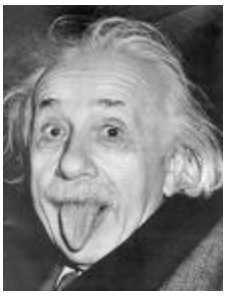
LA PROPORTIONNALITE



« La Théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La Pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. »
« Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue. »

Albert Einstein[1]

➢ *Pré-requis pour prendre un bon départ :*	☹	😐	☺	☺☺
Simplification des écritures fractionnaires.				
Multiplication d'un nombre par une écriture fractionnaire.				
Comparaison de fractions.				
Fraction d'une quantité.				
Fractions et proportions.				
Calculer ou utiliser un pourcentage simple.				

[1] Einstein, Albert (1879-1955) : Grand physicien allemand naturalisé américain. Il proposa la théorie de la relativité restreinte (1905) et générale (1915) et reçut le Prix Nobel de Physique en 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Il a ainsi largement contribué au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie. Son travail est notamment connu pour l'équation E=MC² qui explique la puissance de l'énergie nucléaire. Il est aussi connu pour ses nombreuses facéties, Science et fantaisie faisant chez lui bon ménage.

NOM et prénom : ……………………………………………………. 5ème ……

Abréviations utilisées : ***pplté = proportionnalité.***

pptiel = proportionnel.

I. UN PROF INJUSTE !

Un professeur très sévère a l'habitude de punir les élèves qui bavardent un peu trop en leur donnant des exercices à faire à la maison !

Ainsi hier, il a puni un 1er élève qui a parlé 2 fois en lui donnant 6 exercices à faire.

Puis un 2ème élève a été puni de 11 exercices pour avoir bavardé 4 fois.

➢ Remplir le tableau ① ci-dessous résumant la situation.

Nombre de bavardages	2	4
Nombre total d'exercices à faire	…	…

La situation vous paraît-elle juste ? ……

Pour qui est-elle injuste ? ………………

Pourquoi ? ……………………………………………

……………………………………………………..

➢ Remplir ce nouveau tableau ② pour que la situation précédente soit juste maintenant.

÷ ….

Nombre de bavardages	2	4
Nombre total d'exercices à faire	6	…

× ….

Par une multiplication par combien passe-t-on de la 1ère à la 2ème ligne ? Une multiplication par …….

Par quelle opération passe-t-on de la 2ème à la 1ère ligne ? Une …………………………… par ……..

Quelle égalité peut-on écrire entre le « *Nombre total d'exercices à faire* » et le « *Nombre de bavardages* » ?

Nombre …………………………………… = **……** × *Nombre de …………………………*

➢ En conclusion, on pourra dire que souvent, dans la vie quotidienne, l'idée de situations « justes » se confond avec un concept mathématique très important : **la Proportionnalité**.

• L'égalité « Nb d'exercices = 3 × Nb de bavardages » s'appelle :

une relation de p…………………………..

• Le tableau ② où on passe de la 1ère ligne à la 2ème ligne en multipliant par le coefficient 3 s'appelle :

un tableau de ……………………….……..

• Cette relation et ce tableau sont 2 représentations différentes[2] de la même situation :

une situation de ……………………………...

Nous allons maintenant définir proprement (mathématiquement) ce qu'est la proportionnalité.

---

[2] On verra plus tard à la fin de ce cours p.14 une troisième représentation de la proportionnalité : la représentation graphique.

II. DEFINITION ET REPRESENTATIONS DE LA PPLTE.

Prenons un autre exemple de situation de proportionnalité :

Jeff Aimékours achète *7 cannelés* pour un *prix total de 14 €.*

Le lendemain, il succombe à son péché mignon et rachète dans le même magasin 3 cannelés.

Remplir le tableau ci-dessous.

Nombre de …………………………..	7	….
………………………………….. (en €)	14	….

× …..

Par quelle opération passe-t-on de la 1ère à la 2ème ligne ? Une ……………….……………… par …….

Quelle relation peut-on écrire entre le *Prix total à payer (en €)* et le *Nombre de cannelés achetés* ?

…………….……………..………… (en …..) = **……** × *Nombre de* ………………………..

A. Définition de la proportionnalité :

Les exemples du haut et de la page précédente nous permettent maintenant de définir la proportionnalité.

① Une **situation multiplicative** où les valeurs d'une grandeur Y s'obtiennent en multipliant par un nombre fixé les valeurs d'une autre grandeur X s'appelle une **situation de proportionnalité**.

② Les 2 grandeurs **Y** et **X** sont alors dites **proportionnelles**.

③ Le nombre fixe multiplicateur entre Y et X s'appelle alors le **coefficient de proportionnalité.**

En fait, on utilise rarement la définition telle qu'elle, mais plutôt les 2 représentations suivantes :

B. 2 représentations de la proportionnalité :

➢ Une situation de proportionnalité peut être présentée sous 2 formes :

Sous forme de relation multiplicative (formule) :

Grandeur Y = nb fixe × Grandeur X

Toute relation de type :

une grandeur = une autre grandeur × nb fixe

s'appelle : **Une relation de proportionnalité.**

Sous forme de tableau :

Grandeur X		
Grandeur Y		

× nb fixe

On passe de la ligne du haut à la ligne du bas en multipliant toujours par le même nombre fixe :

On dit que ce tableau est :

Un tableau de proportionnalité.

➢ Dans ces 2 représentations, le coefficient multiplicateur s'appelle le **coefficient de proportionnalité.**

Il pourra avoir un nom plus particulier suivant la situation de proportionnalité. Nous en verrons quelques exemples plus loin.

➢ En 5ème, on va surtout travailler à partir de la représentation sous forme de tableau.

III. 3 EXEMPLES IMPORTANTS DE COUPLES DE GRANDEURS PROPORTIONNELLES.

A. 1er exemple : Pourcentages et Proportionnalité.

➢ Soit une crème contenant 25 % de Matière Grasse (MG).

La proportion de *Masse de matière grasse* par rapport à la *Masse totale de la crème* est donc $\frac{\dots}{\dots}$.

Autrement dit : « Pour ……… g de crème, il y a …….. g de matière grasse. »

Et on a la formule : *Masse de matière grasse dans la crème* = $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × ……………………………………

C'est une relation de …………………………… Les masses de crème et de MG sont donc proportionnelles.

Compléter le tableau de proportionnalité correspondant :

Masse totale de la crème (en g)	100	500	…..
Masse de matière grasse (en g)	25	…..	50

Coefficient de proportionnalité

$\times \frac{25}{100}$

➢ 3 remarques :

❶ On passe bien de la 1ère ligne à la 2ème ligne du tableau en multipliant par le nombre fixe $\frac{25}{100}$ qui est la proportion de MG dans la crème. Cela revient en fait à appliquer 3 fois de suite la formule :

à 100 d'abord ($100 \times \frac{25}{100} = 25$), puis à 500 ($500 \times \frac{25}{100} = 125$), puis à 200 ($200 \times \frac{25}{100} = 50$).

❷ Le coefficient doit être écrit sous **la forme la plus simple possible : soit un entier, soit une fraction irréductible :** ici $\frac{25}{100}$ = ……. F.I ! Modifier le coefficient dans le précédent tableau !

❸ La formule : Masse de matière grasse dans la crème = $\frac{1}{4}$ × Masse totale de la crème

peut se transformer en : Masse de matière grasse dans la crème = $\frac{\text{Masse totale de la crème}}{4}$

Et dans la boîte de l'opérateur à droite du tableau, on peut aussi bien écrire $\times\frac{1}{4}$ que ÷ 4.

La proportionnalité fonctionne aussi bien avec une multiplication entre les lignes du tableau qu'avec une division (par l'inverse).

➢ En conclusion :

① *« Appliquer un pourcentage à une grandeur » est une situation de proportionnalité !*

Le pourcentage donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

② Plus généralement, ***« Prendre la fraction d'une quantité » est une situation de proportionnalité.***

La proportion (la fraction) donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

B. 2ème exemple : Agrandissement-Réduction et Proportionnalité.

➢ Sur la reproduction d'un dessin *à l'échelle 3*, les *Longueurs Dessinées* sont obtenues en multipliant les *Longueurs Réelles* par le même coefficient de proportionnalité qui vaut évidemment ……

L'échelle 3 signifie : « Si la *longueur réelle* vaut 1, alors la *longueur dessinée* correspondante vaudra …… »

D'où la formule : *Longueur Dessinée* = ……. × …………………………………………………

Compléter le tableau de proportionnalité correspondant.

Longueurs Réelles (en cm)	1	50		200	
Longueurs Dessinées (en cm)	3		300		210

échelle

× …..

➢ En conclusion :

① ***Les situations d'agrandissement-réduction sont des situations de proportionnalité !***

On utilise donc la proportionnalité pour tout ce qui est plans, cartes, microscopes, modèles réduits, etc.

② **Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité s'appelle : l'…………………………**

Formule de l'échelle : **Echelle** = $\dfrac{\textbf{Longueur Dessinée (unité)}}{\textbf{Longueur Réelle (même unité)}}$

L'échelle donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

C. 3ème exemple : Conversions d'unité et Proportionnalité.

① ***Les formules de conversion d'unité sont des relations de proportionnalité !***

② **Le coefficient porte, dans les situations de conversion, un nom spécial : le coefficient de conversion.**

Ex : Pour convertir des mètres en centimètres, on a la formule :

Longueur (en cm) = 100 × Longueur (en m)

Donc les longueurs en cm et les longueurs en m sont bien ……………………………….…………..……...

Le coefficient de conversion vaut : …….

➢ Exercice : Compléter les 4 relations de conversion suivantes :

Poids (en kg) = 0,001 × Poids (en ……..) Durée (en s) = 3 600 × Durée (en ………………….)

………………………….. = 1 000 × Distance (en km) Aire (en m²) = …………... × Aire (en ha)

IV. COEFFICIENT DE PPLTE ET EGALITE DE FRACTIONS.

A. Activité :

- Voici une situation de pplté : Un paresseux (l'animal, pas l'élève !) parcourt 2 km en 4 heures.

En supposant que le paresseux garde toujours la même allure, on cherche à prévoir *la distance* que cet animal pas pressé va parcourir *durant* 8 h ; durant 30 min ; durant 1 journée.

- Compléter le tableau de proportionnalité représentant cette situation de correspondance :

$\times \frac{1}{c}$

…………… du parcours (en ………)	4	…	…	…
…………………… parcourue prévue (en ………)	2	…	…	…

$\times$ c

Le coefficient de proportionnalité (ici noté c) est le nombre inconnu qui vérifie l'égalité : $4 \times c = 2$.

Pour trouver un nb inconnu dans une multiplication, on utilise une division donc $c = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ F.I !

- En formant les 4 fractions $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{0,25}{0,5}, \frac{12}{24}$ correspondant aux 4 colonnes *inversées*, on remarque qu'elles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$! Le coefficient de proportionnalité est donc bien $\frac{1}{2}$.

B. Coefficient de proportionnalité et colonnes inversées :

L'activité précédente nous permet d'énoncer la propriété suivante :

① Toutes les colonnes inversées forment des fractions toutes égales au coefficient de proportionnalité.

② Pour calculer le coefficient de proportionnalité, il suffit donc d'avoir une colonne complète :

Le coefficient est égal à la fraction inversée correspondant à cette colonne complète.

Preuve de la propriété :

On a : Distance parcourue (en km) $= \frac{1}{2} \times$ Durée du parcours (en h) C'est la relation de proportionnalité.

D'où : $\frac{\text{Distance parcourue (en km)}}{\text{Durée du parcours (en h)}} = \frac{1}{2}$ On a isolé à droite le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{2}$ dans l'égalité.

En remplaçant dans cette formule Distance et Durée par leurs valeurs correspondantes dans chaque colonne, on a bien :

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

CQFD !

- Remarque et définition :

Ici le coefficient de proportionnalité s'obtient donc par l'opération $\frac{\text{Distance parcourue (en km)}}{\text{Durée du parcours (en h)}}$.

Cette fraction revient à savoir combien de kilomètres sont parcourus par le paresseux par heure de trajet : ce coefficient de proportionnalité représente donc ***la distance moyenne parcourue (en km) par heure de trajet.***

On a donné un nom à cette distance moyenne par unité de temps : c'est la vitesse moyenne de déplacement !

Le coefficient de proportionnalité représente donc ici **la vitesse moyenne (en km par heure notée km/h).**

Puisque le paresseux se déplace **à vitesse constante**, on dit que son **mouvement est uniforme.**

Le mouvement uniforme (*à vitesse constante*) est donc une situation de proportionnalité.

C. Sens profond de la proportionnalité :

Le mot proportionnalité est construit à partir de 2 mots : *Proportionnalité*

Proportions ……………………

On peut donc écrire : Proportionnalité ⇔ Proportions + Egalité.

Ce qui veut dire Proportionnalité ⇔ Egalité des Proportions.

Ce qui veut dire Proportionnalité ⇔ Egalité des Fractions.

La composition du mot proportionnalité pose en fait le fondement mathématique de la proportionnalité :

La Proportionnalité repose sur l'Egalité des Fractions !

En pratique : Quand on a affaire à une **situation de proportionnalité**, il faut automatiquement penser à **utiliser l'égalité des fractions formées par les colonnes** du tableau correspondant. **Et vice versa**.

V. PROPRIETES DES TABLEAUX DE PROPORTIONNALITE.

Voici 2 propriétés qui vont être utiles pour compléter un tableau de proportionnalité.

A. Multiplication « verticale » entre 2 lignes d'un tableau de pplté :

D'après la définition p. 2 de la proportionnalité, on a la propriété suivante :

Propriété entre les lignes d'un tableau de proportionnalité :

❶ Pour passer **de la 1ère à la 2ème ligne, on multiplie « verticalement »** par le ……………………………..

❷ **Inversement,** pour passer **de la 2ème à la 1ère ligne, on ………………………** par le coefficient de pplté ou, ce qui revient au même, **on multiplie « verticalement » par l'inverse** du coefficient de pplté.

➢ Application : Pour chacun de ces 4 tableaux de proportionnalité :

1) Calculer d'abord le coefficient de proportionnalité (FI !) *puis* reporter les opérateurs à droite puis à gauche du tableau.
2) Calculer la valeur de la lettre inconnue par multiplication verticale par le coeff. de pplté, ou par son inverse.

× 11 × $\frac{1}{11}$

55	33
5	x

6	y
27	60

27	12
z	8

t	25
9	30

Méthode

1) • Coeff = $\frac{5}{55} = \frac{1}{11}$ F.I !
(colonne complète inversée !)
• Report des coefficients.

2) $x = 33 \times \frac{1}{11}$

$x = \frac{33 \times 1}{11}$

x = 3 !

1) Coeff =

2) y =

1) Coeff =

z =18

1)

$t = \frac{15}{2}$

B. Multiplication « horizontale » entre 2 colonnes d'un tableau de pplté :

Propriété entre les colonnes d'un tableau de proportionnalité :

On peut passer d'une colonne à une autre **en multipliant « horizontalement » par un même nombre.**

Justification :

Puisque chaque colonne forme une fraction, alors multiplier horizontalement une colonne par un même nombre, revient en fait à multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction (représentant la colonne) par ce même nombre, ce qu'on a le droit de faire évidemment !

➢ Application : Sans calculer le coefficient de proportionnalité, remplir les 3 tableaux de proportionnalité suivants *en faisant apparaître en haut et en bas du tableau les mêmes multiplications « horizontales »* :

× …

5	10
53	…

× …

…	66
20	60

27	3
…	8

➢ Remarque : Cette propriété de multiplication « horizontale » entre les colonnes d'un tableau de proportionnalité s'appelle la « linéarité de la proportionnalité ».

D'après cette propriété de linéarité, on peut donner une autre définition de la proportionnalité :

Définition bis de la Proportionnalité

Soit une grandeur X qu'on multiplie par un nombre fixé.

Si la grandeur Y se retrouve elle aussi multipliée par ce même nombre fixé, alors les grandeurs X et Y sont dites proportionnelles.

2 exemples :

- Lorsque le nombre d'objets achetés double, en général le prix total double aussi (sauf s'il y a une réduction) donc, en général, le prix total est proportionnel au nombre de choses achetées.
- En revanche, si le prix d'une voiture est le double de celui d'une autre voiture, cela ne veut pas dire que la première voiture va 2 fois plus vite que la seconde !

La vitesse d'une voiture n'est donc pas proportionnelle à son prix !

VI. PROUVER QU'UN TABLEAU EST UN TABLEAU DE PPLTE.

Attention, un tableau est rarement un tableau de pplté ! Comment alors reconnaître qu'on en a un ?

A. Méthode par égalité de fractions :

➤ Pour vérifier qu'un tableau représente bien une situation de proportionnalité :

❶ On simplifie séparément chaque fraction correspondant chacune à une *colonne inversée*.

❷ Si ces fractions sont toutes égales au même rapport, alors on a proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité sera alors ce rapport simplifié correspondant à une colonne inversée.

➤ Méthode sur un esemple : Le poids est-il ppptiel à l'aire ?

Aire de la feuille (dm²)	5	20	15
Poids de la feuille (g)	3	12	9

① On forme les fractions correspondant aux colonnes inversées :

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{12}{20} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{3}{5} \qquad \frac{9}{15} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{5}$$

② On conclut : « Puisque $\frac{3}{5} = \frac{12}{20} = \frac{9}{15}$, alors le poids de la feuille est pptiel à son aire (et coefficient = $\frac{3}{5}$). »

B. Exercices : reconnaître un tableau de proportionnalité :

❶ Dans l'un de ces 3 magasins, il y a proportionnalité. Lequel ? Justifier.

Magasin La Déroute

Nombre de règles	6	12	30
Prix total (en €)	15	30	60

Magasin Les 3 Cuisses

Nombre de compas	5	15	25
Prix total (en €)	8	24	35

Magasin Les Galeries La Faillite

Nombre de bouquins de maths	4	12	24
Prix total (en €)	6	18	36

❷ Y a-t-il ici proportionnalité entre le prix d'un terrain et son aire ? Justifier.

Aire du terrain (en m^2)	325	650	1 300
Prix (en milliers de €)	220	440	870

VII. REMPLIR UN TABLEAU DE PROPORTIONNALITE.

On a vu p.7 qu'une situation de proportionnalité repose mathématiquement sur l'………………… des fractions (chaque fraction représentant une ………….………….. du tableau de proportionnalité).

Ces égalités de fractions permettent de trouver un ou plusieurs nombres inconnus dans un tableau de pplté.

A. Calcul d'une 4ème proportionnelle par égalité de fractions :

Voici 2 tableaux de proportionnalité incomplets qu'on veut remplir.

Compléter les 4 égalités de ……………….................. puis **trouver les 4 quantités inconnues x, y, z, et k**.

5	12	y
7	x	21

k	10	6
7	z	9

$\frac{y}{21} = \frac{5}{7}$ $\frac{x}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

B. Trois remarques sur le calcul des 4èmes proportionnelles :

❶ Pour minimiser les erreurs, on forme chaque égalité de fractions :

- **en s'assurant que l'inconnue soit au numérateur.**
- **en réutilisant à chaque fois la colonne complète déjà donnée par l'énoncé.**

❷ *On pouvait aussi trouver y par multiplication horizontale sur la 1ère colonne en remarquant que $7 \times 3 = 21$ donc $5 \times 3 = y$.*

On dispose donc de plusieurs méthodes pour remplir un tableau de pplté :

- **par égalité de ……………………………. (méthode principale).**
- **par multiplication « verticale » entre 2 lignes par le coefficient de pplté ou par son inverse.**
- **par multiplication « horizontale » entre la colonne complète et une autre colonne.**

Ces 3 méthodes donnent évidemment les mêmes résultats car elles reposent en fait toutes sur l'………………………….…… des ……………………..……

❸ On appelle « 4ème proportionnelle » toute quantité inconnue dans une situation de proportionnalité.

On parle de 4ème proportionnelle car c'est la 4ème quantité (inconnue) dans l'égalité de fractions.

VIII. RESOLUTION DE SITUATIONS DE PROPORTIONNALITE.

A. Méthode générale en 3 étapes :

Reprenons une situation soi-disant difficile du contrat ③ sur les fractions (p.16).

Voyons qu'on peut la résoudre facilement en utilisant la proportionnalité et une bonne méthode !

« Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40 % !

Sans écouter, il faut prévoir 15 heures de travail à la maison pour un chapitre.

Combien de temps travaillerez-vous en écoutant ? » (Réponse = 9 h)

➢ **Etape ❶ : Type de situation de proportionnalité ?**

• *Il est question de pourcentages ⇒ Situation de proportionnalité.*

• *-40% de travail signifie que la durée de travail va changer ⇒ **Situation d'évolution** : évolution de la durée de travail.*

➢ **Etape ❷ : Traduction de la situation sous forme de Tableau de proportionnalité.**

ⓐ Le type de situation permet de remplir la colonne des intitulés : ici situation d'évolution donc la 1ère ligne correspond au début (durée de travail initiale) et la 2ème ligne correspond à la fin (durée de travail finale).

ⓑ Il faut que l'énoncé** **donne une colonne complète du tableau. Ici, cette information est donnée par le pourcentage !

« Travailler 40 % de moins (- 40 %) en écoutant en classe. » signifie que :

*Pour **100 h** prévues de travail au total, on travaillera, grâce à une meilleure écoute, 40 h en moins **c-à-d 60 h (= 100 – 40)**.*

*Dans une situation d'évolution, **le nombre 100 correspond toujours à la grandeur au début**.*

ⓒ Une colonne est rajoutée à côté de la colonne complète avec une lettre judicieusement choisie pour la quantité à trouver.

ⓐ *Durée de travail initiale (en h)*	ⓑ 100	ⓒ 15
ⓐ *Durée de travail finale en écoutant (en h)*	ⓑ ……	ⓒ t

➢ **Etape ❸ : Egalités de fractions puis calculs des 4èmes proportionnelles + Phrases-Réponses.**

- Par égalité des fractions, on a : $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ *On calcule la 4ème proportionnelle t.*

- *On n'oublie pas de faire une phrase réponse :*

Et oui ! Ecouter en classe permet de travailler 9 h au lieu de 15 h pour un contrat ! Ca vaut le coup !

➢ Remarque : Faites la comparaison entre cette résolution par tableau de proportionnalité et la classique résolution par Analyse-Synthèse de la situation.

Les 2 méthodes sont évidemment valables mais celle par tableau est très élégante.

B. Résumé de la Méthode par tableau en …… étapes :

❶ **Type de situation de proportionnalité :**

Répartition (partie de quelque chose ?) **Evolution** (augmentation ou baisse d'1 grandeur ?) **Correspondance** (2 grandeurs liées ?)

❷ **Tableau de pplté (à main levée, bordures intérieures seulement !) :**

ⓐ **Intitulés précis en tête (début) de ligne (unités !) suivant le type de situation :**

Répartititon

ⓐ total	ⓑ	ⓒ
ⓐ partie	ⓑ	ⓒ

Evolution

ⓐ début	ⓑ	ⓒ
ⓐ fin	ⓑ	ⓒ

Correspondance

ⓐ grandeur1	ⓑ	ⓒ
ⓐ grandeur2	ⓑ	ⓒ

ⓑ **La colonne numérique complète (sans quantité inconnue) :**

Chercher dans l'énoncé d'abord un %, sinon une fraction, sinon 2 informations numériques liées.

ⓒ **une colonne par quantité à trouver (lettre judicieusement choisie dans chaque case inconnue).**

❸ **Egalités de fractions puis calcul des 4$^{\text{èmes}}$ proportionnelles + Phrases-Réponses.**

C. Situations de proportionnalité à résoudre :

➢ **Exercice préliminaire : Pourcentages et colonne numérique complète.**

Pour chaque pourcentage, répartition ou évolution ? Puis compléter la «colonne» correspondante.

15 %	+ 15 %	– 15 %	+ 200 %	100 %	– 90 %
100	100				

➢ **Situation 1 : D'après Contrôle 4$^{\text{ème}}$ 2004.**

Cet exercice comporte ……… situations indépendantes. Donc nous aurons besoin de …… tableaux de pplté.

A une élection cantonale, la candidate Aimoi Elise a obtenu les résultats suivants dans 3 villes :

1. A Bures sur Yvette, il y a 3 500 votants et elle a obtenu 32 % des voix. Combien de voix obtient-elle ?

❶ Type de situation : Répartition ? Evolution ? Correspondance ?

❷ Tableau de proportionnalité :

❸ Egalité de fractions puis calculs + phrase réponse :

$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

2. A Orsay, elle a obtenu 740 voix représentant 2/3 des voix. Combien y avait-il de votants ?

❶ <u>Type de situation :</u> Répartition ? Evolution ? Correspondance ?

❷ <u>Tableau de proportionnalité :</u>

❸ <u>Egalité de fractions puis calculs + phrase réponse :</u>

$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

3. A Gif sur Yvette, sur 2 500 votants, elle a obtenu 850 voix. Quel pourcentage de voix a-t-elle obtenu ?

❶ <u>Type de situation :</u>

❷ <u>Tableau de proportionnalité :</u>

❸ <u>Egalité de fractions puis calculs + phrase réponse :</u>

- **<u>Situation 2</u> : L'espoir fait vivre.**

En 1900, l'espérance de vie des hommes en France était égale à 49 ans.

En 2023, cette espérance de vie avait augmenté de 63,3 % environ.

Cela signifie que : « Si l'espérance de vie pour les hommes en 1900 était de ***100 ans*** *alors l'espérance de vie e 2023 aurait augmenté de ……………… années pour atteindre* ***……………. ans****. »*

Calculer l'espérance de vie des hommes en France en 2023 arrondie à l'année. (Calculette)

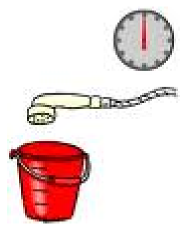
❶ <u>Type de situation :</u> Répartition ? Evolution ? Correspondance ?

❷ <u>Tableau de proportionnalité :</u>

❸ <u>Egalité de fractions puis calculs + phrase réponse :</u>

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

- **<u>Situation 3</u> : Vitesse de remplissage.**



Un robinet ouvert permet de remplir 8 seaux de chacun 10 litres en 2 minutes.

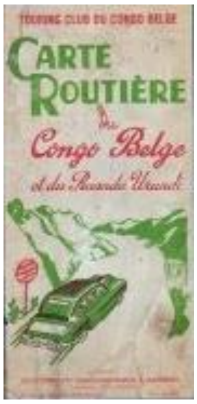
1. Quel est le temps nécessaire pour remplir un réservoir de 400 litres ?
2. Toujours avec ce même robinet, quelle est la quantité d'eau écoulée en 1 heure ?

❶ <u>Type de situation :</u> Répartition ? Evolution ? Correspondance ?

❷ <u>Tableau de proportionnalité :</u>

❸ <u>Egalités de fractions puis calculs + phrase réponse :</u>

- **<u>Situation 4</u> : Contrôle 2004.**



Ce sont bientôt les vacances. N'oublions pas notre carte routière à l'échelle $\frac{1}{400\,000}$!

Cela signifie que : « …… cm sur la carte représente ....……………… cm en réalité, soit ……… km »

1. Matuvu et Ahouioussa sont séparées par 2,5 cm sur la carte.
   Quelle est la distance réelle qui les séparent ?
2. Les villes de Ehdidon' et Ouipatro' sont distantes dans la réalité de 31 km.
   Mais la carte indique 7,5 cm. La carte est-elle précise ?

❶

❷

❸

- **<u>Situation 5</u> : Un cocktail bien proportionné.**

Une Fleur d'Amour est un cocktail sans alcool composé de 4 cl de jus d'ananas, 7 cl de jus de mangue, 7 cl de nectar de bananes. Excellent pour une soirée dédiée aux Maths !

1. Quelle est la proportion de jus de mangue par rapport au volume total ? **(par Analyse-Synthèse)**
2. Dans l'euphorie mathématique, on décide d'inviter des ami(e)s pour partager notre joie. Il faut fabriquer 2,2 litres de « Fleur d'Amour ». 0,9 litres de jus de mangue suffira-t-il ? **(par Tableau)**
3. Pendant vos révisions de Maths à la maison, réaliser ce cocktail et donner vos impressions.

- **<u>Situation 6</u> : Augmentation en pourcentage.**

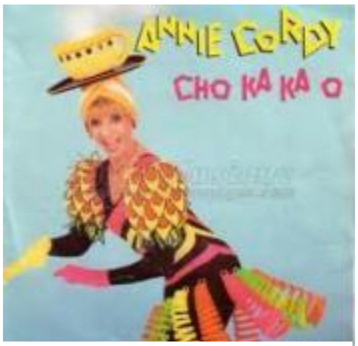
En 2002, il y avait 17,9 millions d'internautes en France. En juin 2011, ils étaient 42,3 millions environ. Quel est le pourcentage d'augmentation (arrondi au 1/10$^{\text{ème}}$) du nb d'internautes en France entre 2002 et 2011 ? (Calculette autorisée pour les calculs finaux)

- **<u>Situation 7</u> : Chaud chaud chaud cacao ! Contrôle 2004.**

Du chocolat de qualité moyenne contient $\frac{2}{3}$ de cacao.

Cela signifie que : « Sur 3 ………………………………………………………………………………, il y a 2 ……………………………………………………………. »

1. Quelle quantité de chocolat peut-on fabriquer avec 300 g de cacao ?
2. Quelle quantité de cacao faudra-t-il pour fabriquer 6 tablettes de 150 g de chocolat ?



Annie Cordy : Cho Ka Ka O, 1985.

IX. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA PROPORTIONNALITE.

Un magasin octroie 10 % de réduction aux clients possédant sa carte de fidélité.

Le *montant de l'économie réalisée* par rapport au *prix total* sera donné par la relation de proportionnalité :

Economie réalisée (en €) = …….. × ……………………………………… (en …..)

Le coefficient de pplté est ……… = ..…….. F.I !

Représentons cette situation de proportionnalité sous forme de tableau :

× …..

Prix total (en €)	20	25	
Economie réalisée (en €)	2		1,6

× …..

A. Construction d'un graphique à partir d'un tableau :

- Le tableau est très pratique pour effectuer les calculs et la relation de proportionnalité résume ce tableau.

Mais ni la relation de proportionnalité ni la représentation sous forme de tableau de valeurs ne donnent *au premier coup d'œil* une idée des variations de la situation (y a-t-il augmentation rapide de l'économie lorsque le prix total augmente par exemple).

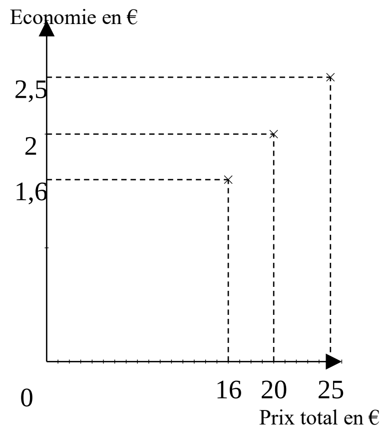
- C'est pourquoi, à partir du tableau, on construit un graphique dans un repère orthonormé. Mais comment donc ? Hein ?

C'est simple : à chaque colonne numérique du tableau, on associe un point (et ses coordonnées).

Par exemple, à la 1$^{\text{ère}}$ colonne correspond le point de coordonnées (20 ; 2), à la 2$^{\text{ème}}$ colonne correspond le point (25 ; 2,5) etc.

La 1$^{\text{ère}}$ ligne du tableau donne les abscisses des points.

La 2$^{\text{ème}}$ ligne du tableau donne les …………………….. des points.



Voici le graphique qu'on obtient. Remarquez les intitulés précis des axes !

Vérifier à la règle que les 3 points dessinés sont alignés avec le point origine.

C'est bon ? ………..

B. Propriétés graphiques de la proportionnalité :

Propriété : **Sur une représentation graphique,**

	……. *condition ou hypothèse*		……. *résultats ou conclusions*
Quand	on a une situation de proportionnalité	alors	***TOUS*** les points sont ① alignés ② avec le point origine .

Utilité : Cette propriété sert à représenter graphiquement une situation de proportionnalité.

La réciproque est vraie aussi :

Réciproque : **Sur une représentation graphique,**

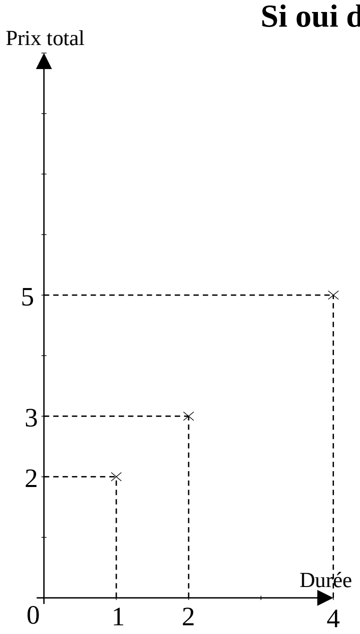
	……. *conditions ou hypothèses*		……. *résultat ou conclusion*
Quand	***TOUS*** les points sont ① ……………….. ②avec ……………………..……..	alors	on a une situation de …………………………….

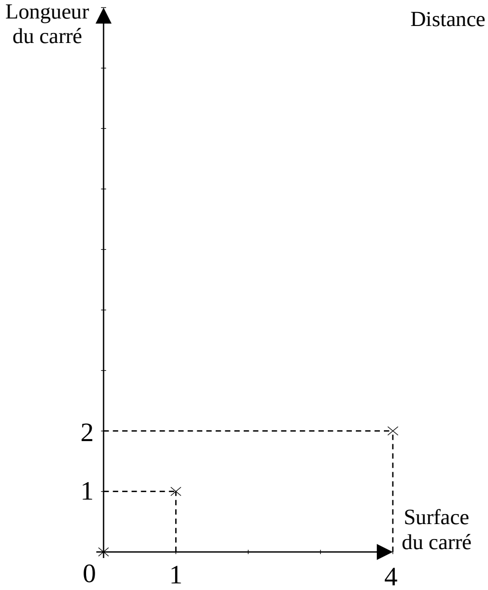
Utilité : Cette propriété sert à reconnaître graphiquement une situation de …………………………………

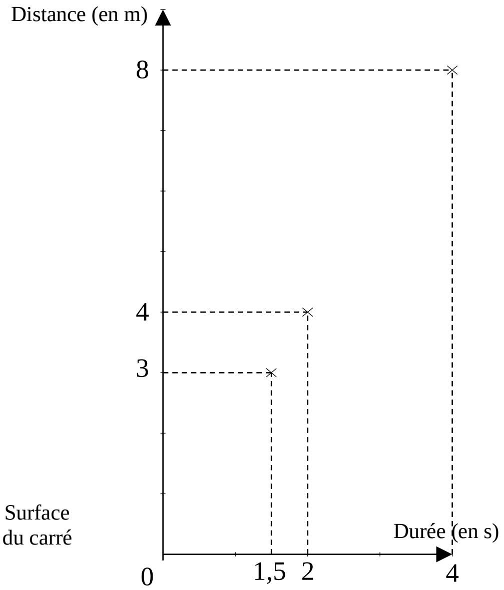
C. Exercices : Graphiques et Proportionnalité.

❶ Les graphiques suivants sont-ils représentatifs de situations de proportionnalité ? **Justifier !**

Si oui dresser le tableau de proportionnalité correspondant.





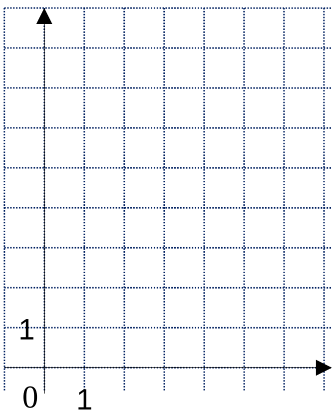


❷ 1) Justifier *par des calculs* si les 2 tableaux ci-dessous sont ou non des tableaux de proportionnalité.

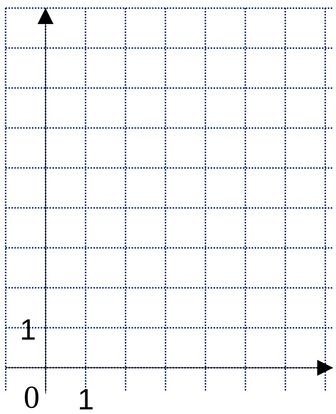
Longueur du carré (en cm)	1	2	3
Aire du carré (en cm²)	1 (= 1²)	…	…

Longueur du carré (en cm)	0,5	1	2
Périmètre du carré (en cm)	2 (= 0,5 × 4)	…	…

2) Construire le graphique correspondant à chaque tableau et vérifier à la règle s'il y a situation de pplté.



- **<u>Ecrire les intitulés</u> précis pour chaque axe.**
- **<u>Donner un titre</u> à chaque graphique (évolution ou répartition)**



X. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LA PROPORTIONNALITE.

➢ Exercice 1 : Pourcentages et Santé Publique. Expliquer les pourcentages suivants :

Attention : « pourcentage », « pourcent » et signe « % » interdits dans l'explication !

1. « 90 % des cancers du poumon sont provoqués par le tabac. » Répartition ou Evolution ?

Sur 100 ………………………………………………………………, il y a ………………………………………......

………………………………………………………………

2. « En France de 1950 à 2000, le nombre de cancers du poumon a augmenté de 600 % chez la femme ! »

Pour 100

3. « Être exposé continuellement à la fumée d'un fumeur (tabagisme passif) augmente le risque de cancer du poumon de 26 %. » Répartition ou Evolution ?

➢ Exercice 2 : Reconnaître une situation de proportionnalité.

Pour chacune des 3 situations ci-après :

1. Préciser dans le tableau chacune des 2 grandeurs intervenant, son unité puis sa valeur.
2. Justifier s'il s'agit d'une situation de proportionnalité en utilisant la définition bis de la pplté p.8.

Situation 1 : « 12 m² de moquette coûtent 150 €. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité ? Justifier.

Situation 2 : « Au dernier contrôle, il y avait 6 exercices à faire en 1 h. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité ? Justifier.

<u>Situation 3 :</u> « Un cercle de diamètre 3 cm a pour périmètre 3π cm. »

Grandeurs	*Unités*	*Valeurs*

S'agit-il d'une situation de proportionnalité ? Justifier.

➢ <u>Exercice n° 3 (……………….……… / 4 points)</u> : Proportionnalité ou pas ? Test 2008.

Une agence de voyage propose des « journées maths » au tarif suivant :

20 € la journée *plus* une inscription unique et obligatoire de 10 €.

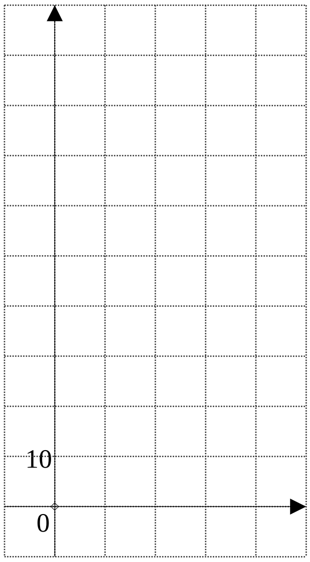
1. Compléter le tableau (on ne demande pas le détail des calculs) : (…………….… / 1 pt)

Nombre de journées commandées	1	2	….
Prix total à payer (en €)	30	…	90

2. Le prix à payer est-il proportionnel au nombre de journées commandées ? Justifier par des calculs (…….……… / 1 pt).

3. A l'aide du tableau, représenter graphiquement la situation. Intitulés des axes + Titre du graphe (………... / 1 pt)

4. Justifier graphiquement le résultat de la question 2. (………….……….. / 1 point).



➢ <u>Situation 4 (……….…………… / 3,5 points)</u> : Contrôle 2007.

Lors d'une enquête auprès de 480 automobilistes à la sortie du redoutable bouchon de 8h30 de Vélizy, 300 ont répondu « ☹☠💣 » et 15 % sont allés vendre leur véhicule.

Les conducteurs restants ont déclaré : « Le bouchon ne dure pas assez longtemps pour vraiment l'apprécier. ». Sniff.

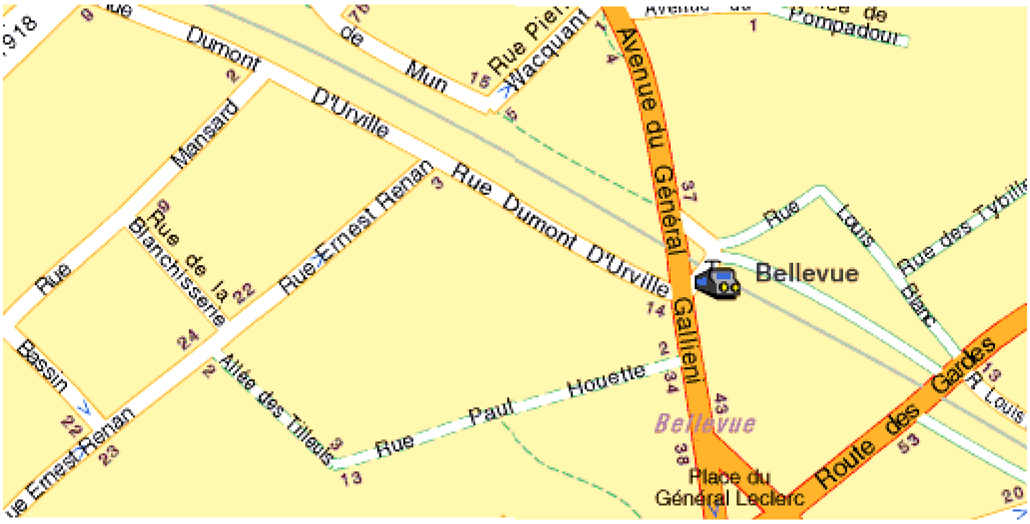
1. Quel est la proportion de ceux qui ont répondu « ☹☠💣 » ? (…………………..….. / 1,5 points) (**Analyse-Synthèse)**

2. Combien de conducteurs trouvent que le bouchon ne dure pas assez longtemps ? (……................... / 2 pts) (**Analyse-Synthèse)**

➢ <u>Situation 5 (……………………… / 4 points)</u> : Echelle et Proportionnalité. Contrôle 2007.

Ce morceau de carte représente le quartier de l'école La Source à Meudon (92).

L'échelle est la suivante : 50 m

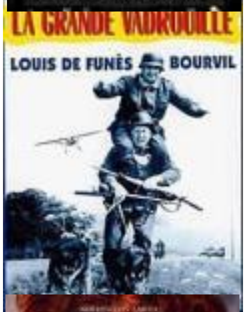


1. Pointer en vert le Collège rue Ernest Renan, en face de la Rue de la Blanchisserie.
2. Le Lycée situé Rue de la Tour est ici hors carte. Il est distant de 384 m à vol d'oiseau du Collège.

A combien de cm du Collège serait dessiné le Lycée (arrondi au dixième) ? (…………….. / 1,5 points)

3. Tracer proprement en vert, le plus court chemin pour aller en marchant du Collège à l'entrée principale de la Gare de Bellevue. (……………..… / 0,5 points)
4. Quel est la longueur réelle (arrondie au mètre) de ce plus court chemin ? (…………..…. / 2 points)

➢ <u>Situation 6 (…..……………….… / 5 points)</u> : Autant en emporte les chiffres. Contrôle 2008.



Tous les « biloutes » de France doivent être contents !

Avec un compteur affichant 17 645 132 billets vendus au soir du jeudi 10 avril 2008, la comédie « Bienvenue chez les Ch'tis » s'impose comme le plus gros succès français de tous les temps en dépassant une « Grande Vadrouille (1966) » qu'on croyait intouchable !

Placés sur la 2ème marche du box-office, les gars du ch'nord ont désormais dans leur ligne de mire le « Titanic (1997) ». Après le tandem Bourvil / De Funès, la vague ch'ti coulera-t-elle le grand paquebot qu'on croyait insubmersible ? Avec les vacances, tout est possible...

1. Selon les derniers chiffres publiés par l'INSEE du 16 janvier 2008, la France comptait en métropole environ 61 875 000 habitants. En supposant que ce nombre n'ait pas beaucoup varié depuis, quel est environ le pourcentage (arrondi au centième) de la population française qui a vu le film « Bienvenue chez les Ch'tis » ? **(Tableau)** (…..……..…….. / 1,5 pts)

2. Le nombre d'entrées pour « La Grande Vadrouille » est environ ***2,2 % moins grand*** que le nombre d'entrées pour « Bienvenue chez les Ch'tis ». Combien de personnes (arrondi à l'unité) sont allés voir au cinéma « La Grande Vadrouille » ? **(Tableau)** (….……..…….. / 2 pts)

3. Parmi les 58 298 962 habitants en métropole que comptait la France à la fin de l'année 1997, environ 35,6 % étaient allés voir le film « Titanic ».

Combien d'entrées (arrondi à l'unité) a réalisé le film « Titanic » ? **(Synthèse)** (……………… / 1,5 pts)

➢ Terminons par une dernière remarque sur la proportionnalité :

Ce concept, très présent dans nos vies quotidiennes sera revu en 4ème et en 3ème : en fait la proportionnalité est la traduction numérique d'un concept algébrique encore plus général : la Linéarité.

Maintenant, ne pas croire que tout varie de manière proportionnelle et que tout tableau est un tableau de proportionnalité, ce qui est en fait très rare !

Par exemple, l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à sa longueur ; la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la durée du freinage ; la qualité est rarement proportionnelle au prix etc. Vous verrez des exemples plus détaillés de non proportionnalité à partir de l'année de 2de.

Ces exemples montrent qu'il ne faut pas confondre les 2 expressions « qui dépend de » avec « proportionnel à ». La proportionnalité est une relation de dépendance bien particulière : une dépendance multiplicative fixe entre 2 grandeurs.

XI. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

➢ **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 5ème, Proportionnalité).**

➢ **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin.**

A. Conseils :

➢ Prouver qu'on a un tableau de proportionnalité :

• Utiliser la méthode par fractions à simplifier, c'est la plus simple !

• Ne pas oublier d'écrire le coefficient de proportionnalité (= colonne complète inversée).

➢ Tableaux :

• Les faire assez grands. Ne dessiner que l'armature intérieure.

• Etre précis dans les intitulés. Ne pas oublier les unités !

• Ne jamais mettre une date ou une année ou un % dans une case numérique de tableau !

• On doit forcément avoir une colonne complète (donnée par un pourcentage, par une proportion ou 2 informations numériques liées).

➢ Coefficient : Attention au sens de la fraction (colonne inversée). Entier ou fraction irréductible !

➢ Calcul des 4èmes pptielles : • Par égalité de fractions et en reprenant la colonne complète du tableau.
• Attention à mettre les fractions dans le bon sens.
• Inconnue **au numérateur de la première fraction à gauche !**

➢ Pourcentage : On place forcément le nombre 100 dans le tableau, pas n'importe où !

Pour la totalité dans une situation de répartition. Au départ dans une situation d'évolution.

B. Erreurs à ne pas faire :

- Prouver qu'on a un tableau de proportionnalité : Oublier des produits en croix quand on choisit cette méthode déconseillée.
- Tableaux : • Mal remplir le tableau : Les nombres ne correspondent pas aux intitulés.
  Ne pas avoir une colonne complète donnée par l'énoncé.
  • Intitulés de tête de ligne imprécis.
  • Oublier les unités dans les intitulés.
- Calcul du Coefficient : Oublier d'*inverser* la colonne complète !
- Calcul des 4èmes proportionnelles : Erreurs dans l'écriture de l'égalité de fractions.
- Pourcentages : • Confusion entre problème de pourcentage et problème d'augmentation ou baisse en pourcentage.
  • Mal placer le nombre 100 dans le tableau.
- Représentation graphique : Oublier le titre (évolution ou répartition) ou les intitulés des axes.

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ……………………………………………………………….

Perle du Bac 2004 : « La climatisation est un chauffage froid avec du gaz, sauf que c'est le contraire. »

Perle du Bac 2010 : « La femelle du corbeau s'appelle la corbeille. »

Perle du Bac 2005 : « Les américains ont lancé deux bombes gastronomiques sur Hiroshima et Nagasaki. »

Perle du Bac 2009 : « Avorter le lendemain d'un accouchement n'est pas recommandé. »