

# PARALLELOGRAMMES

## PARALLELOGRAMMES PARTICULIERS



**I. Catalogue des propriétés.** \_\_\_\_\_ 2

**A. Propriétés directes : Ce qu'il faut savoir des quadrilatères particuliers.** \_\_\_\_\_ 2

**B. Propriétés réciproques : Démontrer qu'un quadrilatère est particulier.** \_\_\_\_\_ 3

**C. Illustrations sur ce qu'il faut savoir des quadrilatères particuliers :** \_\_\_\_\_ 4

**D. Schéma de l'ensemble des quadrilatères :** \_\_\_\_\_ 4

**II. Exploitation du catalogue.** \_\_\_\_\_ 5

**A. Le parallélogramme :** \_\_\_\_\_ 5

**B. Le rectangle :** \_\_\_\_\_ 5

**C. Le losange :** \_\_\_\_\_ 6

**D. Le carré :** \_\_\_\_\_ 7

**III. Construction de parallélogrammes (particuliers).** \_\_\_\_\_ 8

**A. Technique de base : construction d'un parallélogramme à partir d'un triangle.** \_\_\_\_\_ 8

**B. Le principe général de construction des parallélogrammes :** \_\_\_\_\_ 9

**C. Nécessité d'un croquis :** \_\_\_\_\_ 9

**D. Méthode de construction des parallélogrammes :** \_\_\_\_\_ 9

➤ Pré requis pour prendre un bon départ :

Géométrie basique des polygones (sommets, côtés, diagonales etc.)				
Construction de triangles.				
Théorèmes fondamentaux sur les droites.				

# I. CATALOGUE DES PROPRIETES.

## A. Propriétés directes : Ce qu'il faut savoir des quadrilatères particuliers.

### 1. Trapèze :

- **Définition** : Un trapèze est un quadrilatère particulier qui a (au moins) 2 côtés parallèles.

### 2. Parallélogramme :

- **Définition** : Un parallélogramme est un quadrilatère particulier qui a ses côtés opposés parallèles 2 à 2.

➤ **Propriétés directes :**

P1. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles 2 à 2.

P2. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors le point d'intersection de ses 2 diagonales est son centre de symétrie.

P3. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

P4. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont 2 à 2 de même longueur.

P5. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés sont 2 à 2 de même mesure.

### 3. Rectangle :

- **Définition** : Un rectangle est un quadrilatère particulier qui a 4 angles droits.

➤ **Propriétés directes :**

R1. Si un quadrilatère est un rectangle, alors il possède 4 angles droits.

R2. Le rectangle fait partie de la famille des parallélogrammes donc le rectangle possède toutes les propriétés du parallélogramme !

R3. Si un quadrilatère est un rectangle alors ses 2 diagonales sont de même longueur.

R4. Si un quadrilatère est un rectangle alors il a 2 axes de symétrie : les médiatrices des côtés.

### 4. Losange :

- **Définition** : Un losange est un quadrilatère particulier qui a ses 4 côtés de même longueur.

➤ **Propriétés directes :**

L1. Si un quadrilatère est un losange alors ses 4 côtés sont de même longueur

L2. Le losange fait partie de la famille des parallélogrammes donc le losange possède toutes les propriétés du parallélogramme.

L3. Si un quadrilatère est un losange alors ses 2 diagonales sont perpendiculaires.

L4. Si un quadrilatère est un losange alors ses 2 diagonales sont ses axes de symétrie.

### 5. Carré :

- **Définition** : Un carré est un parallélogramme particulier à la fois rectangle et losange.

➤ **Propriétés directes :**

Si un quadrilatère est un carré alors il possède toutes les propriétés du parallélogramme !

toutes les propriétés du rectangle !

toutes les propriétés du losange !

## B. Propriétés réciproques : Démontrer qu'un quadrilatère est particulier.

### 1. Comment montrer qu'un quadrilatère est un trapèze ?

#### ➤ Propriétés réciproques :

T'1. Si un quadrilatère possède 2 côtés parallèles alors c'est un trapèze.

### 2. Comment montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

#### ➤ Propriétés réciproques :

P'1. Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles 2 à 2 alors c'est un parallélogramme.

P'2. Si un quadrilatère a ses côtés opposés 2 à 2 de même longueur alors c'est un parallélogramme.

P'3. Si un quadrilatère non croisé a 2 de ses côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.

P'4. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu (c'est-à-dire un centre de symétrie) alors c'est un parallélogramme.

P'5. Si un quadrilatère possède un centre de symétrie, alors c'est un parallélogramme.

P'6. Si un quadrilatère a ses angles opposés 2 à 2 de même mesure alors c'est un parallélogramme.

### 3. Comment montrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

#### ➤ Propriétés réciproques (en partant directement d'un quadrilatère) :

R'1. Si un quadrilatère a 3 angles droits (au moins) alors c'est un rectangle.

R'2. Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle.

#### ➤ Propriétés réciproques (en partant d'un parallélogramme) :

R'3. Si un parallélogramme a en plus 1 angle droit alors c'est un rectangle.

R'4. Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

### 4. Comment montrer qu'un quadrilatère est un losange ?

#### ➤ Propriétés réciproques (en partant directement d'un quadrilatère) :

L'1. Si un quadrilatère a 4 côtés de même longueur alors c'est un losange.

L'2. Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent perpendiculairement et en leur milieu alors c'est un losange.

#### ➤ Propriétés réciproques (en partant d'un parallélogramme) :

L'3. Si un parallélogramme a en plus 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

L'4. Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

### 5. Comment montrer qu'un quadrilatère est un carré ?

#### ➤ Propriétés réciproques (en partant directement d'un quadrilatère) :

C'1. Si un quadrilatère a 3 angles droits (au moins) et 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.

C'2. Si un quadrilatère a 4 côtés de même longueur et (au moins) 1 angle droit, alors c'est un carré.

C'3. Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu et perpendiculaires alors c'est un carré.

➤ **Propriétés réciproques (en partant d'un parallélogramme) :**

C'4. Si un parallélogramme a en plus 1 angle droit et 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.

C'5. Si un parallélogramme a en plus ses diagonales de même longueur et perpendiculaires alors c'est un carré.

➤ **Propriétés réciproques (en partant d'un rectangle) :**

C'6. Si un rectangle a 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.

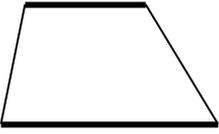
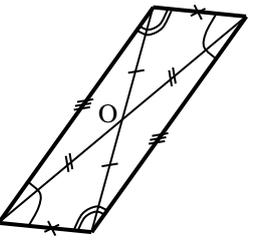
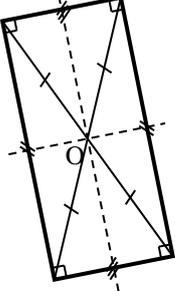
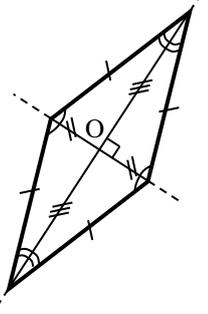
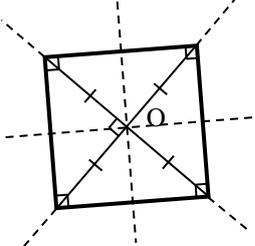
C'7. Si un rectangle a en plus ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.

➤ **Propriétés réciproques (en partant d'un losange) :**

C'8. Si un losange a en plus 1 angle droit alors c'est un carré.

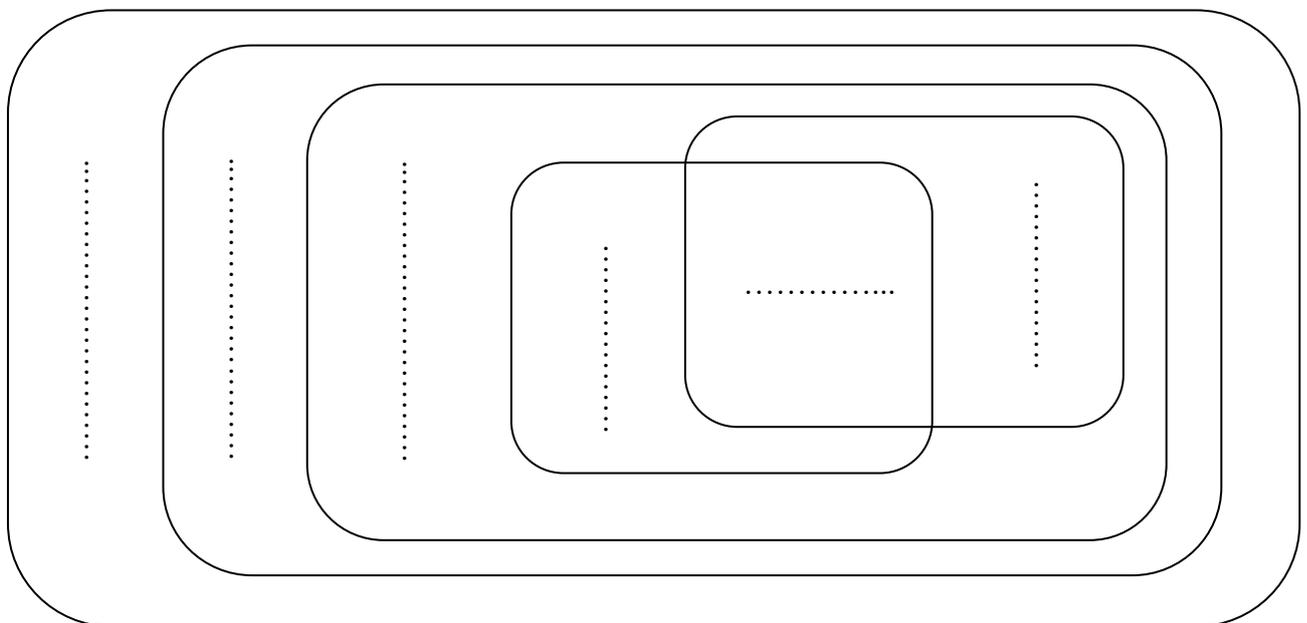
C'9. Si un losange a en plus ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.

**C. Illustrations sur ce qu'il faut savoir des quadrilatères particuliers :**

Trapèze	Parallélogramme	Parallélogrammes particuliers		
		Rectangle	Losange	Carré
				
<p>Les côtés en gras sont parallèles.</p>	<p>Pour les 4 parallélogrammes ci-dessus :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• O est le centre de symétrie.</li> <li>• Les droites en pointillés sont les axes de symétrie.</li> <li>• Les côtés opposés sont parallèles 2 à 2.</li> </ul>			

**D. Schéma de l'ensemble des quadrilatères :**

Compléter le schéma ci-dessous avec les mots Rectangle, Carrés, Quadrilatères, Trapèzes, Losanges.



## II. EXPLOITATION DU CATALOGUE.

En vous aidant du catalogue des propriétés pages 1-2-3, remplir les pages 4-5-6.

### A. Le parallélogramme :

1. Figure et codages :

2. Propriétés directes : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :

- .....
- .....
- .....
- .....
- .....

3. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

■ Si un quadrilatère a ses côtés .....

alors c'est un parallélogramme.

■ Si un quadrilatère a ses diagonales .....

alors c'est un parallélogramme.

■ Si un quadrilatère a ses côtés .....

alors c'est un parallélogramme.

■ Si un quadrilatère a ses angles opposés .....

alors c'est un parallélogramme.

■ Si un quadrilatère non croisé a .....

alors c'est un parallélogramme.

■ Si un quadrilatère possède un .....

alors c'est un parallélogramme.

### B. Le rectangle :

1. Figure et codages :

2. Propriétés directes :

- Le rectangle fait partie de la famille des parallélogrammes donc .....
- Le rectangle possède ..... axes de symétrie qui sont .....
- Les diagonales du rectangle .....
- Le rectangle a .....

3. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un quadrilatère est directement un rectangle ?

■ Si un quadrilatère .....

alors c'est un rectangle.

■ Si un quadrilatère .....

alors c'est un rectangle.

4. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un parallélogramme est un rectangle ?

■ Si un parallélogramme .....

alors c'est un rectangle.

■ Si un parallélogramme .....

alors c'est un rectangle.

**C. Le losange :**

1. Figure et codages :

2. Propriétés directes :

- Le losange fait partie de la famille des parallélogrammes donc .....

- Le losange a .....

- Le losange a .....

- Le losange possède ..... axes de symétrie qui sont .....

3. Propriétés réciproques : Comment démontrer directement qu'un quadrilatère est un losange ?

■ Si un quadrilatère a .....

alors c'est un losange.

■ Si un quadrilatère .....

alors c'est un losange

4. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un parallélogramme est un losange ?

■ Si un parallélogramme a .....

alors c'est un losange.

■ Si un parallélogramme a .....

alors c'est un losange.

## D. Le carré :

### 1. Figure et codages :

### 2. Propriétés directes :

- Le carré est un ..... particulier donc il en a toutes les propriétés.
- Le carré est un ..... particulier donc il en a toutes les propriétés.
- Le carré est un ..... particulier donc il en a toutes les propriétés.

### 3. Propriétés réciproques : Comment démontrer directement qu'un quadrilatère est un carré ?

■ Si un quadrilatère .....

alors c'est un carré.

■ Si un quadrilatère a .....

alors c'est un carré.

■ Si un quadrilatère a ses diagonales .....

alors c'est un carré.

### 4. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un parallélogramme est un carré ?

■ Si un parallélogramme .....

alors c'est un carré.

■ Si un parallélogramme a .....

.....

alors c'est un carré.

### 5. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un rectangle est un carré ?

■ Si un rectangle a .....

alors c'est un carré.

■ Si un rectangle a .....

alors c'est un carré.

### 6. Propriétés réciproques : Comment démontrer qu'un losange est un carré ?

■ Si un losange a .....

alors c'est un carré.

■ Si un losange a .....

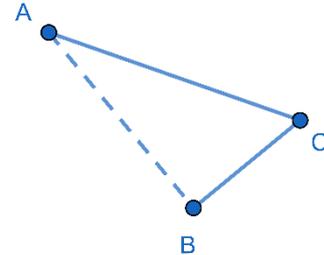
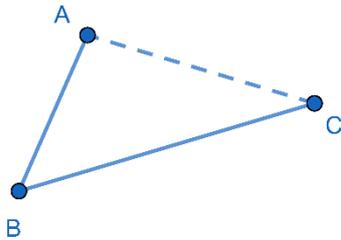
alors c'est un carré.

### III. CONSTRUCTION DE PARALLELOGRAMMES (PARTICULIERS).

#### A. Technique de base : construction d'un parallélogramme à partir d'un triangle déjà construit.

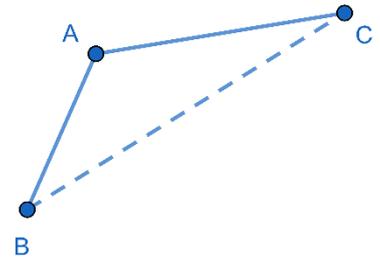
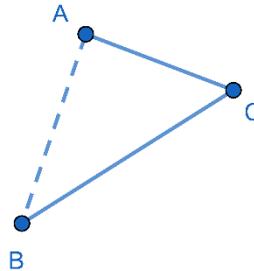
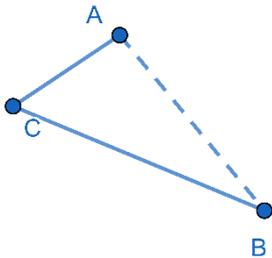
##### 1. En utilisant le parallélisme :

Pour chaque figure, construire le 4<sup>ème</sup> point D **en traçant des parallèles**, afin d'obtenir un parallélogramme avec le segment en pointillés comme l'une des diagonales de ce parallélogramme (**croquis d'abord !**) :



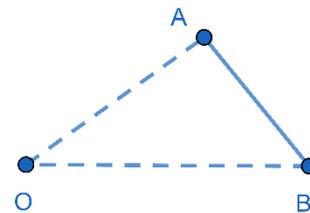
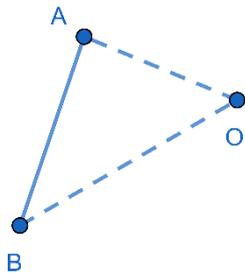
##### 2. En utilisant les égalités de longueurs :

Pour chaque figure, construire le 4<sup>ème</sup> point D **en utilisant le compas**, afin d'obtenir un parallélogramme avec le segment en pointillés comme l'une des diagonales de ce parallélogramme (**croquis d'abord !**) :



##### 3. En prolongeant les demi-diagonales :

Pour chaque figure, construire les points C et D par prolongement des demi-diagonales en pointillés afin d'obtenir un parallélogramme de centre O (**croquis d'abord !**). Puis terminer de tracer le parallélogramme.



## B. Le principe général de construction des parallélogrammes :

### 1. Principe du triangle constructible :

Tout triangle contenant 3 informations indépendantes peut être construit de façon (presque) unique.

### 2. Conséquence :

Un parallélogramme contenant au moins 1 triangle constructible est forcément constructible.

## C. Nécessité d'un croquis :

Comment savoir si la figure demandée contient au moins 1 triangle constructible (c-à-d avec 3 informations indépendantes) ? **En faisant un croquis !**

La réussite d'une construction repose donc à 90 % sur la réussite de ce **croquis, lisible et complet**.

### Ce qu'il ne faut pas faire :

- croquis absent  $\Rightarrow$  figure finale quasiment toujours fausse !
- croquis faux  $\Leftarrow$  informations mal reportées.
- croquis incomplet  $\Leftarrow$  informations non reportées.
- croquis illisible  $\Leftarrow$  trop petit pour rajouter des informations, sans couleur pour distinguer les informations.

## D. Méthode de construction des parallélogrammes :

### 1. Faire un croquis lisible :

- Faire d'abord un **croquis à main levée de la figure finale** (croquis d'un losange si la figure à construire est un losange ; croquis d'un carré si la figure à construire est un carré etc.)  
Assez **grand** pour pouvoir rajouter des informations sans qu'elles se chevauchent !
- **Reporter ensuite le nom des points sur le croquis.**
- **Puis reporter en bleu** les informations (**mesures et codages**) données dans le texte de l'énoncé.

### 2. Compléter ce croquis afin de faire apparaître un triangle constructible :

Après le report en bleu des informations de l'énoncé sur mon croquis, a-t-on un triangle constructible ? Cela dépend de la difficulté du parallélogramme à réaliser :

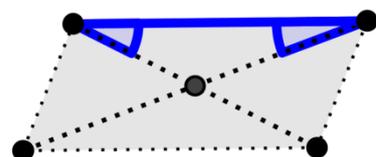
#### 1. Parallélogrammes de difficulté niveau 1 :

Les informations reportées en bleu sur le croquis donnent visiblement un triangle constructible. ☺

Dans ce cas-là, le croquis est directement complet.

Exemple : Voici le croquis d'un parallélogramme de niveau 1.

- a. **Surligner en jaune le triangle constructible.**

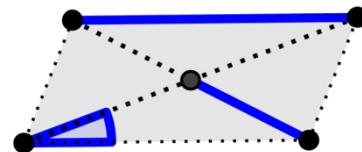


## 2. Parallélogrammes de difficulté niveau 2 :

Hélas, les informations reportées en bleu sur le croquis ne donnent pas directement un triangle constructible. ☹️  
 Dans ce cas-là, grâce aux propriétés du cours, on va rajouter en rouge des informations sur le croquis afin d'obtenir un triangle constructible.

Exemple : Voici le croquis d'un parallélogramme de niveau 2.

- Repasser en rouge une ou plusieurs informations afin d'obtenir un triangle constructible.
- Surligner en jaune ce triangle constructible.



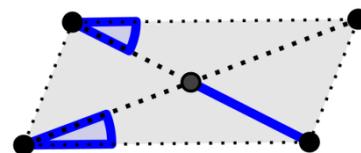
## 3. Parallélogrammes de difficulté niveau 3 :

Hélas, après avoir reportées en bleu les informations données par l'énoncé et rajouter en rouge des informations pour essayer de faire apparaître un triangle avec 3 informations *indépendantes*, celui-ci n'est pas facilement constructible. ☹️ ☹️ ☹️

Dans ce cas, il va falloir faire un ou plusieurs calculs (d'angles par exemple) pour obtenir une ou plusieurs informations supplémentaires rendant le triangle facilement constructible.

Exemple : Voici le croquis d'un parallélogramme de niveau 3.

- Repasser en rouge une ou plusieurs informations afin d'obtenir un triangle constructible.
- Marquer en vert l'angle qu'il faudra calculer pour rendre le triangle précédent facilement constructible.
- Surligner en jaune ce triangle constructible.

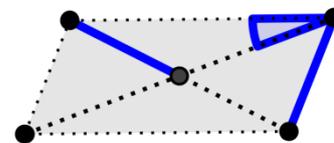


## 4. Parallélogrammes de difficulté niveau 4 :

Hélas, après avoir reportées en bleu les informations données par l'énoncé, il est impossible d'avoir un triangle constructible, même en rajoutant des informations en rouge. ☹️ ☹️ ☹️ ☹️

Dans ce cas-là, il faut faire appel à des théorèmes plus avancés (théorème de l'angle inscrit vu en 3<sup>ème</sup> par exemple) ou à des calculs beaucoup plus sophistiqués (équations).

Exemple : Voici le croquis d'un parallélogramme de niveau 4.



## 3. Construire avec les instruments de géométrie la figure finale :

On construit au propre la figure finale grâce au croquis lisible, complet et coloré :

- en commençant par le triangle constructible !
- puis on construit le parallélogramme à partir de ce triangle constructible (voir [Technique de base p.8](#)).
- puis on marque sur la figure finale :
  - en bleu les informations reportées.
  - en rouge les informations déduites.
  - en vert les informations calculées.
  - en jaune le triangle constructible.