

TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

« Les meilleurs travaux des mathématiciens sont de l'art, un art très perfectionné, défiant les rêves les plus secrets de l'imagination, clairs et limpides.

Le génie mathématique et le génie artistique se touchent l'un l'autre. » *Gosta Mittag-Leffler*¹.

I.	Mediatrices (Rappels de 6ème). _____	2
II.	Le triangle rectangle : Rappels. _____	5
III.	Triangle Rectangle et Cercle Circonscrit (TRCC). _____	6
IV.	Théorème TRCC réciproque (indirect). _____	9
V.	Pour préparer le test et le contrôle. _____	12

- Matériel : Règle, équerre, compas porte crayon etc.
- Pré-requis pour prendre un bon départ :

	<i>A refaire</i>	<i>A revoir</i>	<i>Maîtrisé</i>
Médiatrice d'un segment : définition et construction.			
Propriété métrique de la médiatrice : équidistance par rapport à deux points.			
Concurrence des 3 médiatrices d'un triangle.			
Cercle : équidistance par rapport à un point.			

¹ Gosta Mittag-Leffler : Mathématicien suédois du début du 20^{ème} siècle.

La légende voudrait que Sophie Hess, la compagne d'Alfred Nobel l'ai trompé avec Gosta Mittag-Leffler. Ainsi, pour se venger, Mr Nobel aurait supprimé le Nobel de Mathématique. Rien n'est moins sûr quand on sait que Mr Nobel était un célibataire endurci !

Qu'on se rassure : depuis 1924, les chercheurs en Mathématique peuvent être récompensés par la prestigieuse Médaille Field. Parmi les 8 français à l'avoir reçue : Laurent Schwarz (1950) ; Alain Connes (1982) ; Jean Christophe Yoccoz (1994) que j'ai eu comme professeur de calcul différentiel à la faculté d'Orsay ; Laurent Lafforgue (2002)...

NOM et Prénom :

4^{ème}

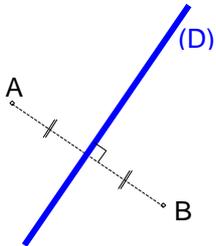
I. MEDIATRICES (RAPPELS DE 6EME).

A. Définition, double codage et notation de la médiatrice d'un segment :

On se rappelle que la médiatrice d'un segment est l'un des 2 axes de symétrie de ce segment : plus précisément, c'est l'axe de symétrie perpendiculaire au segment.

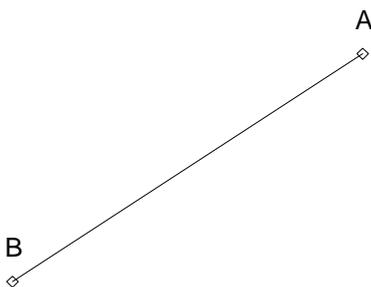
En fait, on utilise plutôt la définition équivalente suivante, plus pratique pour les exercices :

- Définition : La **médiatrice** d'un segment est droite :
 - ① passant par le de ce segment,
 - ② à ce segment.
- Notation : La médiatrice d'un segment [AB] est notée : **med [AB]**.
- Figure et codage : Du fait de la définition, un **double codage** apparaît lorsqu'on trace la médiatrice d'un segment donné. **Repasser ce double codage en rouge.**



➤ Exercice 1:

Tracer **en bleu med [AB]** au compas et à la règle.



N'oubliez pas le **double codage** de la figure !

➤ Exercice 3 :

Construire C le symétrique de A par rapport à B puis tracer (d), la perpendiculaire à (AB) passant par B. Quelle est la nature de la droite (d) ? Justifiez !



➤ Exercice 2 :

1. Ci dessous, placer le point B de telle sorte que la droite (d) soit la médiatrice de [AB].

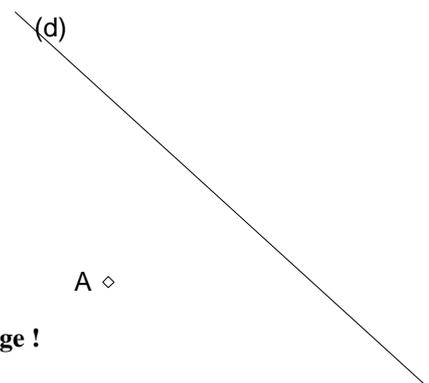
Comment sont les points A et B par rapport à (d) la médiatrice du segment [AB] ?

.....

2. Placer un point M sur med [AB].

Quel est la nature du triangle AMB ?

.....



Double codage !

B. Propriété métrique caractéristique de la médiatrice :

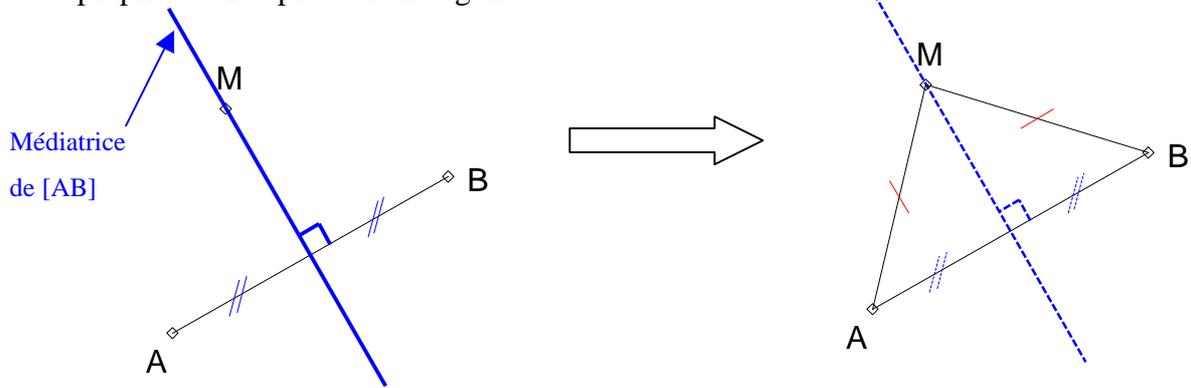
Propriété métrique de la médiatrice :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	M est sur la médiatrice d'un segment [AB]	alors	MA = MB

Autrement dit : Lorsqu'un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est situé à égale distance des deux extrémités de ce segment.

Utilité : Cette propriété sert à prouver une égalité de

Figure :



Inversement :

Réciproque de la propriété métrique de la médiatrice :

	(..... condition ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand =	alors	M est sur la du segment [AB].

*Autrement dit : Lorsqu'un point est **équidistant** des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.*

Utilité : Cette propriété sert à prouver qu'un point est sur une

Figure : C'est celle de la propriété *mais dans le sens contraire*.

➤ Remarque :

Quand une propriété et sa réciproque sont vraies en même temps, on dit que cette propriété est **caractéristique** : ici, seul l'objet médiatrice et lui seul a tous ses points équidistants de 2 points fixes.

➤ Application directe : **Construction à la règle et au compas du centre d'un cercle.**

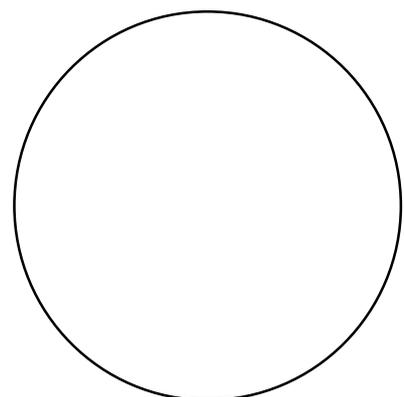
Placer de façon quelconque 3 points *distincts* A, B et C sur ce cercle.

Puis construire grâce aux médiatrices le centre O de ce cercle.

Double codages des médiatrices !

Combien de médiatrices suffit-il de tracer pour obtenir le centre ?

.....



C. Concourance des trois médiatrices d'un triangle : cercle circonscrit.

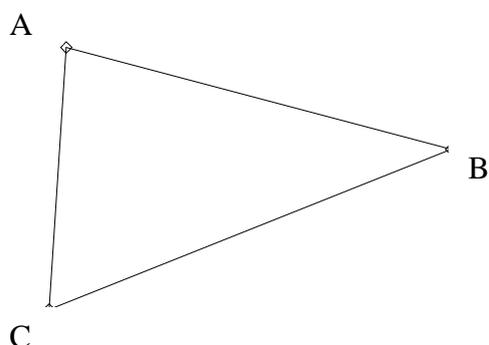
Théorème : Concourance des 3 médiatrices d'un triangle.

- ❶ Les 3 médiatrices d'un triangle ABC se en un point O.
On dit que les 3 médiatrices sont **concourantes** en le point O.
- ❷ Ce point O est le centre du à ce triangle ABC.
- ❸ Ce centre O est donc équi..... des 3 sommets A, B et C du triangle.
Autrement dit : $OA = \dots = \dots$

➤ Figures :

❶ Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

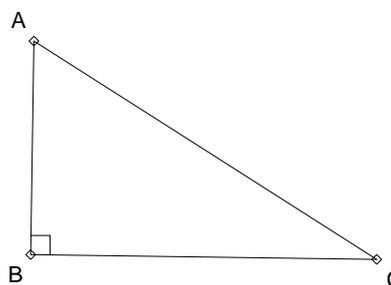
Il suffit de tracer médiatrices !



Double codages !

❷ **Cas particulier du triangle rectangle :**

Construire le cercle circonscrit au triangle rectangle ABC.



Double codages !

Où semble se trouver le centre du cercle circonscrit à ce triangle rectangle ?

➤ Preuve de la concourance des 3 médiatrices d'un triangle:

❶ *Mise en place (voir figure du ❷ ci dessus) :*

Puisque ABC est un triangle, les 2 médiatrices des côtés [AB] et [BC] ne peuvent pas être parallèles, donc elles se coupent en un point qu'on va appeler O.

❷ *Montrons que O est aussi équidistant de A et C :*

Puisque $O \in \text{med}[AB]$ alors $OA = \dots$ Puisque $O \in \text{med}[BC]$ alors $\dots = \dots$	}	Donc $\dots = \dots = \dots$ (*)
---	---	----------------------------------

❸ *Concluons :*

Puisque $\dots = \dots$ alors $O \in \text{med}[AC]$. Donc O est bien sur la troisième médiatrice.

D'après l'égalité (*), O est équidistant de A, B et C, donc O est le centre du passant par A, B et C.

Ce cercle s'appelle le cercle au triangle ABC. CQFD

Une grande partie du programme de géométrie de 4^{ème} est réservée à l'étude du triangle rectangle :

- triangle rectangle et son cercle circonscrit (Théorème TRCC – contrat 2).
- triangle rectangle et longueurs (Théorème de Pythagore – contrat 2).
- triangle rectangle et angles (Cosinus – contrat 7).

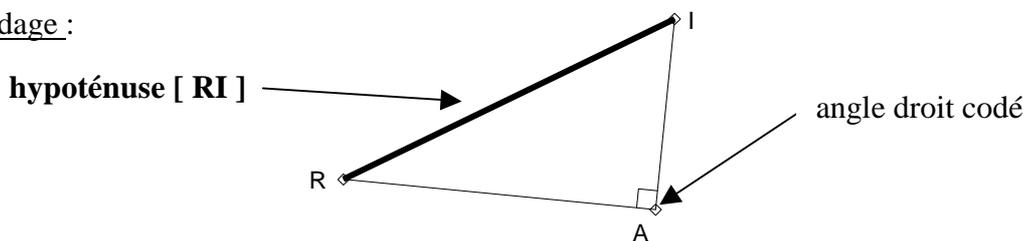
II. LE TRIANGLE RECTANGLE : RAPPELS.

Avant tout, un peu de vocabulaire :

❶ Définition : Le plus grand côté d'un triangle *rectangle* s'appelle *l'hypoténuse* (avec **un seul h** car il n'y a qu'**un seul** plus grand côté !). C'est le côté opposé à l'angle droit.

❷ Notation : **L'hypoténuse est un côté donc UN SEGMENT NOTE ENTRE CROCHETS !**

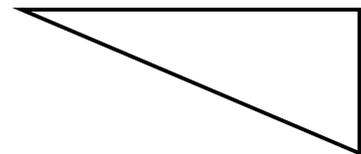
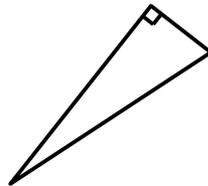
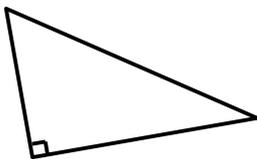
❸ Figure et codage :



Attention : On n'a le droit d'utiliser le mot hypoténuse pour un triangle que si l'on est déjà absolument sûr que ce triangle est rectangle !

➤ Exercices :

❶ Pour les triangles suivants, repasser **en rouge, si elle existe, l'hypoténuse**.



On remarque que, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse se trouve de l'angle droit.

❷ Pour chacun des 4 triangles suivants, nommez l'hypoténuse, *si elle existe* :

ABC rectangle en C : hypoténuse ? [.....]

MEN tel que $\widehat{MEN} = 90^\circ$: hypoténuse ? [.....]

NUF tel que $\widehat{FUN} = \widehat{FNU} = 45^\circ$: hypoténuse ?

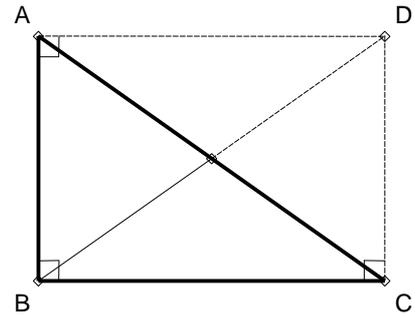
TOP tel que $\widehat{POT} = 27^\circ$ et $\widehat{TPO} = 62^\circ$: hypoténuse ?

III. TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT (TRCC).

Nous avons vu figure ② p.4 que le centre du cercle circonscrit à un triangle *rectangle* semble être le milieu de son hypoténuse. Est-ce un pur hasard ? Evidemment que non !

A. Activité 2 p.170 (Diabolo Maths 4^{ème} 2006) :

Soit un rectangle ABCD et O son centre. Placez O.



① Puisque ABCD est un,

alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{ABC triangle rectangle en} \\ \text{et} \\ \text{O milieu de son hypoténuse [.....]} \end{array} \right.$

② Puisque ABCD est un rectangle, on montre facilement que $OA = OB = OC (= OD \text{ accessoirement})$.

Autrement dit, O est équi..... des points A, B et C.

③ Donc A, B et C sont sur un même cercle : le cercle de centre

D'après ①, le centre O de ce cercle est aussi le milieu de l'hypoténuse [AC] du triangle rectangle ABC.

D'après ①, L'hypoténuse [.....] est aussi un de ce cercle.

Tracez ce cercle sur la figure.

On vient de prouver le théorème suivant :

B. Théorème TRCC direct :

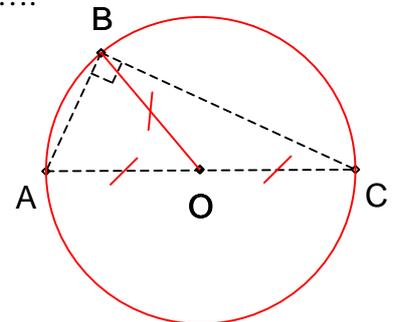
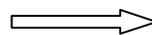
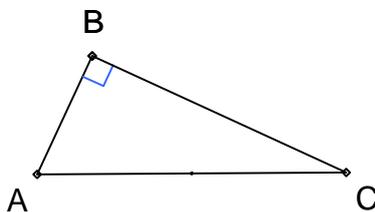
Théorème Triangle Rectangle et Cercle Circonscrit direct (TRCC direct) :

	(..... donnée ou hypothèse)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle en B	alors	$B \in \mathcal{C}_{[AC]}$ (c-à-d B est sur le cercle \mathcal{C} de diamètre [AC])

Autrement dit : *Lorsqu'un triangle est rectangle, alors son cercle circonscrit est le cercle de diamètre son hypoténuse.*

Utilité : Ce théorème sert à prouver qu'un point est sur un

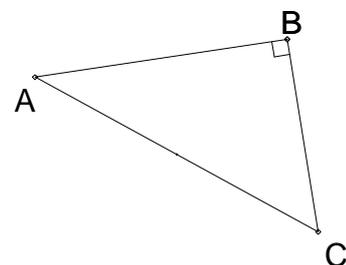
Figure :



➤ Exercices TRCC direct :

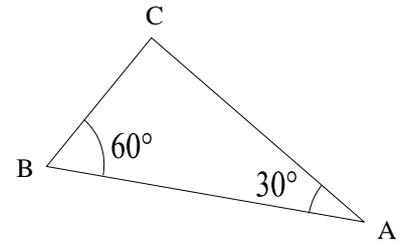
① Quelle est l'hypoténuse de ce triangle ABC rectangle en ?

Sans tracer aucune médiatrice, *construire le cercle circonscrit à ce triangle rectangle. Ne pas oublier le codage !*

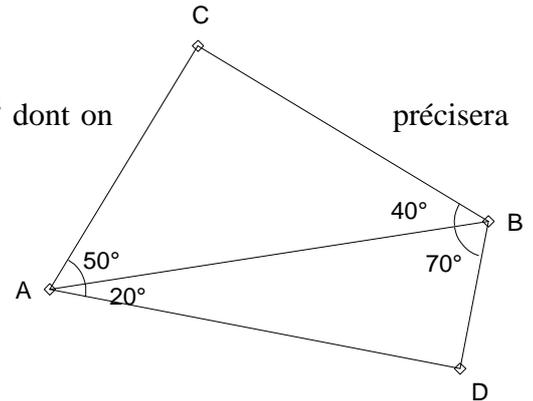


Les exercices de raisonnement utilisant le théorème TRCC version directe jouent tous sur la même difficulté : être sûr que le triangle soit bien rectangle avant d'appliquer **RIGOREUSEMENT, A LA VIRGULE PRES**, ce théorème TRCC version directe.

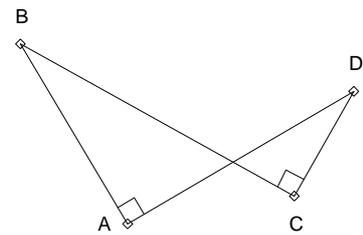
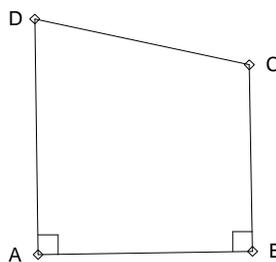
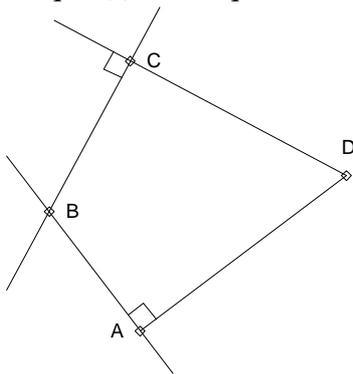
- ② Sur la figure suivante, placer O le milieu de [AB] (*codage !*).
 Montrer que le cercle de centre O et de rayon OB passe par C.



- ③ Prouver que les 4 points A, B, C et D sont sur un même cercle² dont on précisera le centre et le rayon.



- ④ Dans quel(s) cas le quadrilatère ABCD est-il inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{[BD]}$ de diamètre [BD] ? Justifiez.



² On dit alors que les 4 points sont « **cocycliques** » et que ABCD est inscrit dans le cercle (tous ses sommets sont sur le cercle).

C. Trois conséquences importantes du Théorème TRCC direct :

❶ Lorsqu'un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le de son hypoténuse.

❷ Lorsqu'un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est équi..... des 3 sommets du triangle rectangle. C-à-d, avec la figure du théorème : $OA = \dots = \dots = \frac{\dots}{2}$

La dernière égalité dit la chose suivante : « Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane issue de l'angle droit est la moitié de la longueur de l'hypoténuse. »

❸ Un triangle inscrit dans un cercle mais dont *aucun des côtés* n'est un diamètre de ce cercle, *ne peut pas être un triangle rectangle*.

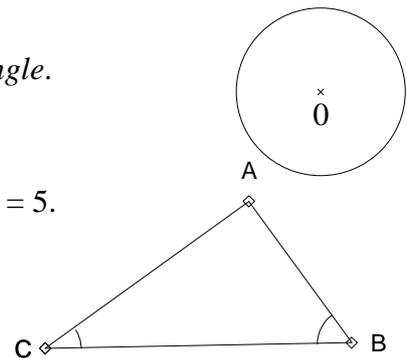
➤ Exercices :

❶ Tracer un triangle ABC inscrit dans ce cercle et qui ne soit *pas rectangle*.

❷ Sur le triangle ci contre, on sait que : $\widehat{ACB} = 35^\circ$ $\widehat{ABC} = 55^\circ$ et $BC = 5$.

1. Quelle est la nature de ce triangle ? Justifiez !

2. Calculez le rayon puis la surface de son cercle circonscrit.



❸ En reprenant la figure de l'exercice ❸ p.7, placer O le milieu de [AB]. Montrer que $OC = OD$.

➤ Analyse : On voit encore dans tous ces exercices que la difficulté n'est pas d'appliquer le théorème direct mais d'être certain que l'hypothèse « triangle rectangle » est bien vérifiée : le plus souvent, cette condition est « cachée » dans l'énoncé et il faut la prouver auparavant.

Par exemple, on ne vous livrera pas directement un triangle rectangle tout cuit sur un plateau, mais on vous servira à la place 2 droites perpendiculaires (ce qui indirectement donne un triangle rectangle !).

Inversement, qu'en est-il d'un triangle inscrit dans un cercle et dont un des côté est un diamètre de ce cercle ? Est-il rectangle ? Aargh, le suspense est à son comble.

Il faut pour cela étudier le problème réciproque. C'est justement ce qu'on va faire dans ce qui suit.

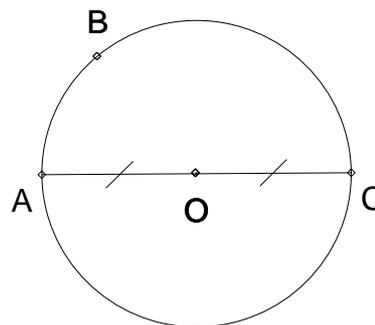
IV. THEOREME TRCC RECIPROQUE (INDIRECT).

A. Activité 3 p.170 (Diabolo Maths 4^{ème} 2006) :

➤ Décor : Soit $\mathcal{C}_{[AC]}$, un cercle de diamètre $[AC]$ et B un point sur $\mathcal{C}_{[AC]}$, distinct de A et de C (voir figure ci dessous). Quelle semble être la nature de ABC ?

figure ci dessous). Quelle semble être la nature de ABC ?

➤ L'idée est la suivante : Plutôt que de montrer directement qu'ABC est rectangle en C, on va prouver que ABC est « la moitié » d'un rectangle. Et le tour sera joué !



① Soit D le symétrique de B par rapport à O (le placer).

Puisque D de B par rapport à O,

alors O est le de [.....].

Donc [.....] est aussi un diamètre du cercle.

② Prouvons que ABCD est un

Puisque $\left\{ \begin{array}{l} AC = \dots\dots \\ O \dots\dots \text{ commun de } [\dots\dots] \text{ et } [\dots\dots] \end{array} \right\}$ alors ABCD est un

Rappel : un quadrilatère ayant ses deux diagonales se coupant en leur milieu et de même longueur est un

③ Puisque ABCD est un alors $(AB) \perp (\dots\dots)$.

Donc ABC triangle en

CQFD.

On vient de prouver le théorème réciproque suivant :

B. Théorème TRCC réciproque :

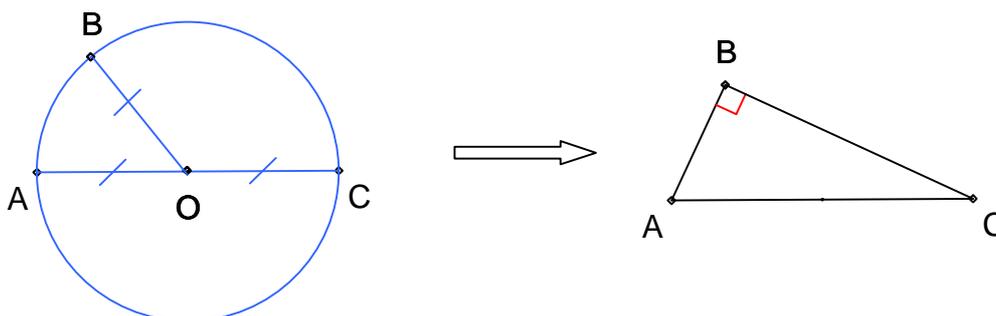
Réciproque de TRCC :

	(..... données ou hypothèses)		(..... résultat ou conclusion)
Quand	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} B \in \mathcal{C}_{[AC]} \\ \textcircled{2} B \text{ distinct de A et de C} \end{array} \right.$	alors	ABC est un triangle en B

Autrement dit : Lorsqu'un triangle est inscrit dans un cercle avec un de ses 3 côtés comme diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

Utilité : Ce théorème sert à prouver qu'un triangle est

Figure :

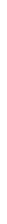
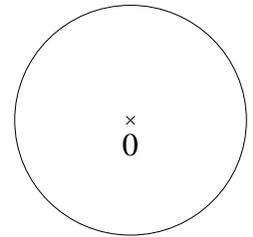


➤ Exercices TRCC réciproque :

① Placer un point P sur le cercle. Placer I, le symétrique de P par rapport à O.

Placer un troisième point F sur le cercle, distinct de P et I.

Montrer que $(FP) \perp (FI)$.



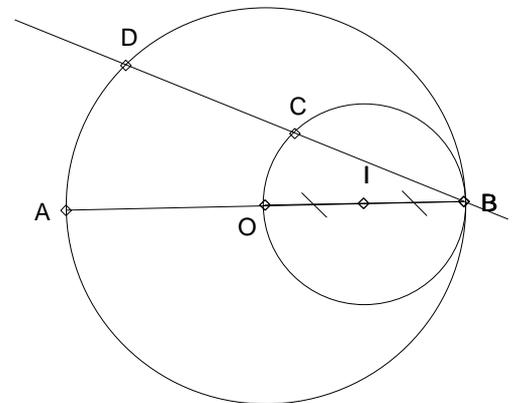
Analyse : Encore une fois, la difficulté n'est pas d'appliquer le théorème réciproque mais d'être certain que les 2 hypothèses « diamètre + 3^{ème} point sur le cercle » sont bien vérifiées.

Dans l'exercice précédent, la condition « diamètre » était « cachée » dans l'énoncé : ce diamètre provenait en fait de la construction du symétrique I par rapport à O, ce qu'il ne fallait pas oublier de justifier !

② Sur cette figure, on a : O milieu de [AB] et I milieu de [OB].

C est sur le « petit » cercle. La droite (CB) recoupe le « grand » cercle en D.

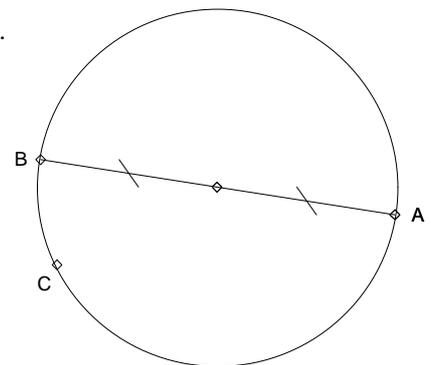
Montrer que $(AD) \perp (OC)$.



③ Sur la figure, C est sur le cercle. Construire D, le symétrique de B par rapport à C.

1. Prouver que $(AC) \perp (BD)$.

2. Prouver que $AB = AD$.

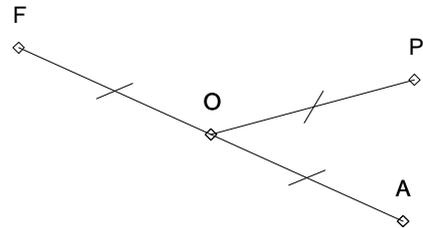


C. Deux conséquences importantes du Théorème TRCC réciproque :

- ❶ Lorsque le milieu d'un côté d'un triangle est équi..... de ses 3 sommets, alors ce triangle est
- ❷ Lorsque le centre du cercle cir..... à un triangle est en même temps le milieu d'un côté, alors ce triangle est

➤ Exercices :

- ① Sur la figure codée suivante, on sait que A, O et F sont alignés.
Montrer que PAF est un triangle rectangle.



© N°17-39-54 p.177 à 181 ; N°64 et 67 p.183 à faire sur le cahier d'exercices.

D. Remarque finale :

Puisque la propriété du triangle rectangle avec son cercle circonscrit (à savoir que son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit) et sa réciproque sont toutes les deux vraies, alors cette propriété est **caractéristique** des triangles rectangles : elle est vraie pour eux et pour eux seulement !

Nous allons voir dans le cours qui suit une autre propriété (sur les longueurs cette fois) qui va encore caractériser les triangles rectangles : le célèbre Théorème de Pythagore.

V. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

- Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Médiatrice : construction, propriété métrique caractéristique.			
Cercle circonscrit : définition et construction.			
Théorème version directe.			
Conséquences théorème version directe.			
Théorème version réciproque.			
Conséquences théorème version réciproque.			
La différence entre hypothèses et conclusions.			
Rédiger une preuve claire et structurée.			
Aimer TRCC.			

- **Pour préparer le test et le contrôle : Livre (Diabolo Maths 4^{ème} Hachette 2006) p.178 et 184.**

B. Conseils :

- Ne pas oublier : La symétrie axiale induit la médiatrice donc milieu + angle droit (double codage !).
La symétrie centrale induit le milieu (codage !).
- Dès que vous voyez « cercle + triangle » : penser à TRCC (direct ou réciproque).
- Bien apprendre les conséquences de TRCC direct et TRCC réciproque.
- Au risque de me répéter, je rappelle que la principale difficulté n'est pas d'appliquer un théorème, mais de bien vérifier que les hypothèses sont bien réalisées :
- soit elles sont livrées directement dans l'énoncé : cas le plus heureux ! Ne rêvons pas, c'est assez rare.
 - soit elles sont codées sur la figure de l'énoncé : cas un peu moins direct que le précédent.
 - soit elles ont été prouvées dans des questions précédentes : il faut toujours bien regarder l'enchaînement des questions.
 - enfin *le cas le plus général* où les hypothèses ne sont ni dans l'énoncé, ni codées sur la figure, ni prouvées dans des questions précédentes. Dans ce cas, il faut retrousser ses manches et prouver au préalable chaque hypothèse dont on a besoin.
- Appliquez RIGOREUSEMENT les théorèmes, sans dévier d'un signe !
- Soyez à peu près sûr à 99,9% qu'un théorème appliqué de manière plus ou moins « libre », devient faux !
- Ecrivez les hypothèses en colonnes, avec une accolade quand il y en a plusieurs, pour tout de suite voir le nombre d'hypothèses.
- Précision : triangle rectangle où ?
- Attention aux notations (droites, segments, cercles etc.).
- Figures : codez bien les données de l'énoncé seulement ; utilisez de la couleur.

C. Erreurs fréquentes :

- TRCC direct : Oublier de vérifier que le triangle est rectangle.
- TRCC réciproque :
 - Il faut que 2 points forment **un diamètre** du cercle circonscrit.
 - Oublier de vérifier et dire que le 3^{ème} point est **distinct** des 2 autres qui forment le diamètre.
- Sur les théorèmes en général :
 - Non sus ou mal appliqués : hypothèses manquantes ou non prouvées auparavant.
 - Beaucoup confondent appliquer et réciter : plutôt que blablater ou (mal) réciter, appliquez RIGOREUSEMENT, au mot près, les théorèmes en appliquant les méthodes vues en cours.
 - On n'utilise pas les mots « si » « quand » « lorsque » quand on commence une preuve : **une preuve est une affirmation et non une supposition !**
Donc preuve en « puisque » ou « comme ».
 - Les preuves en « car » sont interdites : on ne répond jamais en premier à une question, on justifie d'abord ! Donc preuve en « puisque » ou « comme ».

D. Fiche de révision à faire :

E. Programme de travail durant mon absence :

Date	A faire en classe	Travail pour la séance suivante
	Faire p.2 à 4.	Terminer jusqu'à p.6 incluse.
	Corriger p.5 et 6 sauf l'activité. Faire p.7.	Terminer jusqu'à p.7 incluse.
	Corriger p.7. Faire p.8.	Terminer jusqu'à p.9 incluse.

Quelle est la seconde partie de ce contrat double ?