefficient est égal à la fraction inversée correspondant à cette colonne complète.

Preuve de la propriété :

On a : Distance parcourue (en km) $= \frac{1}{2} \times$ Durée du parcours (en h) C'est la relation de proportionnalité.

D'où : $\frac{\text{Distance parcourue (en km)}}{\text{Durée du parcours (en h)}} = \frac{1}{2}$ On a isolé à droite le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{2}$ dans l'égalité.

En remplaçant dans cette formule Distance et Durée par leurs valeurs correspondantes dans chaque colonne, on a bien :

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

CQFD !

➢ Remarque et définition :

Ici le coefficient de proportionnalité s'obtient donc par l'opération $\frac{\text{Distance parcourue (en km)}}{\text{Durée du parcours (en h)}}$.

Cette fraction revient à savoir combien de kilomètres sont parcourus par le paresseux par heure de trajet : ce coefficient de proportionnalité représente donc ***la distance moyenne parcourue (en km) par heure de trajet.***

On a donné un nom à cette distance moyenne par unité de temps : c'est la vitesse moyenne de déplacement !

Le coefficient de proportionnalité représente donc ici **la vitesse moyenne (en km par heure notée km/h).**

Puisque le paresseux se déplace **à vitesse constante**, on dit que son **mouvement est uniforme.**

Le mouvement uniforme (*à vitesse constante*) est donc une situation de proportionnalité.

C. Sens de la proportionnalité :

Le mot proportionnalité est construit à partir de 2 mots : *Proportionnalité*

Proportions ……...…………

On peut donc écrire : Proportionnalité ⇔ Proportions + Egalité.

Ce qui veut dire : Proportionnalité ⇔ Egalité des Proportions.

Ce qui veut dire : Proportionnalité ⇔ Egalité des Fractions.

L'étymologie du mot proportionnalité pose en fait le fondement mathématique de la proportionnalité :

La Proportionnalité repose sur l'Egalité des Fractions !

En pratique : Quand on a affaire à une **situation de proportionnalité**, il faut automatiquement penser à **utiliser l'égalité des fractions formées par les colonnes** du tableau correspondant. Et vice versa.

V. PROPRIETES DES TABLEAUX DE PROPORTIONNALITE.

Voici 2 propriétés qui vont être utiles pour compléter un tableau de proportionnalité.

A. Multiplication « verticale » entre deux lignes :

Voici une autre situation de proportionnalité avec des pourcentages :

Un professeur considère qu'un contrôle est réussi lorsque 75 % des élèves ont au dessus de 12.

Autrement dit : Sur 100 ……………………………......, il y a 75 ………………………………………………………

Le nombre d'élèves dans sa classe de 5$^{\text{ème}}$ est de 24. Dans sa classe de 6$^{\text{ème}}$, 15 élèves ont eu plus de 12.

➢ Complétez le tableau de proportionnalité représentant la situation :

× …

……………………………………	100	…	…
……………………………....	…	…	…

× c

Le coefficient de proportionnalité (ici noté c) est le nombre inconnu qui vérifie l'égalité : ….. × c = …..

Donc $c = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$ F.I !

D'après la définition de la proportionnalité, on a la propriété suivante :

Propriété entre les lignes d'un tableau de proportionnalité :

❶ Pour passer **de la 1$^{\text{ère}}$ ligne à la 2$^{\text{ème}}$ ligne, on multiplie** par le ………………………………………

❷ **Inversement,** pour passer **de la 2$^{\text{ème}}$ à la 1$^{\text{ère}}$ ligne, on ………………………** par le coefficient de pplté ou, ce qui revient au même, **on multiplie « verticalement » par l'inverse** du coefficient de pplté.

- Application : Pour chacun de ces 4 tableaux de proportionnalité :

1) Calculer d'abord le coefficient de proportionnalité (FI !) *puis* reportez les opérateurs à droite et à gauche du tableau.
2) Calculer la valeur inconnue représentée par une lettre par multiplication verticale par le coeff. de pplté ou son inverse.

$\times 11$

55	33
5	x

$\times \frac{1}{11}$

Méthode

1) coeff $= \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$ F.I !

(colonne complète inversée !)

2) $x = 33 \times \frac{1}{11}$

$= \frac{33 \times 1}{11}$

$= \quad 3$!

27	60
6	y

1) coeff =

2) y =

27	12
z	8

1) coeff =

t	25
9	30

1)

B. Multiplication « horizontale » entre deux colonnes :

Propriété entre les colonnes d'un tableau de proportionnalité :

On peut passer d'une colonne à une autre **en multipliant « horizontalement » par un même nombre.**

Justification :

Puisque les colonnes forment des fractions, alors multiplier horizontalement une colonne par un même nombre, revient en fait à multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction (représentant la colonne) par ce même nombre, ce qu'on a le droit de faire évidemment !

Application : Sans calculer le coefficient de proportionnalité, remplir les 3 tableaux de proportionnalité suivants *en faisant apparaître en haut et en bas les mêmes multiplications « horizontales »* :

$\times \ldots$

5	10
53	…

$\times \ldots$

…	66
20	60

27	3
…	8

- Remarque : Cette propriété de multiplication entre les colonnes d'un tableau de proportionnalité s'appelle la « linéarité de la proportionnalité ». D'après cette propriété de linéarité, on peut donner une autre définition de la proportionnalité :

Définition bis de la Proportionnalité

Soit une grandeur X qu'on multiplie par un nombre fixé.

Si la grandeur Y se retrouve aussi multipliée par ce même nombre fixé, alors les grandeurs X et Y sont dites proportionnelles.

Exemple : Quand le nombre de compas double alors le prix total des compas double donc le prix total est proportionnel au nombre de compas.

VI. RECONNAITRE UN TABLEAU DE PROPORTIONNALITE.

A. Méthode par égalité de fractions :

➢ Pour vérifier qu'un tableau représente bien une situation de proportionnalité :

❶ On simplifie séparément chaque fraction correspondant chacune à une *colonne inversée*.

❷ Si ces fractions sont toutes égales au même rapport, alors on a proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité sera alors ce rapport simplifié correspondant à une colonne inversée.

➢ Exemple : Le tableau ci-contre est-il de proportionnalité ?

5	20	15
3	12	9

① On forme les fractions correspondant aux colonnes inversées :

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{12}{20} = \frac{3\times4}{5\times4} = \frac{3}{5} \qquad \frac{9}{15} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{3}{5}$$

② On conclut : « Puisque $\frac{3}{5} = \frac{12}{20} = \frac{9}{15}$, alors on a un tableau de pplté et le coefficient de pplté vaut $\frac{3}{5}$ (F.I !). »

B. Exercices : reconnaître un tableau de proportionnalité :

❶ Dans l'un de ces 3 magasins, il y a proportionnalité. Lequel ? Justifier.

Magasin La Déroute

Nombre de règles	6	12	30
Prix de la boîte de règles (en €)	15	30	60

Magasin Les 3 Cuisses

Nombre de compas	5	15	25
Prix total (en €)	8	24	35

Magasin Les Galeries La Faillite

Nombre de bouquins de maths	4	12	24
Prix total (en €)	6	18	36

Ecrire alors la relation de proportionnalité correspondante.

❷ Y a-t-il ici proportionnalité entre le prix d'un terrain et son aire ? Justifier.

Aire du terrain (en m^2)	325	650	1 300
Prix (en milliers de €)	220	440	870

VII. REMPLIR UN TABLEAU DE PROPORTIONNALITE.

On a vu p.7 qu'une situation de proportionnalité repose mathématiquement sur l'………………… des fractions (chaque fraction représentant une ………….………… du tableau de proportionnalité).

Ces égalités de fractions permettent de trouver un ou plusieurs nombre inconnu dans un tableau de pplté.

A. Calcul d'une 4ème proportionnelle par égalité de fractions :

Voici 2 tableaux de proportionnalité incomplets qu'on veut remplir.

Compléter les 4 égalités de …………………….. permettant de trouver x, y, z, et k puis **résolvez** ces 4 équations.

5	12	y
7	x	21

k	10	6
7	z	9

$\frac{y}{21} = \frac{5}{7}$ $\frac{x}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

B. Trois remarques sur le calcul des 4èmes proportionnelles :

❶ Pour minimiser les erreurs, on forme chaque égalité de fractions :

- **en s'assurant que l'inconnue soit au numérateur.**
- **en réutilisant à chaque fois la colonne complète déjà donnée par l'énoncé.**

❷ *On pouvait aussi trouver y par multiplication horizontale sur la 1ère colonne en remarquant que* $7 \times 3 = 21$ *donc* $5 \times 3 = y$.

On pouvait aussi trouver z par multiplication verticale sur la 1ère ligne par le coefficient de pplté qui est donnée par la 3ème colonne inversée $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ *F.I.* *D'où* $z = 10 \times \frac{3}{2} = 5 \times 3 = 15$.

On voit donc qu'on dispose d'un large éventail de méthodes pour remplir un tableau de pplté :

- **par égalité de …………………………… (méthode principale).**
- **par multiplication « verticale » entre deux lignes par le coefficient de pplté ou par son inverse.**
- **par multiplication « horizontale » entre la colonne complète et une autre colonne.**

Ces 3 méthodes donnent évidemment les mêmes résultats car elles reposent en fait toutes sur l'………………….……… des ……………………..……

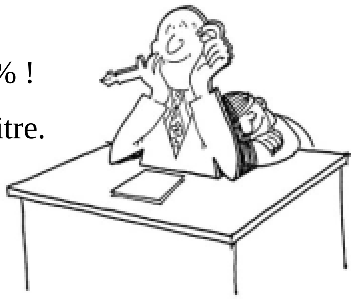
❸ On appelle « 4ème proportionnelle » toute quantité inconnue dans une situation de proportionnalité.

On parle de 4ème proportionnelle car c'est la 4ème quantité (inconnue) dans l'égalité de fractions.

VIII. RESOLUTION DE SITUATIONS UTILISANT LA PPLTE.

A. Méthode générale en 2 étapes :

Reprenons une situation soit disant difficile du contrat ③ sur les fractions (p.16) et voyons qu'on peut le résoudre facilement en utilisant la proportionnalité et une bonne méthode !



« Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40 % !
Sans écouter, il faut prévoir 15 heures au total de travail à la maison pour un chapitre.
Combien de temps travaillerez-vous en écoutant ? » (Réponse = 9 h)

Il est question de pourcentages donc on a affaire à une situation de proportionnalité.

- **Etape ① : Traduction de la situation sous forme de Tableau de proportionnalité.**

• Il faut que l'énoncé nous donne une colonne complète du tableau. Cette information est donnée par le pourcentage !

« Travailler 40 % de moins (- 40 %) en écoutant en classe. » signifie que :

*Pour **100 h** prévues de travail au total, on travaillera, grâce à une meilleure écoute, 40 h en moins **c-à-d 60 h (= 100 – 40)**.*

Ce raisonnement classique sur une baisse en pourcentage constitue la seule petite difficulté.

• Il s'agit d'une situation de répartition donc le nombre 100 doit correspondre au nombre total d'heures prévues de travail.

Durée totale prévue de travail (en h)	100	15
Durée de travail en écoutant (en h)	….	t

- **Etape ② : Calculs des 4$^{\text{èmes}}$ proportionnelles + Phrases-Réponses.**

- Par égalité des fractions, on a : $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ *On calcule la 4ème proportionnelle t.*

- *On n'oublie pas de faire une phrase réponse :*

Et oui ! Ecouter en classe permet de travailler 9 h au lieu de 15 h pour un contrat ! Ca vaut le coup !

- Remarque : Faites la comparaison entre cette résolution par tableau de proportionnalité et la classique résolution par Analyse-Synthèse de la situation.

Les 2 méthodes sont évidemment valables mais celle par tableau est très élégante.

B. Résumé de la Méthode en …… étapes :

Etape ❶ : Fabrication du tableau.

Il s'agit de traduire la situation de proportionnalité (de répartition ou d'évolution) sous forme de tableau de proportionnalité.

C'est l'étape la plus importante et évidemment la moins facile.

②	①	③
②	①	③

On remplit le tableau dans l'ordre suivant :

① la colonne complète numérique **(donnée dans l'énoncé soit par un %, soit par une fraction, soit par 2 informations numériques liées).**

② les intitulés précis en tête (début) de ligne **(en n'oubliant pas les unités !).**

③ une colonne par question **(mettre une lettre bien choisie dans les cases inconnues).**

Etape ❷ : Calculs des 4èmes proportionnelles + Phrases-Réponses.

- Calculs des 4èmes pptielles inconnues **principalement par égalité de fractions (produit en croix).**
- Réponses **en bon français** aux questions posées.

C. Situations de proportionnalité à résoudre :

J'ai assez bossé, à vous maintenant ! En **respectant rigoureusement la méthode ci-dessus en …… étapes** (sauf exercice préliminaire), résoudre les situations suivantes **sur votre cahier d'exercices :**

➢ **Exercice préliminaire : Colonnes complètes et pourcentages.**

Ecrire les «colonnes» correspondant à :

15 %	+ 15 %	– 15 %	20 %	+ 20 %	– 20 %.
100	100				

➢ **Situation 1 : Contrôle 4ème 2004.**

Cet exercice comporte …….. situations différentes. Donc nous aurons besoin de …… tableaux de pplté.

A une élection cantonale, la candidate Aimoi Elise a obtenu les résultats suivants dans trois villes :

1. A Bures sur Yvette, il y a 3 500 votants et elle a obtenu 32% des voix. Combien de voix obtient-elle ?
2. A Orsay, elle a obtenu 748 voix représentant 34 % des voix. Combien y avait-il de votants ?
3. A Gif sur Yvette, sur 2 500 votants, elle a obtenu 850 voix. Quel pourcentage de voix a-t-elle obtenu ?

➢ **Situation 2 : L'espoir fait vivre.**

En 1900, l'espérance de vie des hommes en France était égale à 49 ans.

En 2007, cette espérance de vie avait augmenté de 58,2 %.

*Cela signifie que : « Si l'espérance de vie pour les hommes en 1900 était de **100 ans** alors l'espérance de vie en 2007 aurait augmenté de ……………. années pour atteindre **…………. ans**. »*

Calculer l'espérance de vie des hommes en France en 2007 arrondie à l'année.

➢ **<u>Situation 3</u> : Vitesse de remplissage.**

Un robinet ouvert permet de remplir huit seaux de dix litres en deux minutes.

1. Quel est le temps nécessaire pour remplir un réservoir de quatre cents litres ?
2. Toujours avec ce même robinet, quelle est la quantité d'eau écoulée en une heure ?

➢ **<u>Situation 4</u> : Contrôle 2004.**

Ce sont bientôt les vacances. N'oublions pas notre carte routière à l'échelle $\frac{1}{400\ 000}$!

Cela signifie que : « …………… cm sur la carte représente …………………… cm en réalité »

1. Matuvu et Ahouioussa sont séparées par 2,5 cm sur la carte.
   Quelle distance réelle les sépare ?
2. Les villes de Ehdidon' et Ouipatro' sont distantes dans la réalité de 31 km. Mais la carte indique 7,5 cm. La carte est elle précise ?

➢ **<u>Situation 5</u> : Un cocktail bien proportionné.**

Une Fleur d'Amour est un cocktail sans alcool composé de 4 cl de jus d'ananas, 7 cl de jus de mangue, 7 cl de nectar de bananes. Excellent pour une soirée dédiée aux Maths !

1. Quelle est la proportion de jus de mangue par rapport au volume total ? **(Analyse-Synthèse)**
2. Dans l'euphorie mathématique, on décide d'inviter des ami(e)s pour partager notre joie. Il faut fabriquer 2,2 litres de « Fleur d'Amour ». 0,9 litres de jus de mangue suffira-t-il ? **(Tableau)**
3. Pendant vos révisions de Maths à la maison, réalisez le cocktail et donnez-moi vos impressions.

➢ **<u>Exercice 6</u> : Augmentation en pourcentage.**

En 2002, il y avait 17,9 millions d'internautes en France. En juin 2011, ils étaient 42,3 millions environ.

Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre d'internautes en France entre 2002 et 2011.

➢ **<u>Situation 7</u> : Chaud chaud chaud cacao ! Contrôle 2004.**

Du chocolat de qualité moyenne contient $\frac{2}{3}$ de cacao.

Cela signifie que : « Sur 3 ………………………………………………………………………………, il y a 2 ………………………………………………………………. »

1. Quelle quantité de chocolat peut-on fabriquer avec 300g de cacao ?
2. Quelle quantité de cacao faudra-t-il pour fabriquer 6 tablettes de 150g de chocolat ?

Annie Cordy : Cho Ka Ka O, 1985.

➢ **<u>Exercices sur le web</u>** : Site « maths au collège » de François Loric (voir rubrique liens sur mon site), rubrique Exercices, Proportionnalité.

IX. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA PROPORTIONNALITE.

Un magasin octroie 10 % de réduction aux clients possédant sa carte de fidélité.

Le *montant de l'économie réalisée* par rapport au *prix total* sera donné par la relation de proportionnalité :

Economie réalisée (en €) = …….. × ………………………………….…… (en …..)

Le coefficient de proportionnalité est ……… = ..…….. F.I !

Représentons cette situation de proportionnalité sous forme de tableau :

× …..

Prix total (en €)	20	25		
Economie réalisée (en €)	2		20	1,6

× …..

A. Construction d'un graphique à partir d'un tableau :

- Le tableau est très pratique pour effectuer les calculs et la relation de proportionnalité résume ce tableau.

Mais ni la relation de proportionnalité ni la représentation sous forme de tableau de valeurs ne donnent *au premier coup d'œil* une idée des variations de la situation (y a-t-il augmentation rapide de l'économie lorsque le prix total augmente par exemple).

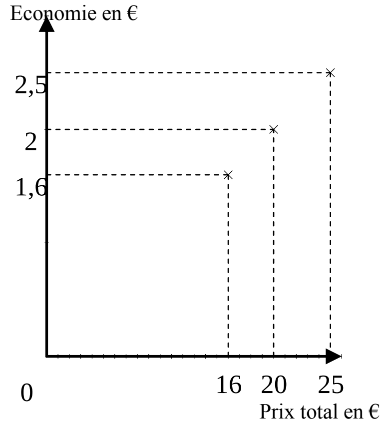
- C'est pourquoi, à partir du tableau, on construit un graphique dans un repère orthonormé. Mais comment donc ? Hein ?

C'est simple : à chaque colonne numérique du tableau, on associe un point (et ses coordonnées).

Par exemple, à la 1ère colonne correspond le point de coordonnées (20 ; 2), à la 2ème colonne correspond le point (25 ; 2,5) etc.

La 1ère ligne du tableau donne les abscisses des points.

La 2ème ligne du tableau donne les …………………….. des points.



Voici le graphique qu'on obtient. Remarquez les intitulés précis des axes !

Vérifiez à la règle que les 3 points dessinés sont alignés avec le point origine.

C'est bon ? ………..

B. Propriétés graphiques de la proportionnalité :

Propriété : **Sur une représentation graphique,**

	……. *condition ou hypothèse*		……. *résultats ou conclusions*
Quand	on a une situation de proportionnalité	alors	***TOUS*** les points sont ① alignés ② avec le point origine .

Utilité : Cette propriété sert à représenter graphiquement une situation de proportionnalité.

La réciproque est vraie aussi :

Réciproque : **Sur une représentation graphique,**

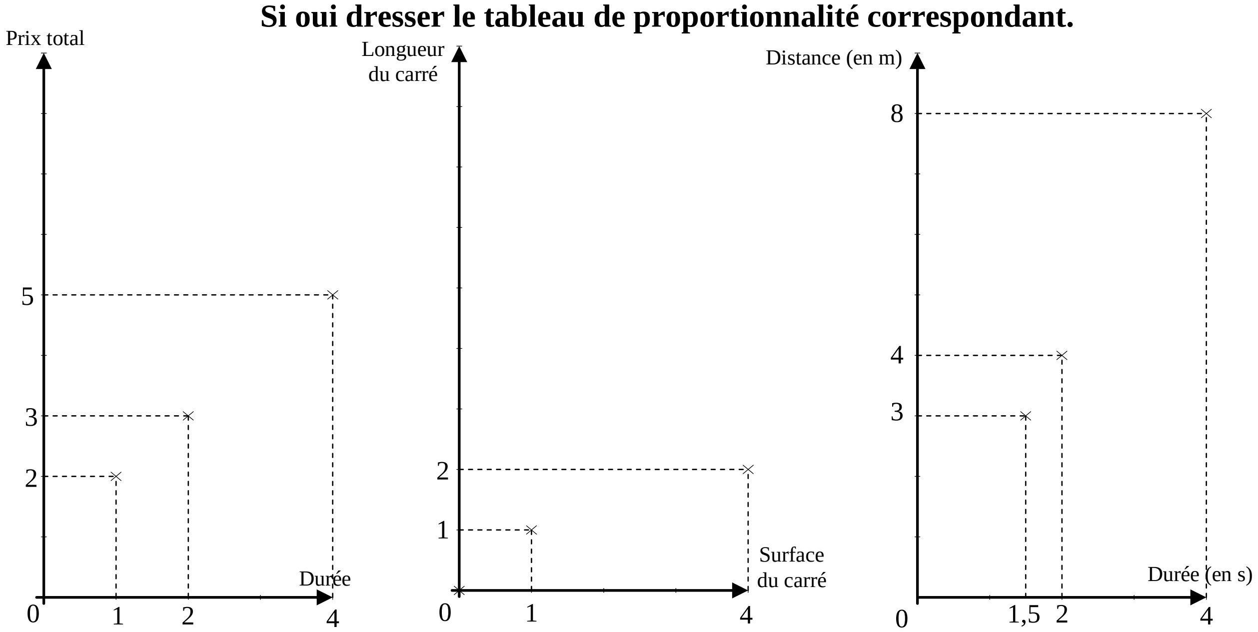
	……. *conditions ou hypothèses*		……. *résultat ou conclusion*
Quand	***TOUS*** les points sont ① ………………… ②avec ……………………..……..	alors	on a une situation de ………………………………

Utilité : Cette propriété sert à reconnaître graphiquement une situation de …………………………………

C. Exercices : Graphiques et Proportionnalité.

❶ Les graphiques suivants sont-ils représentatifs de situations de proportionnalité ? **Justifier !**

Si oui dresser le tableau de proportionnalité correspondant.

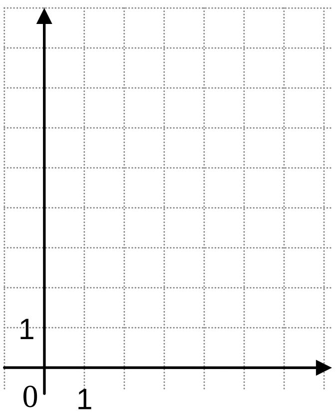


❷ 1) Justifier *par des calculs* si les 2 tableaux ci-dessous sont ou non des tableaux de proportionnalité.

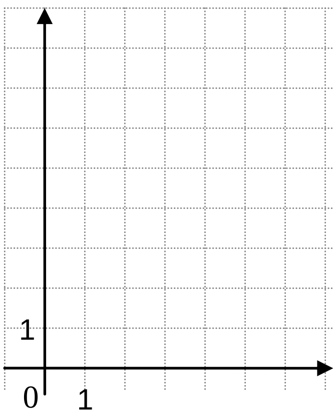
Longueur du carré (en cm)	1	2	3
Surface du carré (en cm²)	1 (= 1^2)	…	…

Longueur du carré (en cm)	0,5	1	2
Périmètre du carré (en cm)	2 (= $0,5 \times 4$)	…	…

2) Construire le graphique correspondant à chaque tableau et vérifier à la règle s'il y a situation de pplté.



- Ecrivez les intitulés précis pour chaque axe.
- Donner un titre à chaque graphique.



X. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LA PROPORTIONNALITE.

➢ Exercice 1 : Pourcentages et Santé Publique.

Expliquer les trois pourcentages suivants :

1. « 90% des cancers du poumon sont provoqués par le tabac. »

Sur 100 ………………………………………………………………, il y a …………………………………......

………………………………………………………

2. « Entre 1950 et 2000, le nombre de cancers du poumon a augmenté de 600 % chez la femme ! »

Pour 100

3. « Etre exposé continuellement à la fumée d'un fumeur (tabagisme passif) augmente le risque de cancer du poumon de 26 %. »

➢ Exercice 2 : Reconnaître une situation de proportionnalité.

Pour chaque situation ci-dessous :

1. Préciser dans le tableau chacune des deux grandeurs intervenant, son unité et sa valeur.
2. Justifier s'il s'agit d'une situation de proportionnalité (en utilisant la définition bis de la pplté p.8).

Situation 1 : « 12 m² de moquette coûtent 150 €. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité? Justifier.

Situation 2 : « Au dernier contrôle, il y avait 6 exercices à faire en 1 h. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité? Justifier.

<u>Situation 3 :</u> « Un cercle de diamètre 3 cm a pour périmètre 3π cm. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité? Justifier.

➢ <u>Exercice n° 3 (……………….……… / 4 points)</u> : Proportionnalité ou pas ? Test 2008.

Une agence de voyage propose des « journées maths » au tarif suivant :

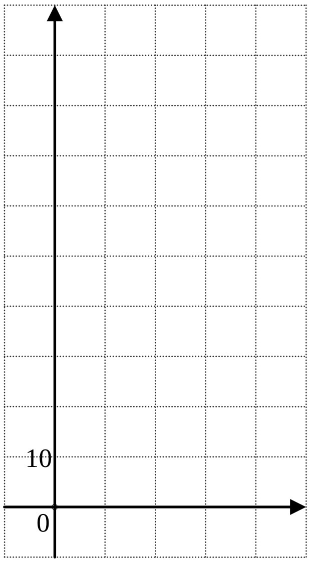
20 € la journée *plus* une inscription unique et obligatoire de 10 €.

1. Compléter le tableau (on ne demande pas le détail des calculs) : (……………….… / 1 pt)

Nombre de journées commandées	1	2	….
Prix total à payer (en €)	30	…	90

2. Le prix à payer est-il proportionnel au nombre de journées commandées ? Justifier par des calculs (…….……… / 1 pt).

3. A l'aide du tableau, représenter graphiquement la situation (……….…….. / 1 pt).
4. Justifier graphiquement le résultat de la question 2. (…………….….. / 1 point).



➢ <u>Exercice n° 4 (…………….………… / 3,5 points)</u> : Contrôle 2007.

Lors d'une enquête auprès de 480 automobilistes à la sortie du redoutable bouchon de 8h30 de Vélizy, 300 ont répondu « ☹☠💣 » et 15 % sont allés vendre leur véhicule.

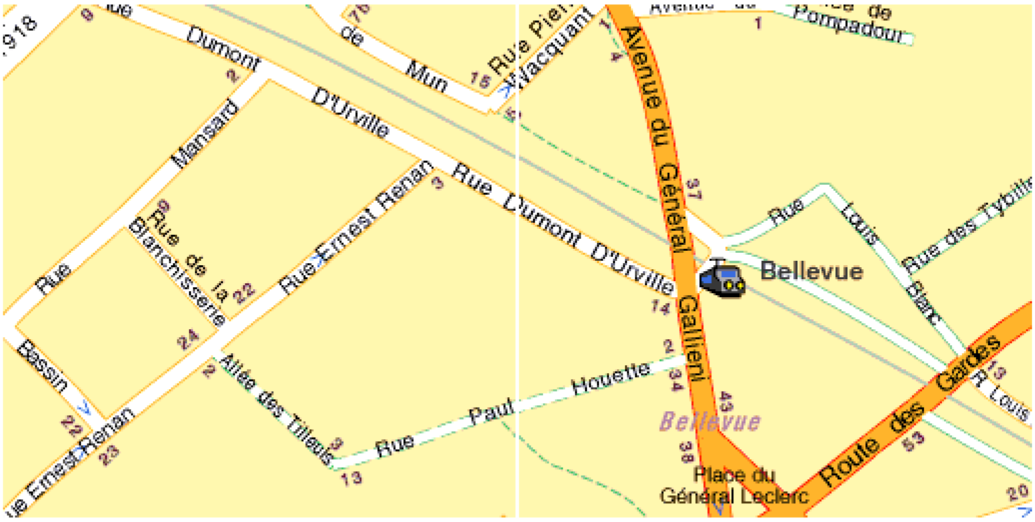
Les conducteurs restants ont déclaré « que le bouchon ne durait pas assez longtemps pour vraiment l'apprécier ».

1. Quel est la proportion de ceux qui ont répondu « ☹☠💣 » ? (………………..….. / 1,5 points) (**Analyse-Synthèse)**
2. Combien de conducteurs trouvent « que le bouchon ne dure pas assez longtemps » ? (……….................. / 2 pts) (**Analyse-Synthèse)**

➢ Exercice n° 5 (……………………… / 4 points) : Echelle et Proportionnalité. Contrôle 2007.

Ce morceau de carte représente le quartier de l'école La Source à Meudon (92).

L'échelle est la suivante : 50 m



1. Pointez en vert le Collège rue Ernest Renan, en face de la Rue de la Blanchisserie.
2. Le Lycée situé Rue de la Tour est ici hors carte. Il est distant de 384 m à vol d'oiseau du Collège.

A combien de cm du Collège est dessiné le Lycée ? (…………….. / 1,5 points)

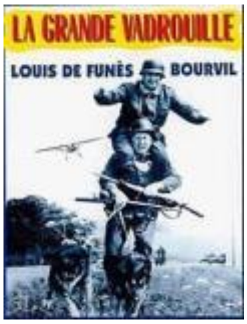
3. Tracez proprement en vert, le plus court chemin pour aller en marchant du Collège à l'entrée principale de la Gare de Bellevue. (……………..… / 0,5 points)
4. Quel est la longueur réelle (arrondie au mètre) de ce plus court chemin ? (…………….. / 2 points)

➢ Exercice n° 6 (…..……………..… / 5 points) : Autant en emporte les chiffres. Contrôle 2008.

Tous les « biloutes » de France doivent être contents !

Avec un compteur affichant 17 645 132 billets vendus au soir du jeudi 10 avril 2008, la comédie « Bienvenue chez les Ch'tis » s'impose comme le plus gros succès français de tous les temps en dépassant une « Grande Vadrouille (1966) » qu'on croyait intouchable !

Placés sur la deuxième marche du box-office, les gars du ch'nord ont désormais dans leur ligne de mire le « Titanic (1997) ». Après le tandem Bourvil / De Funès, la vague ch'ti coulera-t-elle le grand paquebot qu'on croyait insubmersible ? Avec les vacances, tout est possible...



1. Selon les derniers chiffres publiés par l'INSEE du 16 janvier 2008, la France comptait en métropole environ 61 875 000 habitants. En supposant que ce nombre n'ait pas beaucoup varié depuis, quel est environ le pourcentage (arrondi au centième) de la population française qui a vu le film « Bienvenue chez les Ch'tis » ? **(Tableau)** (…..……..…….. / 1,5 pts)

2. Le nombre d'entrées pour « La Grande Vadrouille » est environ ***2,2 % moins grand*** que le nombre d'entrées pour « Bienvenue chez les Ch'tis ». Combien de personnes (arrondi à l'unité) sont allés voir au cinéma « La Grande Vadrouille » ? **(Tableau)** (……………..…….. / 2 pts)

3. Parmi les 58 298 962 habitants en métropole que comptait la France à la fin de l'année 1997, environ 35,6 % avaient été voir le film « Titanic ».

Combien d'entrées (arrondi à l'unité) a réalisé le film « Titanic » ? **(Synthèse)** (……………… / 1,5 pts)

➢ Terminons par une dernière remarque sur la proportionnalité :

Ce concept, très présent dans nos vies quotidiennes sera revu en 3ème : en fait la proportionnalité est la traduction numérique d'un concept algébrique encore plus général : la Linéarité.

En 3ème, vous verrez l'application de la linéarité aux fonctions : les fonctions linéaires.

Maintenant, il ne faut pas croire que tout varie de manière proportionnelle et que tout tableau est un tableau de proportionnalité, loin de là ! Par exemple, la surface d'un carré n'est pas proportionnelle à sa longueur ; la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la durée du freinage ; la qualité est rarement proportionnelle au prix etc. Vous verrez des exemples plus détaillés de non proportionnalité à partir de l'année de 2de.

Ces exemples montrent qu'il ne faut pas confondre les expressions « qui dépend de » avec « proportionnel à ». La proportionnalité est une relation de dépendance bien particulière : une dépendance multiplicative fixe entre 2 grandeurs.

XI. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

➢ Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Définitions de la proportionnalité (formule ou tableau ou définition bis p.8).			
Prouver qu'un tableau est ou non de proportionnalité.			
Remplir un tableau de proportionnalité à partir d'une situation donnée.			
Coefficient et égalité de fractions.			
Calculer le coefficient de proportionnalité à partir d'une colonne inversée.			
Trouver une 4ème proportionnelle par égalité de fractions et résolution d'une équation de type $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.			
Résoudre un problème en appliquant rigoureusement la méthode en 2 étapes.			
Problème de pourcentages simples.			
Problème de hausse ou baisse en pourcentage.			
Problème d'échelle.			
Représentation graphique de la proportionnalité.			
Aimer la proportionnalité.			

➢ **Pour préparer le test et le contrôle : Livre (Magnard 5ème 2006) Evaluations p.212 et 213.**

B. Conseils :

➢ <u>Prouver qu'on a un tableau de pplté</u> :

Utilisez la méthode par fractions à simplifier, c'est la plus simple !

Ne pas oublier d'écrire le coefficient de proportionnalité.

Quand il y a la colonne 0/0, il faut obligatoirement utiliser soit la multiplication par le coefficient, soit les produits en croix.

- Tableaux :

Faites les assez grands. Ne dessinez que l'armature intérieure.

Soyez précis dans les intitulés. N'oubliez pas les unités !

Il est préférable que toutes les quantités soient exprimées **dans la même unité.**

On ne met jamais une date ou une année ou un % dans une case numérique d'un tableau !

On doit forcément avoir une colonne complète (donnée par exemple par une proportion ou par un pourcentage etc.).

- Coefficient : Attention au sens de la fraction (colonne inversée). Entier ou fraction irréductible !
- Calcul des 4èmes pptielles : Par égalité de fractions et en reprenant la colonne complète du tableau.

  Attention à mettre les fractions dans le bon sens.

  On se débrouille pour mettre l'inconnue **au numérateur !**
- Pourcentage : On place forcément le nombre 100 dans le tableau, pas n'importe où !
- Echelle : Attention toutes longueurs doivent être **dans la même unité** !

C. Erreurs à ne pas faire :

- Prouver qu'on a un tableau de pplté : Oublier des produits en croix quand on choisit cette méthode (à déconseiller).
- Tableaux : Mal remplir le tableau : Les nombres ne correspondent pas aux intitulés.

  Ne pas avoir une colonne complète donnée par l'énoncé.

  Oubli des unités ou intitulés imprécis.
- Calcul du Coefficient : Oublier d'*inverser* la colonne complète !
- Calcul des 4èmes proportionnelles : Erreurs dans l'écriture de l'égalité de fractions.

  Erreurs dans la résolution d'équations de type $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.
- Pourcentages : • Confusion entre problème de pourcentage et problème d'augmentation ou baisse en pourcentage.

  • Mal placer le nombre 100 dans le tableau.
- Problème d'échelle : Oublier de convertir **toutes les longueurs dans la même unité.**
- Représentation graphique : Oublier le titre ou les intitulés des axes.

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ……………………………………………………………….

Perle du bac 2011 « Triangle rectangle : c'est un triangle qui a 3 côtés parallèles. »