# LES NOMBRES DECIMAUX : REGLES DE CALCUL

Le plus ancien système consistait à compter sur les doigts. Mais comment enregistrer le résultat ?

## « Réfléchir avant d'agir !»

*« Correction en rouge et italique. »*



Voici le premier livret d'une **longue série à succès**.

Avant tout, inscrivez au stylo ou au feutre votre NOM en majuscules, votre Prénom puis votre classe au bas de cette page.

Puis remplissez le tableau au crayon à papier (ou stylo effaçable) « Pré-requis pour prendre un bon départ ».

➢ Pré-requis pour prendre un bon départ :

| | ☹ | 😐 | ☺ | ☺☺ |
|---|---|---|---|---|
| Nombres entiers et décimaux : définitions. | | | | |
| Nombres entiers et décimaux : les 4 opérations et propriétés. | | | | |
| Multiplication par 10 ou 100 ou 0,1 ou 0,01 etc. | | | | |
| Troncature, valeurs approchées par défaut ou excès, arrondis (pour contrôler ses résultats). | | | | |

Lisez **attentivement et complètement ces livrets** ! **Ecrivez proprement et pas trop gros.**

**Remplissez tous les trous, au crayon à papier ou au stylo effaçable (pas de bic)**.

Les réponses se trouvent facilement en réfléchissant (un peu) et en lisant quelques mots plus loin.

Appelez-moi quand vous ne comprenez *vraiment pas*.

Une fois chez vous, apprenez ce cours. **Tout ce qui est encadré ou en gras doit être su par cœur !**

Utilisez de la **couleur (stabilo)** pour faire ressortir les choses que vous jugez importantes.

**Enfin, comparer les cours avec ceux du livre**.

*NOM et prénom : …………………………………………….* *5ème …….*

# I. LES NOMBRES DECIMAUX (6$^{EME}$).

## A. Des chiffres et des êtres :

➢ De nos jours, nous écrivons presque tous les nombres avec les *chiffres* indoarabes.

Combien y a-t-il de chiffres indoarabes ? *10 !* Ecrivez les tous ds l'ordre : *0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 mais pas 10 !*

Existe-t-il d'autres chiffres que les chiffres indoarabes ? *Oui.* Lesquels ? *Chiffres romains, chinois…*

Ecrivez le nombre « vingt » sans utiliser les chiffres indoarabes : *XX en chiffres romains.*

Ainsi donc, il ne faut **pas confondre nombres et chiffres** :

« On écrit les mots avec des *lettres.* On écrit les *nombres* avec des *chiffres* »

➢ *Pour pouvoir écrire une infinité de nombres avec un nombre fini de signes (les 10 chiffres), l'Homme a construit petit à petit un système d'écriture qui repose sur ces 10 chiffres et en particulier le chiffre 0.*

*Cela s'est fait en Inde du 3ème siècle avant Jésus Christ au 9ème siècle après Jésus Christ.*

*Ce système d'écriture des nombres est passé par Bagdad puis dans le monde Arabe au 9ème siècle.*

*Grâce aux Croisades et aux traductions par les universités naissantes d'œuvres arabes[1] (qui étaient elles même issues d'œuvres grecques ou indiennes), ce système s'est répandu en Occident entre les 10ème et 13ème siècles.*

Ce système d'écriture des nombres s'appelle : **La Numération Décimale (ou écriture décimale).**

| *……* | *……* | *Dizaines de Milliers* | *Milliers* | *Centaines d'unités* | *Dizaines d'unités* | *Unités* | *Dixièmes* | *Centièmes* | *Millièmes* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 2 | 7 | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 | 1 |

**La Numération Décimale** est un **système d'écriture des nombres :**

- **à base 10 :** chaque colonne représente une « puissance de 10 » : soit 10 soit 100 soit 1 000 etc., soit 0,1 soit 0,01 soit, 0,001 etc.
- **de position** : la valeur d'un chiffre dépend de la colonne où il est écrit. Par exemple, le chiffre 3 au dessus n'a pas la même valeur dans la colonne « Centaines » que le 3 dans la colonne « Centièmes ».

Remarque : Dans ce système de numération (d'écriture), on a eu besoin d'un chiffre pour indiquer l'absence dans une ou plusieurs colonnes du tableau. Ce chiffre s'appelle le *zéro* et est noté « 0 ».

Ainsi, dans le tableau au dessus, on déduit qu'il n'y a pas d'*unités* ou de *dizaines.*

➢ Vocabulaire :

$$\underbrace{730}_{\text{Partie entière}} , \underbrace{023}_{\text{Partie décimale}}$$

Définition : **Les nombres à partie décimale nulle s'appellent les nombres *entiers* ou entiers naturels.**

---

[1] Citons l'un des chefs d'œuvre de l'Humanité : « Al-jabr wa'l muqâbala » écrit par le mathématicien arabe Al Khwarizmi.
Ce livre pose le socle de l'Algèbre (qui vient de Al-jabr) et donc des maths modernes, telles que nous les connaissons.

### B. Définition des nombres décimaux (positifs) :

Les nombres entiers ne sont pas suffisants par exemple pour mesurer avec précision le poids d'un médicament, ou pour fixer le prix d'un kilo de pomme de terre, ou pour repérer la position d'un point sur une droite graduée**. On a besoin de partager l'Unité** d'où l'apparition des nombres décimaux !

Définition : Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale est « ***finie*** »

Exemples :

- **Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux !** Ex : 25 qui est une écriture décimale finie.
- 2,555 est un décimal. $\frac{1}{4}$ est aussi un décimal (car $\frac{1}{4} = 0,25$).

En effet, les deux écritures décimales 2,555 et 0,25 sont finies.

- Mais 2,55555… n'est pas un décimal. $\frac{1}{3}$ non plus (car $\frac{1}{3} = 0,33333…$)

En effet, les deux écritures décimales 2,55555etc. et 0,33333etc. sont *infinies* !)

➢ Application : Barrer les nombres qui ne sont pas des nombres décimaux relatifs ***puis justifier***.

5 $\cancel{\pi}$ $\cancel{\frac{1}{9}}$ $\frac{1}{4}$ ~~+0,2424etc~~ 0,242400000000etc

*Car $\pi = 3,1415...$ $\frac{1}{9} = 0,111111.....$ et 0,242424etc ont des écritures décimales infinies $\neq 0$.*

## II. ADDITIONS DE DEUX NOMBRES DECIMAUX (6^EME^).

*Additionner, c'est ajouter.*

### A. Définition et vocabulaire :

L'addition est l'opération qui permet de calculer la ***somme de deux termes.***

Le résultat d'une addition s'appelle donc *la somme.*

Exemples : 12 + 29 = *41*

*Termes* *Somme*

5,7 + 6,3 = *12*

2,25 + 0,75 = *3*

105 + *65* = 170

*0,4* + 0,6 = 1

### B. Propriétés de l'addition :

Vous avez 6 € et je vous donne 3 €. Combien avez-vous ? *9 €* Opération. *6 + 3 = 9.*

Maintenant, vous avez 3 € et je vous donne 6 €. Combien avez-vous ? *9 €* Opération *3 + 6 = 9.*

On peut donc écrire : *6 + 3 = 3 + 6*

Généralisons :

- Dans une addition, l'*ordre* des termes ne *compte* pas[2].
- Conséquence : dans une suite d'additions, on n'est pas obligé de faire mécaniquement les calculs de gauche à droite !

On peut regrouper astucieusement les termes pour faciliter le calcul.

[2] En langage savant, on dit que l'addition est une opération **commutative** : les deux termes d'une addition peuvent commuter, c-à-d changer d'ordre. Trouvez dans la vie courante deux actions qui ne sont pas commutatives : *« mettre la clé – ouvrir la porte »*

➢ Exercice : Calculer ces sommes astucieusement en colonnes, sans poser l'opération :

A = 1 131 + 83 + 17 + 9
= *1 131 + 9 + 83 + 17*
= *1 140 + 100*
= *1 240*

B = 0,7 + 2,8 + 0,3 + 0,2
= *0,7 + 0,3 + 2,8 + 0,2*
= *1 + 2*
= *3*

# III. SOUSTRACTION DE DEUX NOMBRES DECIMAUX (6EME).

*Soustraire, c'est enlever.*

## A. Définition et vocabulaire :

La soustraction est l'opération qui permet de calculer la ***différence de deux termes.***

Le résultat d'une soustraction s'appelle donc *la différence.*

Exemples : 32 – 29 = *3*

*Termes* *Différence*

5,7 – 2,7 = *3*

2,2 – 0,7 = *1,5*

105 – *35* = 70

*1,6* – 0,6 = 1

➢ Calculer : 25 – 5 = *20* 5 – 25 = *-25*

Comment sont les deux résultats ? *Différents (opposés pour être plus précis).*

Donc attention :

- **Dans une soustraction, *l'ordre* compte !**
- Conséquence : Dans un calcul où il y a des soustractions, il faut faire très attention à ne pas changer l'ordre des termes des soustractions.

# IV. MULTIPLICATION DE DEUX NOMBRES DECIMAUX (6EME).

*Multiplier, c'est reproduire en plusieurs exemplaires identiques.*

## A. Définition et vocabulaire :

La multiplication est l'opération qui permet de calculer ***le produit de 2 facteurs.***

Le résultat d'une multiplication s'appelle donc *le produit.*

Exemples : 1,5 × 3 = *4,5*

*facteurs* *Produit*

*2* × *13* = 26 11 × 7 = *77*

*4* × 2,5 = 10 4 × *25* = 100

5 × *0,2* = 1 40 × *0,1* = 4

Deux cas particuliers importants !

- 23,2564 × 0 = *0 !* ***Toute multiplication par 0 donne toujours 0 !*** *0* × 0,0147 = 0
- 1 × 2458 = *2 458* ***Toute multiplication par 1 ne change pas le produit !*** 2,47 × *1* = 2,47

## B. Multiplication par 10 ou 100 ou etc. ou 0,1 ou 0,01 ou etc. :

Quand on multiplie par 10 ou 100 ou 1 000 etc, on décale la virgule vers la *droite.*

Quand on multiple par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc, on décale la virgule vers la *gauche.*

Exercice : Calculer :

| | | |
|---|---|---|
| $24 \times 100 =$ *2 400* | $2{,}05 \times 10 =$ *20,5* | $1\,000 \times 0{,}07 =$ *70* |
| $0{,}1 \times 13 =$ *1,3* | $2\,500 \times 0{,}01 =$ *25* | $0{,}01 \times 2{,}3 =$ *0,023* |
| $0{,}027 \times 0{,}1 =$ *0,002 7* | $0{,}001 \times 10 =$ *0,01* | $100 \times 0{,}01 =$ *1* |

## C. Propriétés de la multiplication :

Exemple : $15 \times 3 =$ *45* et $3 \times 15 =$ *45* Donc *$15 \times 3 = 3 \times 15$*

Généralisons :

- Dans une multiplication, l'***ordre*** des facteurs ***ne compte pas***.
- Conséquence : dans une suite de multiplications, on n'est pas obligé de faire mécaniquement les calculs de gauche à droite.

  On peut donc regrouper astucieusement les facteurs afin de faire apparaître des 1 ou 10 ou 100 etc..

Exemples : $0{,}5 \times 1{,}3 \times 2 \times 10 = 0{,}5 \times 2 \times 1{,}3 \times 10$

$= 1 \times 13$

$= 13$

$0{,}2 \times 5 \times 0{,}1 \times 10 = 1 \times 1$

$= 1$ !

***On présentera toujours les calculs en colonnes !***

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P = 1{,}5 \times 0{,}25 \times 4 \times 10$ | $I = 25 \times 3{,}55 \times 4$ | $E = 1{,}2 \times 2{,}54 \times 1{,}7 \times 0$ | $D = 0{,}4 \times 5 \times 10 \times 0{,}1$ |
| $= 1{,}5 \times 10 \times 0{,}25 \times 4$ | $= 25 \times 4 \times 3{,}55$ | $= 0$ ! | $= 2 \times 1$ |
| $= 15 \times 1$ | $= 100 \times 3{,}55$ | | $= 2$ |
| $= 15$ | $= 355$ | | |

## D. Simplifications d'écriture pour la multiplication :

- Par convention, on peut *sous entendre donc supprimer* le signe « × » de la multiplication dans les quatre cas suivants :

  ① devant une lettre : par ex. le produit $2 \times \pi$ s'écrit tout simplement *$2\pi$.*

  ② entre deux lettres : par ex. le produit $a \times k$ s'écrit tout simplement *$ak$*

  ③ devant une parenthèse ou un crochet : par ex. le produit $3 \times (z + 5)$ s'écrit *$3(z + 5)$*

  ④ entre parenthèses ou crochets : par ex. le produit $(a + 6) \times [y - 3]$ s'écrit *$(a + 6)[y - 3]$.*

**En résumé, le signe « × » disparaît toujours *sauf entre 2 nombres* !**

- Inversement, lorsque deux quantités sont écrites sans signe entre elles, il s'agit d'un *produit.*

➢ Application : Simplifiez les expressions suivantes, en supprimant les signes « × » quand c'est possible :

$3 \times a - 5 =$ *$3a - 5$* $5 \times 3 - a =$ *$15 - a$* $6 + a \times \pi =$ *$6 + a\pi$*

$2 \times [3 + y] =$ *$2[3 + y]$* $2 \times p - 3 \times (2p + 1) =$ *$2p - 3(2p + 1)$* $5 \times 5 - a \times z =$ *$25 - az$*

$k \times (a + b) =$ *$k(a + b)$* $k \times a + k \times b =$ *$ka + kb$* $a \times a =$ *$a^2$*

➢ En fait, dans le dernier cas, on n'écrit jamais « aa » !

**Par convention, le produit « $a \times a$ » s'écrit « $a^2$ » et se lit « a au carré ».**

Exemple : Calculons $a^2$ pour la valeur $a = 7$ : $a^2 = 7^2$ on a remplacé la lettre a par sa valeur 7.

$(= 7 \times 7$ on a traduit $7^2$ en produit. Etape facultative !)

$= 49$ on a calculé.

Attention : Beaucoup d'élèves confondent le carré et le double : le carré $7^2$ est différent du double $7 \times 2$ !

Application : Pour y = 3, calculer en colonnes :

| | | |
|---|---|---|
| Pour $y = 4$, $y^2 = 4^2$ | Pour $y = 3$, $5y^2 = 5 \times 3^2$ | *Pour $y = 5$, $2y - y^2 = 10 - 25$* |
| $= 16$ | $= 5 \times 9$ | $= -15$ |
| | $= 45$ | |

# V. ENCHAINEMENTS D'OPERATIONS : REGLES DE PRIORITE.

## A. Calculs sans parenthèses : priorités.

On dispose de 5 œufs et de 2 boites de 6 œufs. De tête, combien y a-t-il d'œufs au total ? *17 œufs.*

Voici l'expression correspondant à votre calcul mental : « $5 + 2 \times 6$ ».

Cette expression correspond-elle à « $(5 + 2)\times 6$ » ou « $5 + (2 \times 6)$ » ? *$5 + (2 \times 6)$*.

En résumé, dans un calcul, doit-on effectuer prioritairement les additions ou les multiplications ? *Les « × ».*

**La multiplication (donc la division) est toujours *prioritaire* sur l'addition**

**(donc aussi sur la soustraction).**

Application : Calculer en colonnes en respectant les priorités :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A = 8 - 2 \times 3$ | $D = 15 - 9 \div 3$ | $O = 10 + 10 \times 2$ | $S = 3 - 3 \times 2$ |
| $= 8 - 6$ | $= 15 - \frac{9}{3}$ | $= 10 + 20$ | $= 3 - 6$ |
| $= 2$ | $= 15 - 3 = 12$ | $= 30$ | $= -3$ |

Conséquence de cette priorité : Inutile de mettre des parenthèses autour d'un produit !

Application : Simplifier les écritures puis calculer :

| | | |
|---|---|---|
| $F = (3 \times \text{pommes}) - (2 \times \text{pommes})$ | $O = 2 \times a + (5 \times a)$ | $U = 5 \times b + 3 \times a - (2 \times a) + 6 \times b$ |
| $= 3\text{ pommes} - 2\text{ pommes}$ | $= 2a + 5a$ | $= 5b + 3a - 2a + 6b$ |
| $= 1\text{ pomme}$ | $= 7a$ | $= 3a + 9b$ |

## B. Calculs avec parenthèses ou crochets : priorités.

Parfois, lorsqu'on modélise une situation, on a besoin dans un enchaînement d'opérations qu'une addition (ou une soustraction) soit effectuée avant les multiplications ou divisions. Comment faire ?

On utilise pour cela des *parenthèses* ou des *crochets*, ce qui a pour effet de changer l'ordre des priorités.

Dans un calcul complexe (c-à-d un calcul avec des parenthèses et/ou des crochets et/ou des multiplications et/ou des divisions et/ou des additions et/ou des soustractions), **les calculs se font ultra rarement de la gauche vers la droite !**

**Résumé de la méthode de calcul ; ordre de priorité des calculs** :

❶ On *simplifie* au maximum les écritures.

Puis on calcule dans l'ordre (en colonnes !) :

❷ les *parenthèses* ou les *crochets* en commençant par les plus intérieurs.

❸ les *multiplications* et/ou les divisions.

❹ les *additions* et/ou les *soustractions.*

➢ Application : **Mise en garde : Faire un calcul en priorité ne veut pas dire l'écrire en premier !**

① Calculer *en colonnes* en respectant les priorités :

$A = 3 \times [6 + 1]$

$= 3 \times 7$

$= 21$

$B = 5 - 16 \div (3 + 1)$

$= 5 - 16 \div 4$

$= 5 - 4$

$= 1$

$C = 2 + 3\,[\,12 - (5 + 3)]$

$= 2 + 3\,[12 - 8\,]$

$= 2 + 3 \times 4$

$= 2 + 12$

$= 14$

② Soient a = 3 ; b = 5 ; c = 2a = 6 Remplacer *intelligemment* puis calculer en colonnes :

$D = 2a - b - a + 2b + c - b$

$= 6 - 5 - 3 + 10 + 6 - 5$

$= 9$

*Il y a une manière beaucoup plus simple en faisant du* ***calcul littéral (programme de 4ème)*** *:*

$D = 2a - b - a + 2b + c - b$

$= a + c$

$= 3 + 6$

$= 9$ !

$E = a^2 + 3c\,(b + 2a \div c - b)$

$= 3^2 + 18\,(5 + \frac{6}{6} - 5)$

$= 9 + 18\,(5 + 1 - 5)$

$= 9 + 18 \times 1$

$= 9 + 18$

$= 27$

*Plus simplement avec le* ***calcul littéral,*** *on calcule la parenthèse :*

$E = a^2 + 3c\,(b + 2a \div c - b)$

$= a^2 + 3c\,(b + \frac{2a}{c} - b)$

$= a^2 + 3c \times \frac{2a}{c}$

$= a^2 + 6a$

$= 9 + 18$

$= 27$

### ④ Comment vérifier que des valeurs vérifient bien une égalité ?

On veut par exemple savoir si la valeur 1 pour x vérifie l'égalité $6x = 3x + 2$

*Méthode :* ❶ *On calcule **séparément** chaque côté de l'égalité (d'une part le membre de gauche, puis d'autre part le membre de droite) en remplaçant la ou les lettres par les valeurs proposées.*

❷ *On compare les résultats des 2 calculs :*

*Lorsqu'il y a **égalité** des 2 membres, alors la ou les valeurs proposées vérifient bien l'égalité de départ.*

Exemple : Vérifions par exemple si $x = 1$ vérifie $6y = 3x + 2$

❶ D'une part, on a $6x = 6 \times 1 = 6$ *On a remplacé x par 1 dans le côté gauche de l'égalité puis on calcule.*

D'autre part, on a $3x + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$ *On a remplacé x par 1 dans le côté droit de l'égalité puis on calcule.*

❷ Puisque $6 \neq 5$, alors la valeur $x = 1$ ne vérifie pas l'égalité de départ $6x = 3x + 2$.

Application : La ou les valeurs proposées vérifient-elles les égalités ci dessous :

➢ $u = 1$ pour $5 - 5u = 8u - 5$

*D'une part, on a* $5 - 5u = 5 - 5 \times 1$
$= 5 - 5$
$= 0$

*D'autre part, on a* $8u - 5 = 8 \times 1 - 5$
$= 8 - 5$
$= 3$

*Puisque $0 \neq 3$ alors $u = 1$ ne vérifie pas l'égalité de départ $5 - 5u = 8u - 5$.*

➢ $y = 6$ pour $y^2 - 25 = \frac{3}{2}y$

*D'une part, on a* $y^2 - 25 = 36 - 25 = 9$

*D'autre part, on a* $\frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \times 6$
$= 3 \times 3$
$= 9$

*Puisque $9 = 9$, alors $y = 6$ vérifie bien l'égalité de départ $y^2 - 25 = \frac{3}{2}y$.*

➢ $t = 1$ et $p = 0{,}1$ pour $2t - 10p = 2 - 2t$

*D'une part, on a* $2t - 20p = 2 \times 1 - 20 \times 0{,}1$
$= 2 - 2$
$= 0$

*D'autre part, on a* $2 - 2t = 2 - 2 \times 1$
$= 2 - 2 = 0$

*Puisque $0 = 0$ alors le couple $(t = 1 ; p = 0{,}1)$ vérifie l'égalité de départ $2t - 10p = 2 - 2t$.*

➢ $x = 1$ et $w = 2$ pour $2x + 2 = 2w$

*D'une par, on a* $2x + 2 = 2 \times 1 + 2$
$= 2 + 2$
$= 4$

*D'autre part, on a* $2w = 2 \times 2$
$= 4$

*Puisque $4 = 4$ alors le couple $(x = 1 ; w = 2)$ vérifie l'égalité de départ $2x + 2 = 2w$.*

➢ $t = 2$ pour $\frac{2}{t} + 3 = -4$

*D'une part, on a* $\frac{2}{t} + 3 = \frac{2}{2} + 3$
$= 1 + 3$
$= 4$

*D'autre part, on a* $-4$ *!*

*Puisque $4 \neq -4$ alors $t = 2$ ne vérifie pas l'égalité de départ $\frac{2}{t} + 3 = -4$*

➢ $x = 2$ et $y = 2$ pour $2x - y = 3(y)$

*D'une part, on a* $2x - y = 2 \times 2 - 2$
$= 4 - 2$
$= 2$

*D'autre part, on a* $3\,(y) = 3 \times (2)$
$= 6$

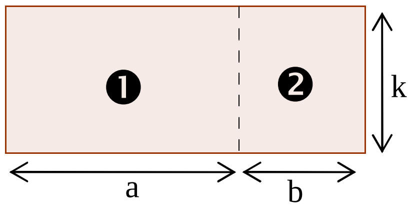
*Puisque $2 \neq 6$ alors le couple $(x = 2 ; y = -2)$ ne vérifie pas l'égalité de départ $2x - y = 3(y)$.*

# VI. PRODUIT D'UN NOMBRE PAR UNE SOMME : DISTRIBUTIVITE.

➢ On désire calculer des expressions de type produit d'un nombre par une somme, comme par exemple $3 \times (5 + \pi)$.

Et plus généralement de type : k(a + b). **k(a + b) se lit « k facteur de (a + b) ».**

➢ Illustrons géométriquement sur la figure ci-contre ce produit k (a + b).




Pour cela, considérons un grand rectangle de largeur k et de longueur (a + b).

Pour calculer l'aire totale du grand rectangle formé par les deux petits rectangles ❶ et ❷, il y a deux manières possibles :

| *Première manière :* on va calculer la somme des aires des 2 petits rectangles ❶ et ❷. | *Deuxième manière :* on va calculer directement l'aire du grand rectangle. |
|---|---|
| Aire (Rectangle ❶) = *ka*<br>Aire (Rectangle ❷) = *kb* | La largeur du grand rectangle vaut : *k*.<br>La longueur du grand rectangle vaut *( a + b )*. |
| Finalement, Aire (Grand Rectangle) = *ka* + *kb* | Donc Aire (Grand Rectangle) = *k* × *( a + b )* |

Les deux calculs permettant évidemment de calculer la même aire du grand rectangle, ces deux écritures sont donc équivalentes.

On peut donc écrire : *ka + kb* = *k ( a + b )*

## A. Formule de distributivité :

Généralisons : Quelques soient les valeurs des trois quantités k, a et b, on a :

**❶ Factorisation** →

$$\boldsymbol{k\,a + k\,b = k\,(a + b)}$$

← **❷ Développement**

- Le sens ❶ permet de transformer *la somme ka + kb* en *le produit k (a + b).*

  *C'est l'action de factoriser c-à-d la* ***Factorisation****.*

- Le sens ❷ permet de transformer *le produit k ( a + b )* en *la somme ka + kb.*

  *C'est l'action de développer c-à-d le* ***Développement****.*

## B. Quatre remarques sur la distributivité :

① Une même expression peut donc avoir 2 formes :

une **forme développée ou somme** : ***ka*** **+** ***kb*** et une **forme factorisée ou produit** : ***k*** **(a + b)**

② Le facteur ***k*** s'appelle le ***facteur commun*****.**

En effet, ***k*** est commun aux 2 termes ***k*****a** et ***k*****b**. On peut donc factoriser (mettre en commun) ***k*** dans ***k*****a** + ***k*****b** pour trouver ***k*** **(a + b).**

③ L'égalité très importante « ***k*** **(a + b)** = ***k*****a** + ***k*****b** » s'appelle :

**l'égalité de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**.

En effet, quand on développe le produit ***k*** **(a + b)** en la somme ***k*****a** + ***k*****b**, c'est comme si on « distribuait » ***k*** sur **a** puis sur **b**.

④ Cette égalité de distributivité reste évidemment valable avec la soustraction : k (a – b) = *ka* – *kb*

Evidemment, on a aussi par exemple k (a + b + c – d) = *ka* +*kb* + *kc* – *kd*

On aura l'occasion en classes de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$ de revenir sur **cette très importante égalité de distributivité** ***k*** **(a + b)** = ***k*****a** + ***k*****b** . (utile par exemple en $3^{ème}$ pour la résolution d'équations-produit.)

## C. Exercices sur la distributivité :

- Sens ❷ Développement d'un produit en somme ou différence :

Méthode sur un exemple : On veut développer le produit 2 (3 – 5h) en différence.

2 ( 3 – 5h ) → ① On dessine d'abord les flèches de développement.

( = 2 × 3 – 2 × 5h ) → (② On a développé ***de tête*** le produit 2 (3 – 5h) en utilisant le sens ❷. Etape facultative.)

= 6 – 10h → ③ On a réduit les écritures de chaque mini-produit.

Pour simplifier, ***ON EFFECTUERA DIRECTEMENT LES MINI-PRODUITS :*** ***2 ×3*** et ***2 ×5h !***

Application :

A = 2 (5 – h)

*( = 2 × 5 – 2 × h)*

*= 10 – 2h*

L = 6 (2y + 11)

*( = 6 × 2y + 6 × 11)*

*= 12y + 66*

G = (π – 5) × 3

*( = π × 3 – 5 × 3)*

*= 3π – 15*

- La technique du développement *(sens produit → somme)* est très utile pour calculer rapidement :

Exemple : On veut calculer 99 × 13 sans poser l'opération, en utilisant le développement :

Méthode : 99 × 13 = (100 – 1) × ***13*** — On a décomposé l'un des deux nombres (**jamais les deux !) : celui qui est proche de 10 ou 100 ou 1000 etc.**

(= 100 × ***13*** – 1 × ***13*** — On a développé en utilisant (a – b) × k = ak – bk : étape facultative.)

= 1 300 – 13 — On a calculé chaque mini-produit 100 × 13 et 1 × 13.

= 1 287

A vous maintenant, calculer ces produits, sans poser l'opération, mais en utilisant le développement :

51 × 12 = *51 × (10 + 2)*

*( = 51 × 10 + 51 × 2)*

*= 510 + 102*

*= 612*

1003 × 65 = *(1000 + 3) × 65*

*( = 1000 × 65 + 3 × 65)*

*= 65 000 + 195*

*= 65 195*

102 × 118 = *(100 + 2) × 118*

*( = 100 × 118 + 2 × 118)*

*= 11 800 + 236*

*= 12 036*

41 × 9,9 = *41 × (10 – 0,1)*

*( = 41 × 10 – 41 × 0,1)*

*= 410 – 4,1*

*= 405,9*

- <u>Sens ❶ Factorisation d'une somme (ou d'une différence) en un produit :</u>

<u>Méthode sur un exemple</u> : On veut factoriser la différence $15a - 5$ en produit.

$15t - 5 = \mathbf{5} \times 3t - \mathbf{5} \times 1$ On a **décomposé** chaque groupe **en produit** pour faire apparaître **le facteur commun 5**.

$= \mathbf{5}\,(3t - 1)$ On a mis le facteur **5** en commun et transformé la différence en produit grâce au sens ❶.

<u>Remarque :</u> Il faut très bien connaître ses tables pour décomposer chaque groupe de facteurs puis factoriser !

<u>Application :</u> Factorisez les sommes et différences suivantes en produits :

$14 + 35b = \mathbf{7} \times 2 + \mathbf{7} \times 5b$

$= \mathbf{7}\,(2 + 5b)$

$12 - 12m = \mathbf{12} \times 1 - \mathbf{12} \times m$

$= 12\,(1 - m)$

$9k + 3 = \mathbf{3} \times 3k + \mathbf{3} \times 1$

$= \mathbf{3}\,(3k + 1)$

$\mathscr{P}$ (rectangle) $= 2L + 2\ell$

$= \mathbf{2}\,(L + \ell)$

$ax - 2a = \mathbf{a} \times x - 2 \times \mathbf{a}$

$= \mathbf{a}\,(x - a)$

$16ky - 40bk = \mathbf{8k} \times 2y - \mathbf{8k} \times 5b$

$= 8k\,(2y - 5b)$

- La technique de la factorisation *(sens somme → produit)* sera plus tard indispensable pour la résolution des équations. Néanmoins, elle peut déjà servir pour certains calculs :

<u>Exemple</u> : On veut calculer sans poser les opérations $1{,}25 \times 1{,}1 + 0{,}75 \times 1{,}1$ Pas évident !

<u>Méthode</u> : $1{,}25 \times \mathbf{1{,}1} + 0{,}75 \times \mathbf{1{,}1} = \mathbf{1{,}1} \times (1{,}25 + 0{,}75)$ ***1,1*** est le **facteur commun.** On a factorisé grâce à $ak + bk = k(a + b)$

$= 1{,}1 \times 2$ On a calculé la parenthèse.

$= 2{,}2$

A vous maintenant, calculer ces sommes et différences en utilisant la factorisation :

$\mathbf{0{,}857} \times 12{,}7 - \mathbf{0{,}857} \times 2{,}7 = \mathbf{0{,}857} \times (12{,}7 - 2{,}7)$

$= 0{,}857 \times 10$

$= 8{,}57$

$\mathbf{1{,}147} \times 99{,}3 + 0{,}7 \times \mathbf{1{,}147} = \mathbf{1{,}147} \times (99{,}3 + 0{,}7)$

$= 1{,}147 \times 100$

$= 114{,}7$

*La factorisation est plus dure que le développement car il s'agit de trouver le facteur commun qui parfois (souvent !) est caché.*

# VII. <u>REVISIONS SUR LE CALCUL DES NOMBRES DECIMAUX.</u>

① Calculer en colonnes en faisant bien attention aux priorités :

$A = 75 - 5\,[1 + 0{,}5\,(1027 - 1018)\,(15 - 13)]$

$= 75 - 5\,[1 + 0{,}5 \times 9 \times 2]$

$= 75 - 5\,[1 + 1 \times 9]$

$= 75 - 5\,[1 + 9]$

$= 75 - 5 \times 10$

$= 75 - 50$

$= 25$

$B = 3 + 3^2\,(6 + 27 \div 9 - 9)$

$= 3 + 9\,(6 + 3 - 9)$

$= 3 + 9 \times 0$

$= 3 + 0$

$= 3$

② Remplacer *intelligemment* puis calculer en colonnes en faisant bien attention aux priorités :

Pour h = 2 ; y = 3 ; z = produit de h et y = $2 \times 3 = 6$

$C = ( h + z ) \div h + z$

$= \dfrac{2 + 6}{2} + 6$

$= 4 + 6$

$= 10$

f = 5 ; u = le carré de 3 ; n = le quotient de 5 et f

$f = 5$ ; $u = 3^2 = 9$ ; $n = \dfrac{5}{5} = 1$

$D = u^2 - 2fn - ( u^2 - f )\, n$

$= 9^2 - 2 \times 5 \times 1 - ( 9^2 - 5 ) \times 1$

$= 81 - 10 - ( 81 - 5 ) \times 1$

$= 71 - 76$

$= -5$

③ **Dessiner les flèches de développement** puis développer les deux produits en sommes ou différences :

$E = 5 ( 2k + 3y - 3 )$

$= 10k + 15y - 15$

$F = ( 3p - 4 + 6t ) \times 2$

$= 6p - 8 + 12t$

④ Factoriser **au maximum** les sommes suivantes en produits :

$G = 49k - 7$

$= \mathbf{7} \times 7k - \mathbf{7} \times 1$

$= \mathbf{7} ( 7k - 1 )$

$H = 6jy + 9y$

$= \mathbf{3y} \times 2j + 3 \times \mathbf{3y}$

$= \mathbf{3y} ( 2j + 3 )$

$I = 8dt + 4tz - 16t$

$= \mathbf{4t} \times 2d + \mathbf{4t} \times z - \mathbf{4t} \times 4$

$= \mathbf{4t} ( 2d + z - 4 )$

⑤ **Après avoir dessiné les flèches de développement,** compléter les égalités suivantes :

*Cet exercice s'appuie sur les techniques de factorisation développement. Donc on dessine les flèches de développement ce qui nous aidera grandement !*

$5b + 10 = 5 ( b + 2 )$ | $4 ( 4t - 8h ) = 16t - 32h$ | $12y + 3t - 9z = 3 ( 4y + t - 3z )$

⑥ Tester les égalités suivantes pour les valeurs proposées :

$a^2 + b^2 = ( a + b )^2$ pour $a = 5$ et $b = 3$

*D'une part, on a :* $a^2 + b^2 = 25 + 9$

$= 34$

*D'autre part, on a :* $( a + b )^2 = ( 5 + 3 )^2$

$= 8^2$

$= 64$

*Puisque* $34 \neq 64$*, alors le couple* $a = 5$ *et* $b = 3$ *ne vérifie pas l'égalité de départ* $a^2 + b^2 = ( a + b )^2$.

*__Remarque :__ On verra en classe de* $3^{\text{ème}}$ *que cette formule proposée « $a^2 + b^2 = ( a + b )^2$ » est toujours fausse !*

*La vraie formule est : « $a^2 + 2ab + b^2 = ( a + b )^2$ », qui fait partie des 3 identités remarquables.*

$3hk - 5 ( k^2 - 1) = 2k - 3 \times h$ pour $k = 2$ et $h = 3$

*D'une part, on a :*

$3hk - 5 ( k^2 - 1) = 18 - 5 ( 4 - 1 )$

$= 18 - 5 \times 3$

$= 18 - 15$

$= 3$

*D'autre part, on a :* $2k - 3 \times h = 4 - 9$

$= -5$

*Puisque* $3 \neq -5$*, alors le couple* $k = 2$ *et* $h = 3$ *ne vérifie pas l'égalité de départ* $3hk - 5 ( k^2 - 1) = 2k - 3 \times h$.

⑦ Traduire une expression numérique par une phrase et inversement :

Exemple : $(2 + 3) \times (5 - 3)$ se traduit par « le produit de la somme de 2 et 3 avec la différence de 5 et 3 ».

1. A vous maintenant : décrire par une phrase ces 3 expressions numériques puis les calculer en colonnes :

| $15 / 3 + 2$ | $(5 - 3) + 5 \times 2$ | $\frac{5 + 17}{11}$ |
|---|---|---|
| *La somme du quotient de 5 par 3 et de 2.* | *La somme de la différence de 5 par 3 avec le produit de 5 par 2.* | *Quotient de la somme de 5 et 17 par 11.* |
| $= 3 + 2$ | $= 2 + 10$ | $= \frac{22}{11}$ |
| $= 5$ | $= 12$ | $= 2$ |

2. Inversement, traduire numériquement puis calculer en colonnes :

| La différence du produit de 5 et 2 avec la somme de 3 et 4 | Le quotient de la somme de 5 et 11 par le carré de 4 | Le produit de 5 avec la somme de 2 et 3 |
|---|---|---|
| $= (5 \times 2) - (3 + 4)$ | $= \frac{5 + 11}{4^2}$ | $= 5 \times (2 + 3)$ |
| $= 10 - 7$ | $= \frac{16}{16} = 1$ ! | $= 5 \times 5$ |
| $= 3$ | | $= 25$ |

⑧ Test bis 2008.

Rajoutez en bleu une ou plusieurs paires de parenthèses pour que les 4 égalités suivantes soient vraies :

$$3 \times (6 + 7) = 39 \qquad (15 - 4 + 1) \times 10 = 120$$

$$(3 + 6) \times 7 = 63 \qquad 30 - (6 + 5 + 2) \times 2 = 4$$

⑨ • Complèter les trois égalités suivantes avec des nombres pris une ou plusieurs fois parmi « 3 ; 5 et 6 » :

$$\mathbf{3} + \mathbf{5} \times \mathbf{5} = 28 \qquad \mathbf{5} + \mathbf{3} \div \mathbf{6} = 5{,}5 \qquad \mathbf{3} - \mathbf{3} \div \mathbf{3} = 4$$

• Compléter les égalités suivantes avec les bons signes d'opération et des parenthèses si nécessaires :

$$(3 + 4) \times (8 + 2) = 70 \qquad 3 \times 4 + 8 \div 2 = 16 \qquad (3 + 4 + 8) \times 2 = 30$$

$$(3 + 4) \div (8 + 2) = 0{,}7 \qquad 3 + 4 + 8 - 2 = 18 \qquad 3 - 4 \div 8 - 2 = 0{,}5$$

⑩ **Sans effectuer de calcul mais à l'aide de la distributivité**, corriger les égalités fausses :

*Rappel : on utilise l'égalité fondamentale de distributivité :* $\boldsymbol{k\,a + k\,b = k\,(a + b)}$

$31 \times (71 + 57) = 31 \times 71 + 57 \times \mathbf{31}$ *Oubli classique du deuxième développement.*

$62 \times (23 + 88) = 62 \times 23 + 62 \times 88$ *Inversion des signes d'opération.*

$45 - 5 \times 27 = (9 - 27) \times 5$ *Juste ! En effet $(9 - 27) \times 5 = 9 \times 5 - 27 \times 5 = 45 - 27 \times 5$.*

$10 \times 5 \times 10 \times 3 = 10 \times (5 \times 3) \times \mathbf{10}$ *Confusion distributivité et suite de multiplications.*

$21 \times 54 + 21 \times 5 = \mathbf{59} \times 21$ *$21 \times 54 + 21 \times 5 = 21 \times (54 + 5) = 21 \times 59$*

$(4 \times 15) \times (5 \times 7) = 5 \times 15 \times 7 \times 4$ *Dans un produit, les parenthèses sont inutiles et l'ordre ne compte pas.*

# VIII. SITUATIONS-PROBLEMES.

① N°45 p.19 (Livre Magnard 5ème édition 2006).

***LIRE SEULEMENT les textes des 3 situations suivantes puis passer à la question 1 :***

- *Situation ① : Laure Azutat a 15 chansons dans son lecteur MP3. Jean Bonno en avait deux fois plus mais il en a supprimé 4 hier.*

  *Combien Jean a-t-il de chansons dans son lecteur MP3.*
- *Situation ② : La documentaliste du CDI a commandé 15 romans fantastiques et 4 romans policiers. Chaque roman coûte 2 €.*

  *A combien s'élève la commande ?*
- *Situation ③ : Une pièce de tissu rectangulaire mesure 15 m sur 4 m. On a découpé un morceau de 2 m de longueur.*

  *Quelle est l'aire du tissu restant ?*

- *Situation ④ : Un médecin prescrit à Djémal Alataite 1 comprimé le matin pendant 4 jours et 2 le soir pendant 15 jours.*

  *Combien Djémal aura-t-il pris de comprimés au total ?*

1. Voici 5 expressions numériques. Associe à chaque situation l'expression correspondante. Il restera une expression orpheline.

a) $2 \times 15 + 4$ b) $2 \times 15 - 4$ c) $( 15 - 2 ) \times 4$ d) $2 \times ( 15 - 4 )$ e) $2 \times ( 15 + 4 )$

*① Nb de chansons de Jean = 2 × Nb de chansons de Laure − Nb de chansons supprimées.*

$= 2 \times 15 - 4$

*② Prix de la commande = Prix d'un roman × Nb total de romans commandés*

$= 2 \times ( 15 + 4 )$

*③ Aire restante = Longueur restante × largeur*

$= ( 15 - 2 ) \times 4$

*④ Nb total de comprimés = Nb total de comprimés le matin + Nb total de comprimés le soir*

$= ( 1 \times 4 ) + ( 2 \times 15 )$

$= 4 + 2 \times 15$

2. Résoudre la situation ②. Méthode par Analyse-Synthèse.

*Synthèse :*

*Prix de la commande = Prix d'un roman × Nb total de romans commandés*

$= 2 \times ( 15 + 4 )$

$= 2 \times 19$

$= 38$ €

*La commande s'élève à 38 €.*

## ② Mathématiques et prévention anti-tabac. Contrôle 2008.


*Fumer est catastrophique pour la santé… Et pour le portefeuille ! Prenons une personne qui fume 3 paquets (à 5 euros) par semaine. Elle achète aussi 1 briquet jetable (à 1,50 euros) par mois en moyenne.*

En arrêtant de fumer, combien cette personne économise-t-elle en un an ? (Analyse –Synthèse)

*Synthèse :*

*Somme économisée en un an(en €)* = *Prix total des cigarettes* + *Prix total des briquets*

= *prix d'un paquet* $\times$ *nb de paquets par semaine* $\times 52$ + *nb de briquets par mois* $\times 12$

= $5 \times 3 \times 52 + 1{,}5 \times 12$

= $780 + 18$

= *798 €*

*En un an, cette personne aura économisé près de 800€ si elle arrête de fumer !!*

*Et il faut multiplier cette somme presque par 3 soit près de 2 400€ si elle fume 1 paquet par jour !!!!*

*Remarques :* *Il y a 52 semaines dans un an (365 ÷R 7) et non 48 ou 54 !*

*Il fallait calculer directement de semaines en année et non passer par les mois.*

## ③ Maths et Environnement. N°65 p.19 (Livre Magnard 5ème édition 2006).

*Un bain consomme en moyenne 150 litres d'eau, soit trois fois plus environ qu'une douche.*

*Une chasse d'eau consomme 9 litres d'eau. En plongeant une bouteille pleine fermée dans la cuve des toilettes, on peut réduire ce volume de 2 litres.*

*Chaque membre d'une famille de 4 personnes prend en moyenne 2 bains par semaine et tire 5 fois la chasse d'eau par jour.*


Quelle quantité d'eau sera économisée par an par cette famille en choisissant la douche plutôt que le bain et en réduisant le volume de la chasse d'eau ? (Analyse-Synthèse)

*Synthèse :*

*Calculons d'abord l'économie d'eau réalisée par une personne en un an :*

*Economie totale d'eau par an et par personne* = *Economie d'eau grâce à la douche par semaine* $\times$ *Nb de semaines* + *Eau économisée pour les toilettes par jour* $\times$ *Nb de jours*

= $(100 \times 52) + (2 \times 5 \times 365)$

= $5\,200 + 3\,650$

= *8 850 litres*

*Une personne de cette famille peut économiser 8 850 litres d'eau par an !*

| *Quantité totale d'eau économisée par la famille en un an* | *= Nb de personnes × Economie d'eau par an et par personne* |
|---|---|
| | *= 4 × 8 850* |
| | *= 35 400 litres.* |

*Cette famille, en prenant ces mesures simples économisera en un 35 400 litres d'eau !*

# IX. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

- **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 5$^{ème}$, Nombres Décimaux).**
- **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin !**

## A. Conseils :

Calculs en colonnes : c'est plus clair, mieux structuré et les erreurs sont plus faciles à voir et à corriger.

Simplifier l'écriture des expressions avant de les calculer.

- Développement : Dessiner les flèches de développement.
  Calculer ***de tête*** les produits issus du développement.
- Factorisation : Connaître ses tables pour trouver le ou les facteurs communs.
- Situations : méthode « Analyse (au brouillon) Synthèse (au propre) » !

## B. Erreurs à ne pas faire :

- Significations de quotient, produit, somme, différence non sues.
- Calculs : Enormément de fautes de priorité. Ex : $2 - 2 \times 2 = 0 \times 2$ ! FAUX ! Corrigez !

$$2 - 2 \times 2 = 2 - 4 = -2$$

Fautes de priorité dues au signe ÷ mal digéré. Ex : $3 + 15 \div 5 = \frac{3 + 15}{5}$ ! FAUX ! Corrigez !

$$3 + 15 \div 5 = 3 + \frac{15}{5} = 3 + 5 = 8$$

Faire les calculs en priorité ne veut pas dire les écrire en premier !

Fautes d'écriture : Calculs mal écrits ou en partie, d'où de nombreuses fautes.
Parenthèses ou crochets qui disparaissent ce qui a pour effet de changer les priorités.

- Développement : La formule k (a + b) = ka + kb n'est pas sue !
- Factorisation : La formule ka + kb = k (a + b) n'est pas sue ! Factorisez au maximum.
- Plus généralement fautes de signe, de calcul élémentaire ( $\frac{2}{2} = 0$ ! Archi faux , d'écriture etc.

## C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? *La symétrie centrale.*