ECRITURES FRACTIONNAIRES ; FRACTIONS

« Hélas le monde préfère trop souvent un mensonge simple à une vérité complexe. »

- Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Tables de multiplication parfaitement sues dans les 2 sens !			
Quotient ; Ecritures fractionnaires.			
Fractions : définition, simplification.			

« Correction en rouge et italique. »

Nom et Prénom : ………………………………………….. $5^{ème}$ …….

I. RAPPELS DE SIXIEME :

A. Quotient, écritures fractionnaires :

Définition : On appelle « **quotient** » le résultat d'une *division* par un nombre **non nul** *(≠ 0).*

Remarque : Le diviseur doit être différent de 0 car partager en 0 partie (en aucune partie) n'a aucun sens !

➢ Exemples : ❶ Un quotient peut être un nombre entier :

33 ÷ 3 = *11* 144 ÷ 12 = *12* *99* ÷ 9 = 11 2,5 ÷ *2,5* = 1

8 ÷ *1* = 8 ou *32 ÷ 4* = 8 *ou etc.* *32* ÷ 4 = 8 64 ÷ *8* = 8

❷ Un quotient peut être un nombre décimal :

10 ÷ 4 = *2,5* 2,7 ÷ 10 = *0,27* 25,8 ÷ *100* = 0,258

2,5 ÷ *1* = 2,5 ou *5 ÷ 2* = 2,5 *ou etc.* *10* ÷ 4 = 2,5 100 ÷ *40* = 2,5

❸ Hélas certains quotients ne sont pas des nombres décimaux !

- Je pense par exemple à 2 ÷ 7 ou à π ÷ 1,1 : quand on pose ces divisions, elles ne se « terminent » jamais. ☹ $\frac{2}{7} = 0{,}28571\ldots$ $\frac{\pi}{1{,}1} = 2{,}8559\ldots$

- Autre « problème » : ces écritures en ligne sont **source d'erreurs de priorité** par les élèves !

Par exemple : Dans l'écriture 2 – 1 ÷ 3, on peut faire l'erreur de priorité de faire le calcul 2 – 1 !

Dans l'écriture $2 - \frac{1}{3}$, impossible de faire cette erreur de calcul !

D'où l'introduction d'un écriture plus simple du quotient : ***l'écriture fractionnaire*** !

B. Ecritures fractionnaires ; vocabulaire :

❶ **L'écriture fractionnaire** du quotient n ÷ d est de la forme $\frac{n}{d}$:

Dividende

$\boxed{n \div d = \frac{n}{d}}$

Numérateur

Diviseur ≠ *0 !*

Dénominateur ≠ 0 !

❷ Le nombre « d » en dessous la barre de fraction, (d ≠ …...), s'appelle le *dénominateur.*

Ce nombre « dénomine » l'écriture fractionnaire : il donne le nom de famille de l'écriture fractionnaire.

Ex : $\frac{2}{5}$ fait partie de la famille des « cinquièmes ». $\frac{7}{8}$ fait partie de la famille des « *huitièmes* »

❸ Le nombre « n » au dessus de la barre de fraction s'appelle le *numérateur.*

Ce nombre « numérote » l'écriture fractionnaire dans sa famille.

Ex : $\frac{2}{5}$ est dans la famille des « cinquièmes », le numérateur 2 indique qu'on en prend 2.

Dorénavant, **on utilisera TOUJOURS l'écriture fractionnaire** !

➢ Exercice 1 : Ecrivez sous forme fractionnaire ***sans rien calculer*** :

Ex : $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ ❶ **On écrit d'abord la barre de fraction en premier !**

❷ **Cette barre de fraction doit être mise EXACTEMENT AU MILIEU DU SIGNE =.**

neuf quarts = $\frac{9}{4}$ deux demis = $\frac{2}{2}$ un tiers = $\frac{1}{3}$ la moitié de k = $\frac{k}{2}$ une demi pomme = $\frac{pomme}{2}$

$\pi \div 2{,}3 = \frac{\pi}{2{,}3}$ $(r-1) \div (t-1) = \frac{r-1}{t-1}$ vitesse moyenne = distance ÷ durée = $\frac{distance}{durée}$

➢ Exercice 2 : Ecrire sous forme fractionnaires ***sans rien calculer*** : attention aux priorités !

$3 - 5 \div 7 = 3 - \frac{5}{7}$ $5{,}54 - 8{,}78 \div 2 - 6 = 5{,}54 - \frac{8{,}78}{2} - 6$

$a - b \div c = a - \frac{b}{c}$ $(a - 2 \times b) \div c - 1 = \frac{a-2b}{c} - 1$ $\pi \div (\pi \times 5 + 2) = \frac{\pi}{5\pi + 2}$

Quatre cas particuliers importants à retenir : Quelles que soient les valeurs de n et de d ($d \neq 0$), on a :

❶ $\frac{0}{d} = 0$ 0 divisé par n'importe quel nombre (sauf 0) donne tjs *0.* ex : $\frac{0}{2{,}257} = 0$

❷ $\frac{n}{1} = n$ Tout nombre divisé par 1 donne *lui même.* ex : $\frac{-8{,}8}{1} = -8{,}8$

❸ $\frac{d}{d} = 1$ Tt nb non nul divisé par *lui même* donne *1.* ex : $\frac{\pi}{\pi} = 1$

❹ Un pourcentage est une écriture fractionnaire dont le *dénominateur* est *100* c-à-d $k\ \% = \frac{k}{100}$

$7\% = \frac{7}{100}$ $\frac{0{,}10}{100} = 0{,}1\ \%$ $\frac{100}{100} = 100\ \%$ $\frac{0{,}05}{100} = 0{,}05\ \%$ $\frac{2500}{100} = 2500\ \%$

C. Fractions :

1. Définition des fractions :

Définition : Dans une écriture fractionnaire $\frac{n}{d}$, **lorsque le numérateur n et le dénominateur d** ($d \neq 0$) **sont des NOMBRES ENTIERS**, alors $\frac{n}{d}$ s'appelle *une fraction*.

Contre exemples : Donner deux écritures fractionnaires qui ne soient pas des fractions : $\frac{8{,}3}{5}$ ou $\frac{2}{\pi}$.

➢ A retenir : **❶ Tout nombre entier peut s'écrire sous forme de fraction :**

$18\,695 = \frac{18\,695}{1}$ $5 = \frac{5}{1} = \frac{25}{5} = etc.$ $11 = \frac{55}{5} = \frac{33}{3} = etc.$ $4 = \frac{4}{1} = \frac{20}{5} = \frac{40}{10}$

❷ Tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de fraction :

$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = \ldots$ $0{,}7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ $5{,}78 = \frac{578}{100} = \frac{578\,000}{100\,000}$ $0{,}041 = \frac{41}{1000}$

Dorénavant, on remplacera TOUJOURS les nombres décimaux par des fractions dans les calculs !

2. Comparaisons de deux fractions :

➢ <u>Méthode ❶</u> : Par calcul direct des quotients quand ils sont simples à trouver (*ce qui est très rare !*).

Comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{7}{10}$ $\frac{3}{4} = 0{,}75$ et $\frac{7}{10} = 0{,}7$ donc $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

¨Hélas, cette méthode ne marche pas pour $\frac{5}{1524}$ et $\frac{7{,}54}{1524}$ ou pour $\frac{1}{33}$ et $\frac{5}{66}$.

➢ <u>Méthode ❷ plus générale :</u>

On peut comparer facilement 2 fractions lorsqu'elles appartiennent *à la même famille* !

> Pour comparer 2 fractions (ou 2 écritures fractionnaires), il suffit qu'elles aient **le même** *dénominateur*.
>
> La plus *grande* fraction sera celle qui aura le plus *grand* numérateur.

Complétez par > ou < : $\frac{5}{4} > \frac{4}{4}$ $\frac{1587}{35} < \frac{1587{,}1}{35}$ $\frac{1}{33} = \frac{1 \times 2}{33 \times 2} = \frac{2}{66} < \frac{5}{66}$

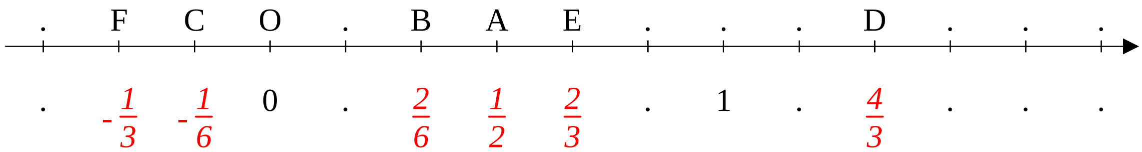
Cette méthode est celle qui est la plus largement utilisée, parce que **c'est la plus simple**.

3. Fractions et abscisses de points :

> <u>Définition :</u>
>
> L'**abscisse d'un point sur une droite** est le nombre qui donne la position de ce point sur cette droite.

➢ Exercice ① : Ecrire les abscisses des points A, B, C et D. Placer les points E ($x_E = \frac{2}{3}$) et F ($x_F = -\frac{1}{3}$).

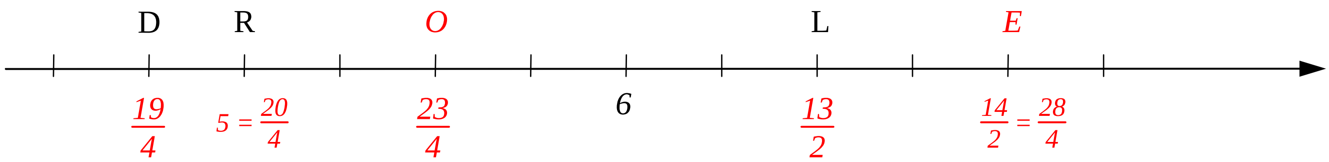
> <u>Méthode pour placer un point ou bien trouver son abscisse fractionnaire</u> :
>
> ❶ On compte le nombre de parties dans un segment unité de longueur 1 pour avoir le dénominateur.
>
> *<u>Exemple :</u> Sur la figure plus bas, les segment unité (de longueur 1) sont tous partagés en 6 parties donc l'abscisse d'un point sera représentée par une fraction sur 6.*
>
> ❷ Le numérateur sera le nombre de graduations à partir du point Origine.
>
> ❸ Puis on simplifie la fraction si nécessaire.
>
> *<u>Exemple :</u> Sur la figure ci dessous, le point A est à 3 graduations du point origine O donc* $x_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



$x_E = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ *donc E est à 4 graduations à droite de O.* $x_F = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$ *donc F est 2 graduations à gauche de O.*

➢ Exercice ② : Ecrivez les abscisses (sous la forme la plus simple possible !) de D et L.

Puis placer les points O($\frac{23}{4}$) et E($\frac{14}{2}$).



Les segments unité (de longueur 1)sont partagés en 4 parties donc les abscisses seront des fractions sur 4.

Le point R a pour abscisse $5 = \frac{20}{4}$

Le point D est à une partie à gauche de R donc $x_D = \frac{19}{4}$.

Le point L est à 6 parties à droite de R donc $x_L = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$

Le point O est facile à placer : à 3 parties à droite de R.

L'abscisse de E n'est pas sur 4 ! Donc $x_E = \frac{14}{2} = \frac{28}{4}$ *. E est à 8 parties à droite de R.*

II. QUOTIENTS EGAUX ; SIMPLIFICATION (6EME).

On remarque facilement que $10 \div 5$ et $20 \div 10$ donnent le même quotient. Donc $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{10 \times 2}{5 \times 2}$. Généralisons :

A. règle des quotients égaux:

Soient $k \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\frac{n}{d}$, $\frac{n \times k}{d \times k}$ et $\frac{n \div k}{d \div k}$ sont 3 écritures fractionnaires du même quotient c-à-d :

$$\mathbf{\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k} = \frac{n \div k}{d \div k} \quad (k \neq 0 \text{ et } d \neq 0)}$$

Autrement dit : on ne change pas une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie ou divise le numérateur n et le dénominateur d par le même nombre non nul.

B. Utilité : simplification des fractions et écritures fractionnaires.

- L'égalité $\frac{n \times \mathbf{k}}{d \times \mathbf{k}} = \frac{n}{d}$ va permettre de simplifier les fractions en « réduisant » le numérateur et le dénominateur de départ, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs entre eux (autre que 1).

- Exemple : $\frac{78}{48} = \frac{39 \times \mathbf{2}}{24 \times \mathbf{2}} = \frac{39}{24} = \frac{3 \times 13}{3 \times 8} = \frac{13}{8}$

Dans $\frac{13}{8}$, il n'y a plus de facteurs *communs* (autres que 1) entre le numérateur et le dénominateur.

C. Fractions irréductibles :

Un quotient a donc plusieurs écritures fractionnaires. Une est meilleure que toutes les autres :

Définition : **La meilleure écriture fractionnaire d'un quotient**, c-à-d la plus simple, s'appelle la ***fraction irréductible***[1]. Cette écriture vérifie les 2 conditions suivantes : **le numérateur et le dénominateur sont :**

❶ **entiers** ❷ et **sans facteurs communs entre eux**[2]**(autre que 1).**

- Méthode : A partir d'une écriture fractionnaire, on obtient donc une fraction irréductible :

❶ en faisant « disparaître les virgules » si il y en a, ❷ puis en simplifiant « au maximum ».

- Exercice : Ces écritures fractionnaires sont-elles irréductibles (justifier) ? Si non, les simplifier.

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\frac{4}{9}$ *irréductible* $\frac{0{,}4}{0{,}9} = \frac{4}{9}$ *FI* $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ $\frac{13}{17}$ *irréductible*

D. Deux conseils importants :

Je ne me fais pas beaucoup d'illusions mais je vous les donne quand même :

❶ **Avant de commencer les calculs, toujours simplifier** si possible les écritures fractionnaires.

❷ Pour cela, bien connaître **ses tables de** *multiplication* !

---

[1] Irréductible : qu'on ne peut plus réduire. « Dans un coin reculé de la Gaule se dressait un petit village d'irréductibles gaulois. »

[2] Le numérateur et le dénominateur *ne sont pas* dans une même table de multiplication commune. Ex : 2 et 7 ou bien 26 et 19.

E. Exercices sur la simplification :

Remarque : On simplifie toujours par paire de facteurs identiques.

① Simplifier sous forme d'une Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

• Ex : $\frac{45}{27} = \frac{\mathbf{9} \times 5}{\mathbf{9} \times 3} = \frac{5}{3}$ F.I

$\frac{42}{48} = \frac{\mathbf{6} \times 7}{\mathbf{6} \times 8} = \frac{7}{8}$ F.I

$\frac{26}{39} = \frac{2 \times \mathbf{13}}{3 \times \mathbf{13}} = \frac{2}{3}$ F.I

$\frac{56}{16} = \frac{\mathbf{8} \times 7}{\mathbf{8} \times 2} = \frac{7}{2}$ F.I

$\frac{8}{64} = \frac{1 \times \mathbf{8}}{8 \times \mathbf{8}} = \frac{1}{8}$ F.I

$\frac{21}{49} = \frac{\mathbf{7} \times 3}{\mathbf{7} \times 7} = \frac{3}{7}$ F.I

• Ex : $\frac{0{,}24}{0{,}8} = \frac{0{,}24 \times \mathbf{100}}{0{,}8 \times \mathbf{100}} = \frac{24}{80} = \frac{3 \times \mathbf{8}}{10 \times \mathbf{8}} = \frac{3}{10}$ F.I.

$\frac{1{,}5}{4{,}5} = \frac{1{,}5 \times \mathbf{10}}{4{,}5 \times \mathbf{10}} = \frac{15}{45} = \frac{1 \times \mathbf{15}}{3 \times \mathbf{15}} = \frac{1}{3}$ F.I.

$\frac{0{,}8}{2} = \frac{0{,}8 \times \mathbf{10}}{2 \times \mathbf{10}} = \frac{8}{20} = \frac{2 \times \mathbf{4}}{5 \times \mathbf{4}} = \frac{2}{5}$ F.I.

$\frac{9}{0{,}01} = \frac{9 \times \mathbf{100}}{0{,}01 \times \mathbf{100}} = \frac{900}{1} = 900$!

② A quelles Fractions Irréductibles (F.I.) sont égales les pourcentages suivants :

Ex : $50\ \% = \frac{50}{100} = \frac{\mathbf{50} \times 1}{\mathbf{50} \times 2} = \frac{1}{2}$ F.I.

50% représente la moitié.

$25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1 \times \mathbf{25}}{4 \times \mathbf{25}} = \frac{1}{4}$ F.I.

25% représente le quart.

$20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1 \times \mathbf{20}}{5 \times \mathbf{20}} = \frac{1}{5}$ F.I.

20% représente le cinquième.

$10\ \% = \frac{10}{100} = \frac{1 \times \mathbf{10}}{10 \times \mathbf{10}} = \frac{1}{10}$ F.I.

10 % représente le dixième.

③ Simplifier en colonnes sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

Ex : $\frac{6a}{9a} = \frac{2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{a}}{3 \times \mathbf{3} \times \mathbf{a}} = \frac{2}{3}$ F.I.

$\frac{2z}{4z} = \frac{2 \times \mathbf{z}}{4 \times \mathbf{z}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ F.I.

$\frac{18n}{24d} = \frac{\mathbf{6} \times 3n}{\mathbf{6} \times 4d} = \frac{3n}{4d}$ F.I.

$\frac{56x}{35x} = \frac{8 \times \mathbf{7} \times \mathbf{x}}{5 \times \mathbf{7} \times \mathbf{x}} = \frac{8}{5}$ F.I.

F. Critères de divisibilité ; application à la simplification :

Est-il facile de simplifier $\frac{126}{342}$? *Dur pour l'instant !*

Effectivement non. Toute la difficulté est de décomposer 126 et 342 en faisant apparaître des facteurs communs. Comment trouver ces facteurs communs ? C'est là qu'interviennent les critères de divisibilité :

❶ Un entier relatif est **divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est *pair* !**

❷ Un entier relatif est **divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.**

❸ Un entier relatif est **divisible par 5 lorsque son dernier chiffre est *0 ou 5.***

❹ Un entier est **divisible par 10 ou 100 ou 1000 etc. lorsqu'il se termine *par 0 ou 00 ou 000 etc.***

➢ Application : Compléter chaque case du tableau par vrai ou faux :

Nombres	div. par 2	div. par 3	div. par 5	div. par 6	div. par 10	div. par 15	div. par 30
-36	*oui*	*oui*		*oui*			
75		*oui*	*oui*			*oui*	
120	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*
-90	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*
132	*oui*	*oui*		*oui*			

➢ Ces 4 critères de divisibilité seront amplement suffisants pour trouver des facteurs communs quand on voudra simplifier des fractions du style 126/342.

Méthode : $\frac{126}{342} = \frac{63\times 2}{171\times 2} = \frac{63}{171} = \frac{21\times 3}{57\times 3} = \frac{21}{57} = \frac{3\times 7}{3\times 19} = \frac{7}{19}$ ⟶ Fraction Irréductible (F.I.)

126 et 342 sont pairs donc divisibles par 2.

La somme des chiffres de 63 et celle de 171 sont divisibles par 3.

La somme des chiffres de 21 et celle de 57 sont divisibles par 3.

Il n'y a plus de facteurs communs autres que 1.

➢ Remarques :

Puisque 126 et 342 sont divisibles par 2 puis 3 et encore par 3, j'aurai pu aller plus vite en remarquant qu'ils étaient donc divisibles par 6 (= 2 × 3) ou par 9 (= 3 × 3). Au moins, la façon de faire était systématique !

On essaye toujours de débuter la simplification par le plus grand nombre possible.

➢ Exercice : Simplifier sous forme de fraction irréductible ou d'un entier :

96 et 84 sont divisibles par 2 et par 3 donc par 6.

$\frac{96}{84} = \frac{\mathbf{6}\times 16}{14\times \mathbf{6}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$ *F.I.*

125 et 75 sont div. par 5 et encore par 5 donc par 25.

$\frac{125}{75} = \frac{\mathbf{25}\times 5}{\mathbf{25}\times 3} = \frac{5}{3}$ *F.I.*

330 et 285 sont divisibles par 3 et 5 donc par 15.

$\frac{330}{285} = \frac{\mathbf{3}\times 110}{\mathbf{3}\times 95} = \frac{110}{95} = \frac{\mathbf{5}\times 22}{\mathbf{5}\times 19} = \frac{22}{19}$ *F.I.*

460 et 380 se terminent par 0 donc sont div. par 10.

$\frac{460}{380} = \frac{46\times \mathbf{10}}{38\times \mathbf{10}} = \frac{46}{38} = \frac{\mathbf{2}\times 23}{\mathbf{2}\times 19} = \frac{23}{19}$ *F.I.*

Ensuite, vérifiez vos calculs avec votre calculatrice en utilisant les touches / (Texas) ou d/c (Casio) qui permettent de simplifier automatiquement les fractions.

III. ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS D'ECRITURES FRAC.

Hier, j'avais très faim et cette belle tarte me tentait diaboliquement !

J'en ai mangé un quart. Mais le soir, avant de me coucher, repensant à ce moment de délice, je n'ai pu résisté et j'en ai remangé un tiers.

Pour savoir quelle fraction il me reste de la tourte, j'ai besoin de savoir additionner des fractions. Je me faisais deux réflexions :

① On a toujours besoin des maths dans la vie. ② Il faut savoir résister à la tentation !

A. Sévère mise en garde !

Calculer la somme ou la différence de fractions (ou d'écritures fractionnaires) est **source de nombreuses erreurs** de la part des élèves à cause de la condition nécessaire suivante :

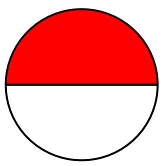
> Pour additionner (soustraire) des écritures fractionnaires, il faut qu'elles appartiennent **à la même famille !**
> Autrement dit, il faut que les dénominateurs soient *égaux* !

Voici *deux contre exemples* qui, j'espère, vous vaccineront pour le restant de votre vie !

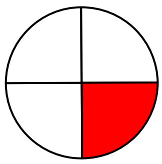
❶ On veut effectuer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. On a tout naturellement envie d'écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{2+4} = \frac{2}{6}$ mais est ce juste ?

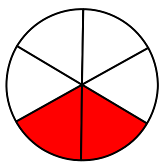
➢ Représentons d'une part $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ et $\frac{2}{6}$ d'autre part.

Coloriez dans chaque gâteau les fractions correspondantes.



+





$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{6}$

La somme des aires coloriées à gauche est elle égale à l'aire coloriée à droite ? Bien sûr que *non* !

Pas convaincu ? Voici un autre argument plus calculatoire : on a $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Donc forcément $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{6}$!

Finalement $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ est différent de $\frac{1+1}{2+4}$!

Passons au 2ème contre exemple :

❷ On veut effectuer $\frac{2}{7} - \frac{2}{5}$. On a tout naturellement envie d'écrire $\frac{2}{7} - \frac{2}{5} = \frac{2-2}{7-5}$ mais est ce juste ?

Bien sûr que *non* ! Pour s'en convaincre, supposons que cette règle farfelue soit vraie et continuons les calculs : $\frac{2}{7} - \frac{2}{5} = \frac{2-2}{7-5} = \frac{0}{2} = 0$! Cela voudrait donc dire que $\frac{2}{7} - \frac{2}{5} = 0$! C-à-d que $\frac{2}{7} = \frac{2}{5}$!

Or cela est impossible ! $\frac{2}{7}$ est plus *petit* que $\frac{2}{5}$.

Finalement $\frac{2}{7} - \frac{2}{5}$ est différent de $\frac{2-2}{7-5}$!

Mais comment fait on alors pour additionner ou soustraire des écritures fractionnaires ?!

B. Les dénominateurs sont égaux :

Quand les dénominateurs sont égaux, les écritures sont *de la même famille* donc la règle est simple :

Deux règles : $\frac{n}{d} + \frac{m}{d} = \frac{n+m}{d}$ (avec $d \neq 0$) $\frac{n}{d} - \frac{m}{d} = \frac{n-m}{d}$ (avec $d \neq 0$)

Ex : $\frac{5}{9} + \frac{13}{9} = \frac{18}{9} = 2$! (On n'oublie jamais de simplifier la fraction finale quand on peut !)

$\frac{1}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ F.I.

- Exercices :

① Calculer en colonnes *sans oublier de simplifier le résultat final* quand c'est possible :

$\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$

$= \frac{16}{6}$

$= \frac{8}{3}$ *F.I.*

$\frac{16}{15} - \frac{11}{15}$

$= \frac{5}{15}$

$= \frac{1}{3}$ *F.I.*

$\frac{1{,}2\,\pi}{3} - \frac{0{,}2\,\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3}$ *F.I.*

ex : $\frac{2a}{7} + \frac{5a}{7}$

$= \frac{7a}{7}$

$= a$!

$\frac{2k}{9} + \frac{4k}{9}$

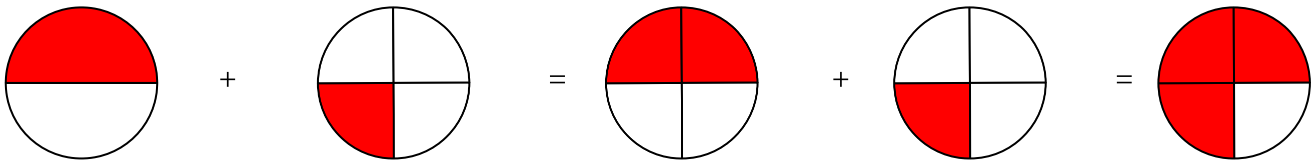
$= \frac{6k}{9}$

$= \frac{3 \times 2k}{3 \times 3}$

$= \frac{2k}{3}$ *F.I.*

C. Les dénominateurs sont différents :

Reprenons $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ Coloriez dans chaque gâteau les fractions correspondantes.



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Attention ! Avant d'additionner ou de soustraire des écritures fractionnaires qui ne sont pas « de la même famille » (*à dénominateurs différents*), il faut **absolument les mettre au même dénominateur** !

*Toute la difficulté va être de **trouver un dénominateur commun**.*

1. Comment trouver un dénominateur commun à plusieurs fractions ?

- Exemple : : $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ sont-elles de la même famille ? *Non car dénominateur 6 ≠ dénominateur 8.*

On doit donc trouver un dénominateur commun à ces deux fractions (avant de pouvoir les additionner).

Cela revient à **chercher un nombre entier qui est à la fois dans les tables** de 6 et de 8, dit autrement, un multiple commun à 6 et à 8.

Le plus petit multiple commun à 2 et 8 est évidemment *24* !

Explication : *24* (= 6 × 4) est dans la table de 6. Et *24* (= 8 × 3) est aussi dans la table de 8 !

➢ Exercice : Trouver « le Plus Petit Multiple Commun (noté ppmc) » des couples d'entiers suivants :

Trois remarques : **Ce plus petit multiple commun est supérieur ou égal au plus grand des 2 nombres.**

Ce plus petit multiple commun est inférieur ou égal au produit des 2 nombres.

Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».

	5 et 10	4 et 6	5 et 6	6 et 9	8 et 9	10 et 15	3 et 33
Plus petit multiple commun (ppmc)	*10*	*12*	*30*	*18*	*72*	*30*	*33*

Maintenant qu'on sait trouver un multiple commun (le plus petit si possible), on va pouvoir additionner des fractions n'appartenant pas à la même famille.

2. Comment additionner 2 écritures frac. à dénominateurs différents ?

Exemple (en colonne)	**Méthode (en colonne) :** **Additionner (soustraire) 2 écritures fract. à dénominateurs différents.**	A vous maintenant ! (en colonne)
$\frac{1}{6} + \frac{2}{9}$	Ces 2 fractions n'ont pas le même *dénominateur*. **On ne peut pas les additionner telles quelles !**	$\frac{3}{14} + \frac{9}{7}$
$= \frac{1\times 3}{6\times 3} + \frac{2\times 2}{9\times 2}$	• 18 est le dénominateur commun d'après l'exercice plus haut. **On met donc chaque fraction au même dénominateur 18.** • **Cette étape peut être sous entendue et faite de tête sans problème.**	$= \frac{3}{14} + \frac{9\times 2}{7\times 2}$
$= \frac{3}{18} + \frac{4}{18}$	Maintenant que les fractions sont sur le même dénominateur (même famille), on peut les additionner.	$= \frac{3}{14} + \frac{18}{14}$
$= \frac{7}{18}$ F.I.	**On n'oublie pas de vérifier si cette fraction ne peut pas être simplifiée.**	$= \frac{21}{14}$
	Le résultat final est sous forme de fraction irréductible ou d'entier !	$= \frac{3}{2}$ F.I.

➢ **En utilisant rigoureusement la méthode,** calculer les sommes et différences suivantes :

$$\frac{1}{5} + \frac{7}{6} = \frac{1\times 6}{5\times 6} + \frac{7\times 5}{6\times 5} = \frac{6}{30} + \frac{35}{30} = \frac{41}{30} \text{ F.I.}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1\times 3}{4\times 3} - \frac{1\times 2}{6\times 2} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12} \text{ F.I}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{33} = \frac{22}{33} + \frac{2}{33} = \frac{24}{33} = \frac{8\times 3}{11\times 3} = \frac{8}{11} \text{ F.I.}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1\times 9}{8\times 9} - \frac{1\times 8}{9\times 8} = \frac{9}{72} - \frac{8}{72} = \frac{1}{72} \text{ F.I.}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1\times 3}{10\times 3} + \frac{1\times 2}{15\times 2} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \text{ F.I.}$$

➢ Quatre remarques :

Je me répète, la seule petite difficulté est de trouver un dénominateur commun avant d'additionner !

L'exercice précédent nous permet d'énoncer quelques généralités sur ce dénominateur commun :

❶ Le dénominateur commun doit être si possible le plus petit des multiples communs (ppmc), sinon on obtient des fractions à grands nombres qui sont difficiles à simplifier !

❷ Le dénominateur commun est, **au minimum, le plus grand des dénominateurs** des fractions de départ.

❸ Le dénominateur commun est, **au maximum le produit des dénominateurs** des fractions de départ.

❹ **Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».**

3. Exercice : calculs de sommes et de différences de fractions.

<u>Après avoir simplifié,</u> calculer en colonnes et donner le résultat sous la forme d'une Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

$$M = \frac{20}{25} - \frac{9}{30}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{8}{10} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{5}{10}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{F.I.}$$

<u>Ex</u> : $2 + \frac{12}{28}$

On simplifie d'abord !

$$= 2 + \frac{3}{7}$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{3}{7}$$

$$= \frac{14}{7} + \frac{3}{7}$$

$$= \frac{17}{7} \quad \text{F.I !}$$

$$L = \frac{21k}{63} + \frac{21k}{18}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{k}{3} + \frac{7k}{6}$$

$$= \frac{2k}{6} + \frac{7k}{6}$$

$$= \frac{9k}{6}$$

$$= \frac{3k}{2} \quad \text{F.I.}$$

$$A = \frac{5}{3} + \frac{56}{35}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{5}{3} + \frac{8}{5}$$

$$= \frac{25}{15} + \frac{24}{15}$$

$$= \frac{49}{15} \quad \text{F.I}$$

$$F = 5 - \frac{9}{12}$$

On simplifie d'abord !

$$= 5 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5}{1} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{20}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{17}{4} \quad \text{F.I.}$$

$$I = \frac{a}{5} - \frac{a}{6}$$

$$= \frac{6a}{30} - \frac{5a}{30}$$

$$= \frac{a}{30} \quad \text{F.I.}$$

$$H = \frac{50}{40} - \frac{49}{42}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$$

$$= \frac{5 \times 3}{4 \times 3} - \frac{7 \times 2}{6 \times 2}$$

$$= \frac{15}{12} - \frac{14}{12}$$

$$= \frac{1}{12} \quad \text{F.I.}$$

$$O = \frac{33}{18} + \frac{24}{64}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{11}{6} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{11 \times 4}{6 \times 4} + \frac{3 \times 3}{8 \times 3}$$

$$= \frac{44}{24} + \frac{9}{24}$$

$$= \frac{53}{24} \quad \text{F.I.}$$

$$F = \frac{27b}{24} - \frac{70b}{100}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{9b}{8} - \frac{7b}{10}$$

$$= \frac{9b \times 5}{8 \times 5} - \frac{7b \times 4}{10 \times 4}$$

$$= \frac{45b}{40} - \frac{28b}{40}$$

$$= \frac{17b}{40} \quad \text{F.I.}$$

$$E = \frac{18}{15} - \frac{3}{10}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{6}{5} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{12}{10} - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{9}{10} \quad \text{F.I.}$$

$$R = \frac{27}{72} + 3$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{3}{8} + 3$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{1}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{24}{8}$$

$$= \frac{27}{8} \quad \text{F.I.}$$

$$E = \frac{26}{39} - 2$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{2 \times \mathbf{13}}{3 \times \mathbf{13}} - 2$$

$$= \frac{2}{3} - 2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{6}{3}$$

$$= \frac{-4}{3} \quad \text{F.I.}$$

$$\frac{9}{15} + \frac{35}{100} - \frac{6}{10}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{3}{5} + \frac{7}{20} - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{7}{20}\ !$$

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{6} + \frac{25}{15}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{4}{7} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3}$$

le dénominateur commun n'est pas visible au 1^er^ coup d'œil donc on calcule les fractions 2 par 2.

$$= \frac{8}{14} - \frac{7}{14} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{1 \times 3}{14 \times 3} + \frac{5 \times 14}{3 \times 14}$$

$$= \frac{3}{42} + \frac{70}{42}$$

$$= \frac{73}{42} \quad \text{F.I.}$$

$$\frac{2\pi}{11} - \frac{7\pi}{33} + \frac{5\pi}{55}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{2\pi}{11} - \frac{7\pi}{33} + \frac{\pi}{11}$$

$$= \frac{6\,\pi}{33} - \frac{7\,\pi}{33} + \frac{3\,\pi}{33}$$

$$= \frac{2\,\pi}{33} \quad \text{F.I.}$$

$$\frac{7\pi}{21} - \frac{\pi}{4} + \frac{9\pi}{45}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$$

le dénominateur commun n'est pas visible au 1^er^ coup d'œil donc on calcule les fractions 2 par 2.

$$= \frac{4\,\pi}{12} - \frac{3\,\pi}{12} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{5} \times \pi}{\mathbf{5} \times 12} + \frac{\mathbf{12} \times \pi}{\mathbf{12} \times 5}$$

$$= \frac{5\,\pi}{60} + \frac{12\,\pi}{60}$$

$$= \frac{17\,\pi}{60} \quad \text{F.I.}$$

➢ En guise de conclusion, on voit que l'addition et donc la soustraction s'accordent très mal avec les fractions. Et finalement on le comprend assez bien : lorsque les dénominateurs ne sont pas égaux, les fractions ne sont pas du même genre (des quarts ne sont pas du même genre que des demis par exemple) et on ne peut additionner ou soustraire que des choses du même genre !

On verra plus tard que ce « problème » de l'addition ou de la soustraction réapparaîtra avec les puissances en 4ème et les racines carrées en 3ème.

Après l'addition et la soustraction, passons à la *multiplication.*

IV. MULTIPLICATION D'ECRITURES FRACTIONNAIRES.

A. Formule :

Contrairement à l'addition et la soustraction, **la règle est très simple car intuitive** pour la multiplication. ☺

Règle : $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{b} \times \mathbf{d}}$ (avec b ≠ *0* et d ≠ *0*)

$\dfrac{15}{63} \times \dfrac{35}{12}$	**Méthode pour la multiplication de fractions**	$\dfrac{12}{35} \times \dfrac{63}{27}$
$= \dfrac{15 \times 35}{63 \times 12}$	On a appliqué la règle intuitive pour la multiplication des fractions ci dessus. **On ne s'amuse surtout pas à faire ces multiplications !** Cette étape est facultative et on passera directement aux décompositions en produits de facteurs.	$= \dfrac{12 \times 63}{35 \times 27}$
$= \dfrac{\mathbf{3} \times 5 \times \mathbf{7} \times 5}{9 \times \mathbf{7} \times 4 \times \mathbf{3}}$	On décompose en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier.	$= \dfrac{4 \times 3 \times 9 \times 7}{7 \times 5 \times 9 \times 3}$
$= \dfrac{5 \times 5}{9 \times 4}$	On a simplifié tous les facteurs communs (ici 3×7). (ligne facultative)	
$= \dfrac{25}{36}$ F.I.	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier.	$= \dfrac{4}{5}$ *F.I.*

A retenir : Il faut comme **TOUJOURS SIMPLIFIER AVANT DE MULTIPLIER** quoique ce soit !
On ne met **JAMAIS AU MEME DENOMINATEUR POUR LA MULTIPLICATION.**

➢ Exercices : Calculer en colonnes et mettre le résultat sous forme irréductible ou sous forme d'entier :

① $\dfrac{11}{25} \times \dfrac{55}{121}$

$= \dfrac{1 \times \mathbf{11} \times \mathbf{5} \times \mathbf{11}}{5 \times \mathbf{5} \times \mathbf{11} \times \mathbf{11}}$

$= \dfrac{1}{5}$ *F.I*

R = $\frac{1}{5}$

$\dfrac{3}{16} \times \dfrac{24}{12}$

$= \dfrac{\mathbf{3} \times 1 \times \mathbf{8} \times 3}{\mathbf{8} \times 2 \times \mathbf{3} \times 4}$

$= \dfrac{3}{8}$ *F.I.*

R = $\frac{3}{8}$

$\dfrac{17}{19} \times \dfrac{19}{17}$

$= \dfrac{1 \times \mathbf{17} \times \mathbf{19}}{1 \times \mathbf{19} \times \mathbf{17}}$

$=$ *1 !*

② Ex : $25 \times \dfrac{3}{55}$

$= \dfrac{25}{1} \times \dfrac{3}{55}$

$= \dfrac{5 \times \mathbf{5} \times 3}{1 \times 11 \times \mathbf{5}}$

$= \dfrac{15}{11}$ F.I.

$\dfrac{17}{36} \times 12$

$= \dfrac{17}{36} \times \dfrac{12}{1}$

$= \dfrac{17 \times 1 \times \mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12} \times 1}$

$= \dfrac{17}{3}$ *F.I.*

$37 \times \dfrac{1}{37}$

$= \dfrac{37}{1} \times \dfrac{1}{37}$

$= \dfrac{37}{37}$

$=$ *1 !*

$\dfrac{1}{13} \times 13$

$= \dfrac{13}{13}$

$=$ *1 !*

③ Méthode :

$$\frac{0{,}25}{4{,}9} \times \frac{7}{5}$$

On va d'abord « se débarrasser » des nombres décimaux.

$= \dfrac{0{,}25 \times 100}{4{,}9 \times 100} \times \dfrac{7}{5}$ *A faire de tête !*

$= \dfrac{25}{490} \times \dfrac{7}{5}$

$= \dfrac{5 \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}}{\mathbf{7} \times 70 \times \mathbf{5}}$

$= \dfrac{5}{70}$ *On peut encore simplifier.*

$= \dfrac{1 \times \mathbf{5}}{14 \times \mathbf{5}} = \dfrac{1}{14}$ F.I.

$$\frac{2{,}1}{3} \times \frac{9}{7}$$ *R =* $\frac{9}{10}$

$= \dfrac{21}{30} \times \dfrac{9}{7}$

$= \dfrac{\mathbf{7} \times 3 \times \mathbf{3} \times 3}{10 \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}}$

$= \dfrac{9}{10}$ *F.I.*

$$\frac{50}{11} \times 1{,}1$$ R = 5

$= \dfrac{50}{11} \times \dfrac{11}{10}$

$= \dfrac{50}{10}$

$=$ *5 !*

B. Fractions d'une quantité :

Prendre une fraction d'une certaine quantité revient à *multiplier* cette quantité par la fraction.

<u>Conséquence</u> : Dans les problèmes, les mots « de », « du » ou « des » se traduisent par le signe ×.

Les 2 neuvièmes de 15	**<u>Méthode</u> : Calculer la fraction d'une certaine quantité.**	Les 4 tiers de 9/4
$= \dfrac{2}{9} \times 15$	On traduit le mot « de » par une multiplication.	$= \dfrac{4}{3} \times \dfrac{9}{4}$
$= \dfrac{2}{9} \times \dfrac{15}{1}$	On écrit sous forme de fractions les nombres entiers ou décimaux s'il y en a.	
$= \dfrac{2 \times 15}{9 \times 1}$	On applique la formule intuitive pour la multiplication des fractions.	$= \dfrac{4 \times 9}{3 \times 4}$
$= \dfrac{2 \times 5 \times \mathbf{3}}{3 \times \mathbf{3} \times 1}$	On décompose en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier tous les facteurs communs (à gauche la paire de 3 ; à droite la paire 4 × 3).	$= \dfrac{\mathbf{4} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times \mathbf{4}}$
$= \dfrac{10}{3}$ F.I	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier.	= 3 !

➢ <u>Exercice :</u> Calculer en colonnes (résultat : F.I. ou entier !).

Cinq quarts de 16.

$\dfrac{5}{4} \times 16$

$= \dfrac{5}{4} \times \dfrac{16}{1}$

$= \dfrac{5 \times 16}{4 \times 1}$

$= \dfrac{5 \times \mathbf{4} \times 4}{\mathbf{4} \times 1}$

$=$ *20 !*

Sept tiers de 9/14.

$\dfrac{7}{3} \times \dfrac{9}{14}$

$= \dfrac{7 \times 9}{3 \times 14}$

$= \dfrac{\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times 2 \times \mathbf{7}}$

$= \dfrac{3}{2}$ *F.I.*

25 % de 40.

$= \dfrac{25}{100} \times 40$

$= \dfrac{25}{100} \times \dfrac{40}{1}$

$= \dfrac{25 \times 40}{100 \times 1}$

$= \dfrac{1000}{100}$

$=$ *10 !*

56% de 25/8.

$= \dfrac{56}{100} \times \dfrac{25}{8}$

$= \dfrac{56 \times 25}{100 \times 8}$

$= \dfrac{8 \times 7 \times 25}{25 \times 4 \times 8}$

$= \dfrac{7}{4}$ *F.I.*

20 % de 30.

$= \dfrac{20}{100} \times 30$

$= \dfrac{20}{100} \times \dfrac{30}{1}$

$= \dfrac{2 \times \mathbf{10} \times 3 \times \mathbf{10}}{\mathbf{10} \times \mathbf{10}}$

$=$ *6 !*

V. WHAT'S THE PROBLEM ?

Faites ces situations problèmes à gauche ou sur votre cahier d'exercices. FRCP évidemment !

① A la loterie « Entub » vous avez 48 chances sur 180 de gagner. A la loterie « Arnaq », vous avez 15 chances de gagner sur 75. A quelle loterie jouez vous ? Justifiez évidemment !

On applique la méthode FRCP pour mettre sous forme irréductible les fractions, puis on comparera :

Proportion de chances de gagner $= \dfrac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}}$

à la loterie « Entub » $= \dfrac{48}{180}$

$= \dfrac{\mathbf{6} \times 8}{\mathbf{6} \times 30}$

$= \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$

F.I.

Proportion de chances de gagner $= \dfrac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}}$

à la loterie « Arnaq » $= \dfrac{15}{75}$

$= \dfrac{3 \times \mathbf{5}}{\mathbf{5} \times 15}$

$= \dfrac{3}{15}$

On voit qu'il y a plus de chance à jouer à la loterie « Entub », mais bon je ne vous conseille pas de jouer, à moins que vous ayez de l'argent à perdre !

② Dans une famille un peu compliquée, on partage un gâteau :

Le grand père donne $\dfrac{3}{13}$ du gâteau à la belle fille qui en a déjà pris $\dfrac{2}{13}$. Celle ci donne $\dfrac{3}{13}$ du gâteau à sa fille qui n'aime pas trop et remet $\dfrac{2}{13}$ dans la boîte. La grand mère en profite et prend $\dfrac{5}{13}$ mais elle a les yeux plus gros que le ventre la grand mère (!) et elle laisse $\dfrac{3}{13}$ pour le lendemain. C'était compter sans le chien, qui se sert royalement $\dfrac{2}{13}$.

Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour les souris qui se lèchent déjà les babines ?

Méthode FRCP !

Fraction finale de gâteau = fraction totale – fraction donnée par le gd père – fraction belle fille – fraction donnée à sa fille + fraction remise – fraction gd mère + fraction laissée par gd mère – fraction du chien. (ouf)

$$= \frac{13}{13} - \frac{3}{13} - \frac{2}{13} - \frac{3}{13} + \frac{2}{13} - \frac{5}{13} + \frac{3}{13} - \frac{2}{13} = \frac{3}{13}$$

Il ne reste que $\dfrac{2}{13}$ *du gâteau pour les pauvres souris toutes mimi qui vont se faire manger par ouf le chien.*

<u>Remarque</u> : La fraction totale était $\dfrac{13}{13}$ *car* $\dfrac{13}{13} = 1$ *qui représente toujours le total en fraction (1 = 100% =* $\dfrac{13}{13}$*).*

③ Un prof a ramassé 60 copies. Il perd les $\frac{4}{5}$ le soir même dans le métro !

Combien d'élèves auront leurs copies le lendemain ? (attention à la qualité de la rédaction FRCP !)

On applique la méthode FRCP :

Nombre de copies perdues = $\frac{4}{5}$ *du nombre total de copies*

$$= \frac{4}{5} \times 60$$

$$= 4 \times \frac{60}{5}$$

$$= 4 \times 12 = 48$$

D'où Nombre de copies rendues = nb total de copies – nb de copies perdues = 60 – 48 = 12

12 élèves auront leur copie le lendemain.

- ***Remarque* : On pouvait trouver plus vite la solution en utilisant le fait que $\frac{1}{5}$ (= $\frac{5}{5} - \frac{4}{5}$) est la proportion de copies non perdues puis en appliquant la méthode FRCP pour calculer directement le nombre de copies non perdues.**

④ Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40% ! Sans écouter, un chapitre demande 15 heures de travail à la maison. Combien de temps travaillerez vous en écoutant ?

On applique la méthode FRCP :

On va d'abord calculer combien de temps de travail on gagne en écoutant :

Temps de travail en moins en écoutant = 40% du temps normal de travail

(en heures) $= \frac{40}{100} \times 15$

$= \frac{2}{5} \times 15$ *j'ai simplifié* $\frac{40}{100} = \frac{2 \times \mathbf{20}}{5 \times \mathbf{20}} = \frac{2}{5}$

$= 2 \times \frac{15}{5}$

$= 2 \times 3 = 6$

On gagne 6 heures de travail en écoutant donc on ne travaille que 9 heures (= 15 – 6) en écoutant.

Morale de l'histoire : il vaut mieux écouter en classe, on bosse moins à la maison !

⑤ La facture de novembre de téléphone de Mélusine (66 €) se décompose de la manière suivante :

$\frac{1}{6}$ en appels locaux ; $\frac{1}{12}$ en appels de voisinage ; et $\frac{1}{4}$ en appels vers les mobiles. La fraction restante étant constituée des appels internationaux pour son chéri qui étudie les maths à Guadalcanal.

1. Quelle est la fraction dévolue aux communications vers l'international ?
2. Ne dépense-t-elle pas un peu trop pour son amoureux ? Justifiez !

Méthode FRCP !

1. *Fraction pour l'international = frac. totale − frac. appels locaux − frac. voisinage − frac. mobile*

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12}{12} - \frac{2}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3}{12}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

La moitié de la facture de Mélusine est engloutie dans les appels vers Guadalcanal !

2. *Prix payé vers l'international* $= \frac{1}{2} \times$ *montant total de la facture*

$$= \frac{1}{2} \times 66$$

$$= \frac{66}{2} = 33$$

Mélusine dépense 33 € pour dire à son chéri qu'elle l'aime. C'est beau l'Amour…

⑥ On se partage encore un gâteau ! Un quart pour moi, un tiers pour lui, un cinquième pour elle. Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour les autres ?

Devinez quoi : Méthode FRCP !

Fraction restante de gâteau = fraction totale − fraction pour moi − fraction pour lui − fraction pour elle

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{60}{60} - \frac{15}{60} - \frac{20}{60} - \frac{12}{60}$$

$$= \frac{13}{60}$$

Les autres se partageront $\frac{13}{60}$ *du gâteau soit moins que pour moi ou lui. Les absents ont toujours tord !*

⑦ Dans un cours de maths, parmi les 39 élèves, un tiers n'écoutent pas ! Parmi ces élèves qui n'écoutent pas, $\frac{9}{13}$éme détestent les fractions ! Combien d'élèves dans cette classe détestent les fractions ?

Ont-ils raison ? *Bien sûr que non !*

Guess what ? Méthode FRCP of course !

- *Fraction d'élèves détestant les fractions* $= \frac{9}{13}$ *de la fraction d'élèves qui n'écoutent pas.*

$$= \frac{9}{13} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3 \times \mathbf{3}}{13 \times \mathbf{3}} = \frac{3}{13}$$

3 élèves sur 13 détestent les fractions.

- *Nombre d'élèves détestant les fractions* $= \frac{3}{13} \times$ *nb total d'élèves.*

$$= \frac{3}{13} \times 39$$

$$= \frac{3 \times \mathbf{13} \times 3}{1 \times \mathbf{13}} = 9$$

Il y a 9 pauvres élèves qui n'ont pas la chance d'aimer les fractions !

VI. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LES FRACTIONS.

① $A = \left(\frac{2}{3} + 3\right) \times \frac{3}{22}$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{3}\right) \times \frac{3}{22}$$

J'ai mis la parenthèse au même dénominateur.

$$= \frac{11}{3} \times \frac{3}{22}$$

$$= \frac{\mathbf{11} \times 1 \times \mathbf{3}}{\mathbf{3} \times 2 \times \mathbf{11}}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{F.I}$$

$B = \frac{8}{5} \times \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{4}\right)$

$$= \frac{8}{5} \times \left(\frac{10}{12} + \frac{15}{12}\right)$$

J'ai mis la parenthèse au même dénominateur.

$$= \frac{8}{5} \times \frac{25}{12}$$

$$= \frac{\mathbf{4} \times 2 \times \mathbf{5} \times 5}{\mathbf{5} \times 3 \times \mathbf{4}}$$

$$= \frac{10}{3} \quad \text{F.I.}$$

$C = \frac{11}{10} - \frac{3}{25} \times \frac{5}{9}$

$$= \frac{11}{10} - \frac{1 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}}{5 \times \mathbf{5} \times 3 \times \mathbf{3}}$$

$$= \frac{11}{10} - \frac{1}{15}$$

On cherche un multiple commun à 10 et 15 : c'est 30.

$$= \frac{11 \times 3}{10 \times 3} - \frac{1 \times 2}{15 \times 2}$$

$$= \frac{33}{30} - \frac{2}{30}$$

$$= \frac{31}{30} \quad \text{F.I.}$$

② Calculer $c + a \times b$ avec $a = 6$ $b = \frac{5}{12}$ et $c = \frac{10}{2}$ $R = \frac{15}{2}$

Méthode :

① On vérifie d'abord que les valeurs des lettres sont simplifiées.

② On écrit l'expression de départ puis on remplace les lettres par leurs valeurs.

③ On simplifie les fractions si possible.

④ On fait les calculs en colonnes en faisant très attention aux priorités, signes et règles de calcul.

Ici, c se simplifie en $c = \frac{10}{2} = 5$ *!*

$c + a \times b = 5 + 6 \times \frac{5}{12}$ *On écrit puis on remplace.*

$= 5 + \frac{6}{1} \times \frac{5}{12}$ *Priorité : attention ! On fait d'abord la × avant la + !*

$= 5 + \frac{\mathbf{6} \times 5}{1 \times \mathbf{6} \times 2}$

$= 5 + \frac{5}{2}$

$= \frac{10}{2} + \frac{5}{2}$ *On a mis au même dénominateur.*

$= \frac{15}{2}$

③ $\left(\frac{3}{9}\right)^2 \times \frac{27}{33} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{9}{11}$ *On a simplifié* $\frac{3}{9}$ *et* $\frac{27}{33}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{11}$ *On transforme* $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{11}$

$= \frac{1}{11}$

④ 2 hyènes sont attablées, serviettes autour du cou, autour d'un bon gigot de buffle de 120 kg que la mère a préparé. « Avant de nous goinfrer, procédons au partage : un tiers pour Robert, $\frac{3}{4}$ de ce qui reste pour Kiki, et le reste pour moi. » dit Manu qui descendait.

« C'est bien beau mais ça me fait quelle part ! » dit Kiki. « Et moi ? » soupira Robert.

« Je n'en sais rien, dit Manu, c'est le prof dans la savane qui m'a suggéré de, dorénavant, partager le gigot en fractions ! »

Aider ces 3 pauvres hyènes à calculer la part de chacun !

Est il encore besoin de le préciser ? Méthode FRCP !

- *Part de Robert* $= \dfrac{1}{3}$ *du poids total.*

$$= \frac{1}{3} \times 120$$

$$= \frac{120}{3} = 40$$

Robert va se délecter de 40 kg de gigot de buffle.

- *Part de Kiki* $= \dfrac{3}{4}$ *du poids restant.*

$$= \frac{3}{4} \times (120 - 40)$$

$$= \frac{3}{4} \times 80$$

$$= \frac{3 \times 4 \times 20}{4 \times 1}$$

$$= 60$$

Kiki va s'envoyer 60 kg de gigot de buffle dans le gosier.

- *Ma part = poids restant après que Robert et Kiki se soient servis.*

= total − part de Robert − part de Kiki

$= 120 - 40 - 60$

$= 20$

Il ne me reste plus qu'à m'empiffrer avec les 20 kg restants.

⑤ Un rectangle a pour longueur $\dfrac{56}{48}$ cm et pour largeur $\dfrac{28}{72}$ cm. Calculer son périmètre.

$\mathscr{P}(\text{rectangle}) = 2 \times \text{Longueur} + 2 \times \text{largeur}$

$$= 2 \times \frac{56}{48} + 2 \times \frac{28}{72}$$

$$= \frac{\mathbf{2} \times 7 \times \mathbf{8}}{\mathbf{8} \times 3 \times \mathbf{2}} + \frac{\mathbf{2} \times 7 \times \mathbf{4}}{\mathbf{8} \times 9}$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{21}{9} + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{28}{9} \quad \text{F.I.}$$

Le périmètre du rectangle est de $\dfrac{28}{9}$ *cm exactement.*

⑥ Les égalités suivantes sont-elles vérifiées pour les valeurs données ci dessous ?

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$ pour a = 2, b = 8, c = 10 et d = 12.

D'une part à gauche, on a :

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{2}{8} + \frac{10}{12}$

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ *On a simplifié.*

$= \frac{3}{4 \times 3} + \frac{5 \times 2}{6 \times 2}$ *12 est le ppcm de 4 et 6.*

$= \frac{3}{12} + \frac{10}{12}$

$= \frac{13}{12}$ *F.I.*

D'autre part à droite, on a :

$\frac{a + c}{b + d} = \frac{2 + 10}{8 + 12}$

$= \frac{12}{20}$

$= \frac{3}{5}$ *F.I.*

Puisque $\frac{13}{12} \neq \frac{3}{5}$*, alors le quadruplet de valeurs a = 2, b = 8, c = 10 et d = 12 ne vérifient pas l'égalité de départ.*

Remarque : On retrouve le fait qu'on ne peut pas additionner $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *directement sans les avoir mises au même dénominateur au préalable !*

Cette faute est souvent faite par les élèves.

$a \times (b + c) = ab + ac$ pour $a = \frac{2}{4}$, $b = 2$ et $c = \frac{12}{10}$.

On simplifie d'abord $a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *et* $c = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

D'une part à gauche, on a :

$a \times (b + c) = \frac{1}{2} \times (2 + \frac{6}{5})$

$= \frac{1}{2} \times (\frac{10}{5} + \frac{6}{5})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{16}{5}$

$= \frac{1 \times 8 \times \mathbf{2}}{\mathbf{2} \times 5}$

$= \frac{8}{5}$ *F.I.*

D'autre part à droite, on a :

$ab + ac = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{6}{5}$

$= 1 + \frac{3}{5}$

$= \frac{5}{5} + \frac{3}{5}$

$= \frac{8}{5}$ *F.I.*

Puisque $\frac{8}{5} = \frac{8}{5}$*, alors le triplet de valeurs* $a = \frac{1}{2}$*, b = 2,et* $c = \frac{6}{5}$ *vérifient l'égalité de départ.*

Remarque : Cela ne nous étonne pas car l'on sait que quelques soient les valeurs de a, b et c, on a toujours :

a (b +c) = ab + ac : c'est l'égalité de distributivité !!!!