LA TRANSLATION : CORRIGE

« Les Maths sont comme l'Amour :

une idée simple mais qui peut parfois se compliquer. »

➢ *<u>Pré requis pour prendre un bon départ :</u>*

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Parallélogramme : définition et propriétés.			
Parallélogramme : constructions.			
Symétrie axiale.			
Symétrie centrale.			

➢ *<u>Les transformations vues au Collège.</u>*

*En 6ème, nous avons vu **« l'effet miroir »** c-à-d la symétrie axiale.*

*En 5ème, nous avons vu **« le demi tour autour d'un point fixe »** c-à-d la symétrie centrale.*

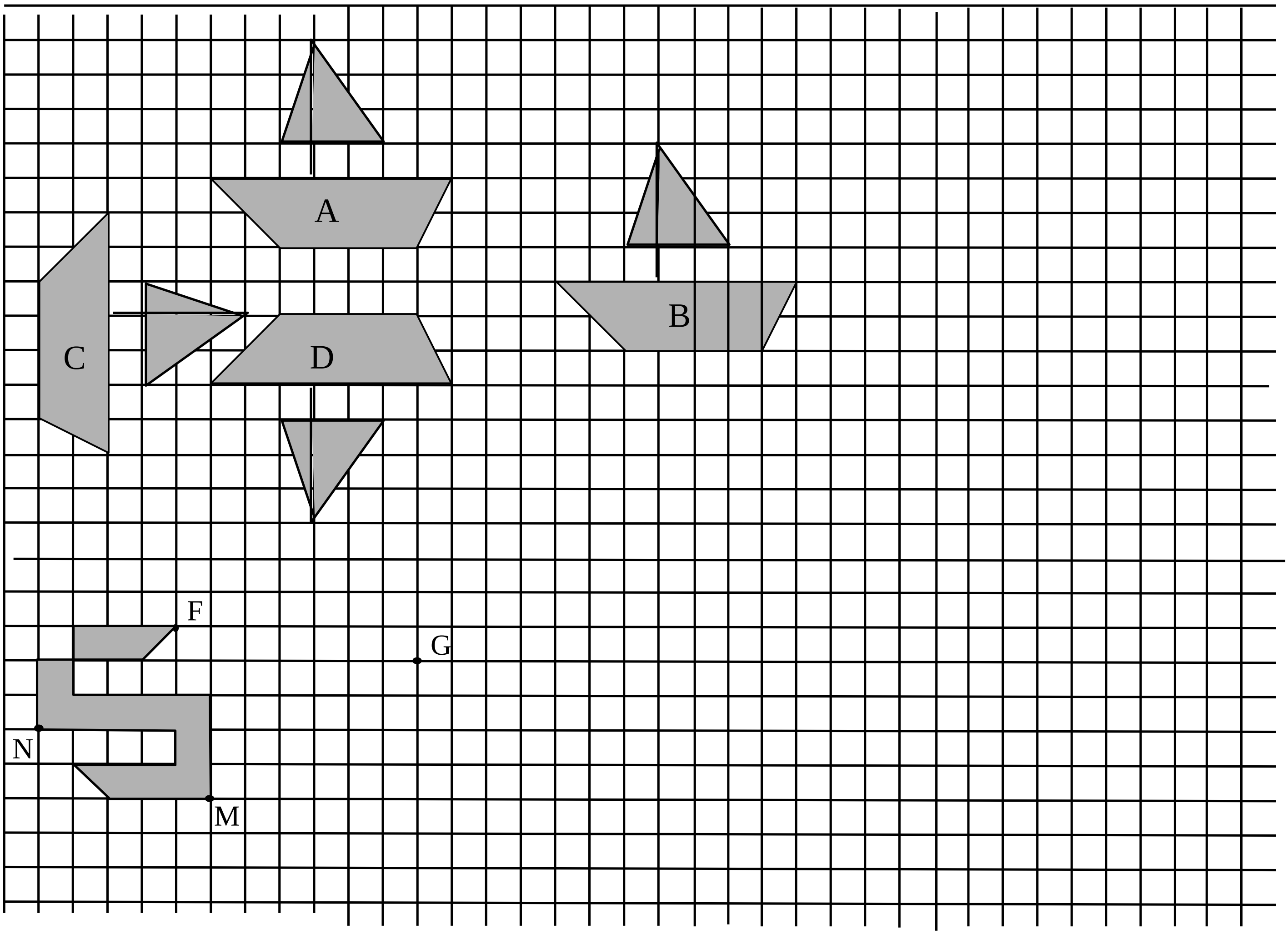
*En 4ème, nous allons voir **« le glissement »** c-à-d la translation.*

*En 3ème, nous verrons **« tourner autour d'un point fixe »** c-à-d la **Rotation.***

« Corrigé en rouge et italique »

Nom et Prénom : ………………………………………. 4ème ……

I. DECOUVERTE :



Observe bien les quatre bateaux A, B, C, D.

Quel bateau a été obtenu en faisant **glisser** le bateau A ? *Le bateau B !*

Symbolise par une flèche bleue le mouvement exact qu'a fait le bateau A (en reliant par exemple les sommets des deux mats). Trace de même par une flèche rouge le mouvement qu'a fait l'arrière (à droite) du bateau A. Cette flèche rouge relie-t-elle les arrières des deux bateaux A et B ? Bien sûr que *oui !*

- Ces deux flèches sont-elles « les mêmes » (même longueur, même direction, même sens) ? Oui !

Ces 2 flèches étant « les mêmes », on dit qu'elles représentent le même « **mouvement rectiligne ».**

On dit que la bateau B est l'**image** de A par la **translation** de mouvement l'une des 2 flèches tracées.

Trouve un synonyme pour le mot translation : *Glissement.*

- Trace par une flèche verte le mouvement rectiligne qui va de F vers G (qu'on notera $\overrightarrow{\mathbf{FG}}$).

Trace l'image de la figure qui ressemble à un S par **la translation qui transforme F en G.**

Place le point M' image de M par la translation qui transforme F en G.

Trace FGM'M en rouge. Quelle semble être la nature de FGM'M ? *Un parallélogramme !*

Place le point N' image de N par la translation qui transforme F en G.

Trace FGN'N en rouge. Quelle semble être la nature de FGN'N ? *Un parallélogramme !*

II. LA TRANSLATION : INTRODUCTION.

A. Sens commun de la translation :

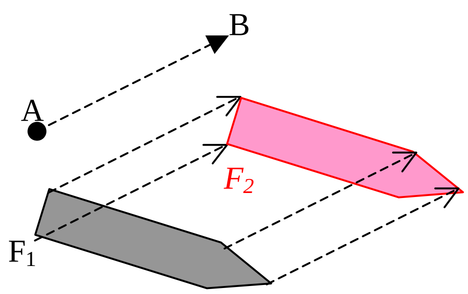
L'activité précédente p.2 nous permet d'affirmer :

La **Translation**, c'est ce qui se passe quand **il y a glissement**.

Plus précisément :

Une figure est la translatée d'une autre figure lorsque ces deux figures *se superposent* parfaitement après *glissement selon un mouvement rectiligne donné.*

B. Vocabulaire et notations :



La flèche F_1, en la faisant glisser selon le mouvement rectiligne qui va de A vers B, se superpose exactement à la flèche F_2.

La flèche F_2 est donc la translatée de la flèche F_1 selon le mouvement rectiligne qui va de A vers B.

En reprenant l'exemple de cette situation, introduisons le vocabulaire et les notations :

❶ Soient deux points A et B, on note $\overrightarrow{AB}$ **le mouvement[1] rectiligne qui va de A vers B**.

❷ On parle alors de **translation selon le mouvement $\overrightarrow{AB}$** . On la note $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Remarque : Par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ en quoi est transformé A ? En B !

*C'est pourquoi on parle aussi de **la translation qui transforme A en B** au lieu de la translation de mouvement $\overrightarrow{AB}$.*

❸ On dit que : F_2 est l'**image** de F_1 par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

ou bien que F_2 est le **translaté** de F_1 par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Cela se note : $t_{\overrightarrow{AB}}(F_1) = F_2$ ou $F_1 \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AB}}} F_2$

➢ Trois exercices :

① Comment note-t-on :

- Le mouvement rectiligne qui va de J vers E ? $\overrightarrow{JE}$ Le mouvement qui va de E vers J ? $\overrightarrow{EJ}$
- La translation de mouvement $\overrightarrow{TU}$? $t_{\overrightarrow{TU}}$ La translation qui transforme I en L ? $t_{\overrightarrow{IL}}$

La translation où I est le transformé de L ? $t_{\overrightarrow{LI}}$ La translation où E est le translaté de L ? $t_{\overrightarrow{LE}}$

La translation où O a pour image A ? $t_{\overrightarrow{OA}}$ La translation où l'image de O est A ? $t_{\overrightarrow{OA}}$

[1] Un mot plus savant pour « mouvement » : **VECTEUR**. Cela sera vu en 3ème.

② Traduire :

$t_{\overrightarrow{CD}}(M) = M'$ ⟹ *M' est l'image de M par la translation qui transforme C en D.*

$P \xrightarrow{t_{\overrightarrow{AB}}} K$ ⟹ *K est le translaté de P par la translation de mouvement $\overrightarrow{AB}$*

L est l'image de P par la translation qui transforme L en K ⟹ $t_{\overrightarrow{LK}}(P) = L$

P est le translaté de N par le glissement qui va de N en M ⟹ $t_{\overrightarrow{NM}}(N) = P$

③ Soit la translation $t_{\overrightarrow{OK}}$. En quoi est transformé O ? *En K !* Soit $t_{\overrightarrow{KO}}$, quelle est l'image de K ? *O !*

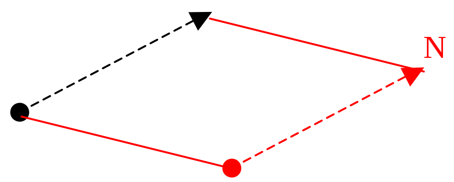
Soit une translation qui transforme L en M : elle s'écrit : $t_{\overrightarrow{LM}}$

Soit une translation telle que N est l'image de P : elle peut s'écrire : $t_{\overrightarrow{PN}}$

III. TRANSLATIONS ET PARALLELOGRAMMES.

On veut savoir comment « glisse » un point M selon un vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné. 2cas se présentent :

- Cas ❶ : **Soit M est en dehors de la droite (AB) :**



B

Construisez en rouge N, l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Que semble être la nature du quadrilatère ABNM ?

A

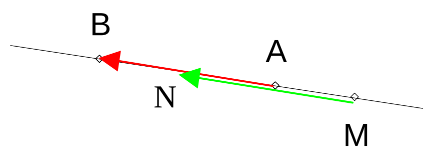
ABNM semble être un parallélogramme.

M

Comparez les mouvements $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

- Cas ❷ : **Soit M est sur la droite (AB) :**

Tracer $\overrightarrow{AB}$ en rouge (attention au sens !)



Construisez en vert N l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Où se trouve N ? *Sur la droite (AB).*

Comparez les longueurs AB et MN. *AB = MN*

Les demi droites[AB) et [MN) sont elles dans le même sens ? *Oui !*

Comparez les mouvements $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

- On va maintenant définir « proprement » (mathématiquement) ce qu'est une translation !

Soient deux points A et B (donc on a indirectement le mouvement rectiligne $\overrightarrow{AB}$!) :

« Définir la translation qui transforme A en B ($t_{\overrightarrow{AB}}$), c'est être capable de donner (construire) sans ambiguïté l'image de n'importe quel point M du plan par cette translation. »

D'où la définition de la page suivante :

A. Image d'un point par une translation :

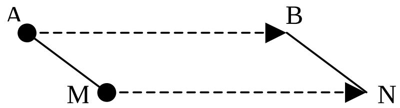
1. Définition :

*Soient **deux points donnés A et B**, et soit M un troisième point quelconque :*

La **translation qui transforme A en B** (la translation de mouvement rectiligne $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$), notée $\mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{AB}}}$, est définie de la manière suivante :

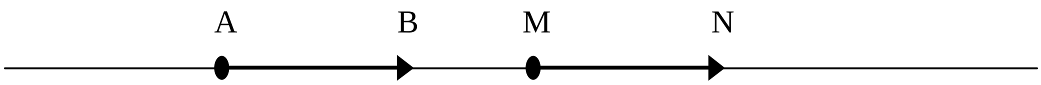
❶ *Quand M n'appartient pas (AB)* alors l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est le point N tel que :

- ABNM[2] est un parallélogramme.



❷ *Quand M appartient à (AB)* alors l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est le point N sur (AB) tel que :

- AB = MN
- Et les demi-droites [AB) et [MN) ont le même sens.



2. Sens de cette définition :

❶ Cette définition, dans les deux cas, indique comment il faut construire l'image d'un point quelconque (en dehors ou sur la droite « portant le mouvement ») par une translation.

❷ Elle montre le **lien profond** qui unit translation et parallélogramme.

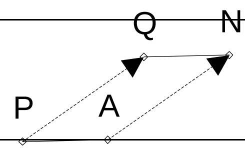
❸ Elle donne le passage : **Translations → Parallélogramme.**

❹ Dans les deux cas **:** Le mouvement rectiligne $\overrightarrow{MN}$ est le même que le mouvement rectiligne $\overrightarrow{AB}$.

c-à-d $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

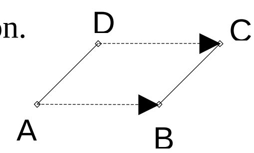
3. Passage Translation → Parallélogramme : méthode.

Méthode : puisque $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{P \notin (AN)} \\ \mathbf{t_{\overrightarrow{AN}}(P) = Q} \end{array}\right\}$ **alors PQNA est un parallélogramme.**

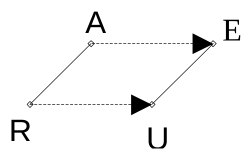


A vous maintenant ! Conseil : faites d'abord *un croquis* pour visualiser la situation.

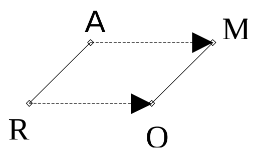
- Puisque $\left\{\begin{array}{l} D \notin (AB) \\ t_{\overrightarrow{AB}}(D) = C \end{array}\right\}$ alors *ABCD est un parallélogramme.*



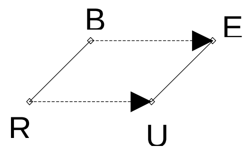
- Puisque $\left\{\begin{array}{l} L \notin (UR) \\ t_{\overrightarrow{RU}}(L) = E \end{array}\right\}$ alors *LEUR est un parallélogramme.*



- Puisque $\left\{\begin{array}{l} A \notin (MO) \\ t_{\overrightarrow{RO}}(A) = M \end{array}\right\}$ alors AMOR est un parallélogramme.



[2] Attention à l'ordre des lettres !



➢ Puisque $\left\{\begin{array}{l} B \notin (RU) \\ t_{\overrightarrow{RU}}(B) = E \end{array}\right\}$ alors BEUR est un parallélogramme.

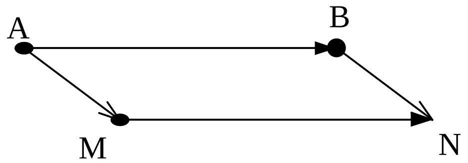
B. Conséquence très importante de la définition :

La « réciproque » du cas ❶ est aussi vraie et très importante :

Règle : **passage Parallélogramme ⟶ Translation**

	(1 condition ou hypothèse)		(2 résultats ou conclusions)
Quand	ABNM est un parallélogramme	alors	① N est l'image de M par $t_{\overrightarrow{AB}}$ ② N est l'image de B par $t_{\overrightarrow{AM}}$

Figure :

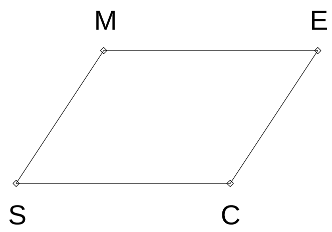


Utilité : Cette conséquence sert de relation de passage : Parallélogramme ⟶ *Translation.*

1. Passage Parallélogramme ⟶ Translation : méthode.

• Soit SMEC le parallélogramme ci contre.

Complétez :



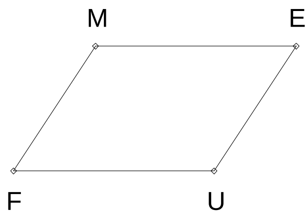
➢ Puisque SMEC est un *parallélogramme* alors S est l'image de M par $t_{\overrightarrow{MS}}$

➢ Puisque *MECS* est un parallélogramme alors M est *l'image* de E par $t_{\overrightarrow{SC}}$

➢ Puisque *MECS* est un *parallélogramme* alors $t_{\overrightarrow{CS}}(E) = M$.

• Soit EUFM le parallélogramme ci contre

Complétez :



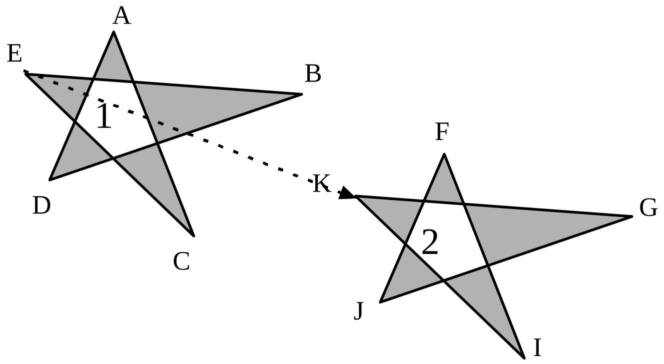
➢ Puisque *MEUF est un parallélogramme* alors $t_{\overrightarrow{FM}}(F) = M$.

➢ Puisque *MEUF est un parallélogramme* alors *U est l'image* de F par $t_{\overrightarrow{ME}}$.

➢ Puisque *MEUF est un parallélogramme* alors $t_{\overrightarrow{FU}}(M) = E$

Puisque *MEUF est un parallélogramme* alors $E \xrightarrow{t_{\overrightarrow{EU}}} U$

Exercice 1:



L'image ci-contre te montre deux étoiles.

L'étoile 2 est l'image de l'étoile 1 par la translation qui transforme E en K.

L'image de A est *F* et *AFKE* est un parallélogramme.

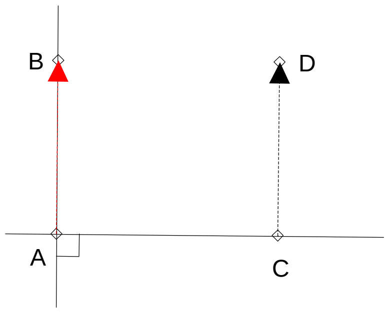
L'image de B est *G* et *BGKE* est un parallélogramme.

L'image de C est *I* et *CIKE* est un parallélogramme.

Exercice 2:

Sur la figure codée ci contre, construire D, l'image de C par $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Quelle est la nature de ABDC ? (justifiez !)



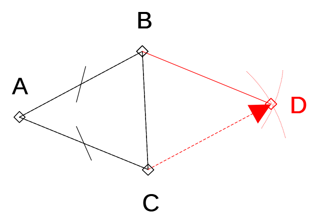
On trace d'abord $\overrightarrow{AB}$ puis on construit D tel que ABDC est un parallélogramme.

Puisque D image de C par $t_{\overrightarrow{AB}}$, alors ABDC parallélogramme.

Puisque ABDC parallélogramme avec un angle droit en A, alors ABDC est un rectangle.

Exercice 3 :

Sur la figure ci contre, ABC est isocèle en A. Construire D le translaté de C par $t_{\overrightarrow{AB}}$.



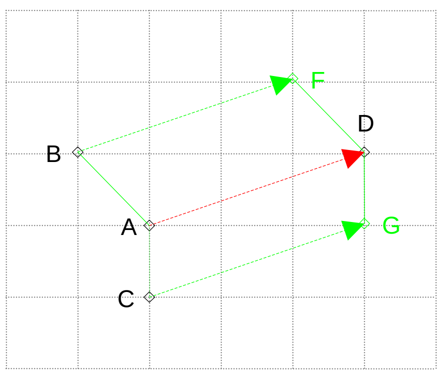
On trace d'abord $\overrightarrow{AB}$ puis on construit D tel que ABDC est un parallélogramme.

Puisque D image de C par $t_{\overrightarrow{AB}}$, alors ABDC parallélogramme.

Puisque $\begin{cases} \text{ABDC parallélogramme} \\ AB = AC \end{cases}$, *alors ABDC est un losange.*

Exercice 4 :

Sans utiliser de compas, placer en vert E, F et G les images respectives de A, B et C par $t_{\overrightarrow{AD}}$.



Montrer que BFGC est un parallélogramme.

Puisque B a pour image F par $t_{\overrightarrow{AD}}$, alors ABFD est un parallélogramme donc [BF] parallèle et de même longueur que [AD].

De même, puisque C a pour image G par $t_{\overrightarrow{AD}}$, alors ACGD est un parallélogramme donc [CG] parallèle et de même longueur que [AD].

Puisque $\begin{cases} \text{[BF] parallèle et même longueur que [AD]} \\ \text{[CG] parallèle et même longueur que [AD]} \end{cases}$ *alors [BF] parallèle et de même longueur que [CG].*

Donc BFGC est un parallélogramme.

- *Autre manière plus rapide :*

Puisque B a pour image F par $t_{\overrightarrow{AD}}$*, alors* $t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{BF}}$.

De même, puisque C a pour image G par $t_{\overrightarrow{AD}}$*, alors* $t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{CG}}$

Donc $t_{\overrightarrow{BF}} = t_{\overrightarrow{CG}}$.

Donc F est l'image de B par $t_{\overrightarrow{CG}}$.

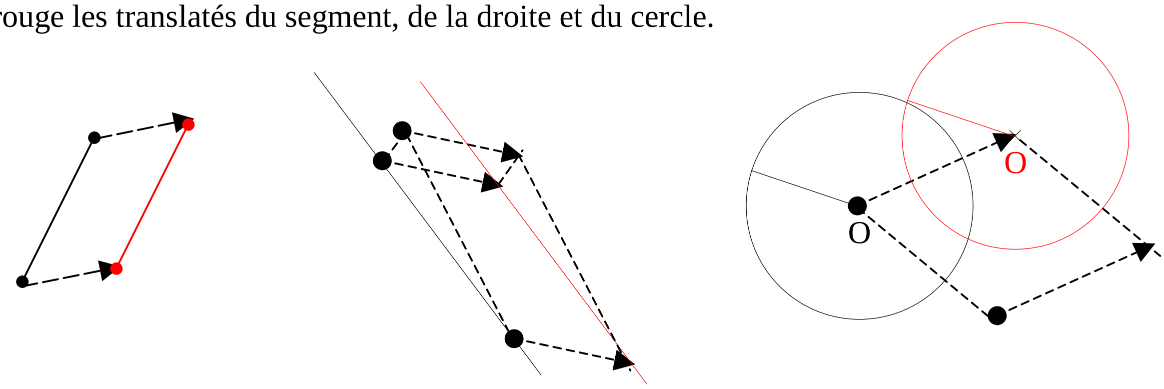
Donc FBGC est un parallélogramme.

Remarque : En fait cette deuxième preuve s'appuie sur cette « propriété » des « mouvements » (ou vecteurs) qui sera vue en 3ème : Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABDC est un parallélogramme.

IV. PROPRIETES DES TRANSLATIONS :

A. Transformation des figures de base par les translations :

Tracez en rouge les translatés du segment, de la droite et du cercle.



➢ Le translaté d'un segment est aussi un *segment :*

① parallèle

② et de même *longueur.*

➢ La translatée d'une droite est aussi une *droite* qui est *parallèle* à la droite précédente.

➢ Le translaté d'un cercle est aussi un *cercle.*

① Son centre est le *translaté* du centre de l'ancien cercle.

② de même *rayon.*

B. Propriétés de conservation :

Les 4 propriétés de conservations qui vont suivre traduisent la non-déformation des objets lors d'un glissement !

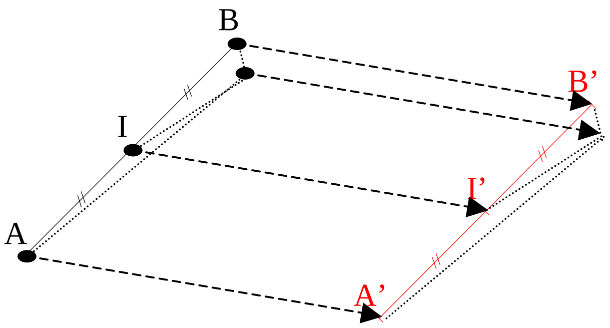
❶ Les translations conservent les **Longueurs donc le milieu :**

① Le translaté d'un segment est un *segment* de même *longueur.*

② En conséquence, les translations conservent aussi le *milieu* :

Le translaté du milieu d'un segment est le *milieu* du segment image.

➢ Figure :Tracer en rouge [A'B'] et I', les translatés du segment [AB] et du milieu I du segment [AB].



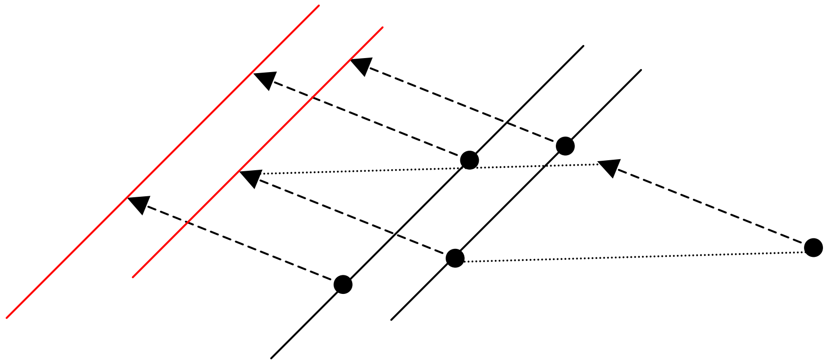
Que remarque-t-on pour I' ? *I' est aussi le milieu de [A'B'].*

Puisque I est le *milieu* de [AB], alors, par conservation du milieu, son *translaté* I' est aussi le *milieu* du segment image [*A'B'*].

❷ Les translations conservent **le Parallélisme :**

Les translatées de deux droites parallèles sont deux *droites* qui sont aussi *parallèles.*

➢ Figure : Tracer en rouge les translatées (d'1) et (d'2) des deux droites parallèles (d1) et (d2).



Vous remarquez que les deux nouvelles droites sont aussi *parallèles* entre elles !

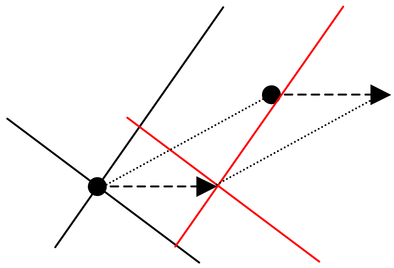
Puisque (d1) // (d2) alors, par conservation du parallélisme, leurs *translatées* (d'1) et (d'2) seront aussi *parallèles*.

❸ Les translations conservent les Angles (donc la Perpendicularité) :

Le translaté d'un angle est un angle de même *mesure.*

➢ Figure : Tracer en rouge les translatés (d'1) et (d'2) des 2 droites perpendiculaires (d1) et (d2).

Vous remarquez que les deux droites images sont aussi *perpendiculaires* entre elles !



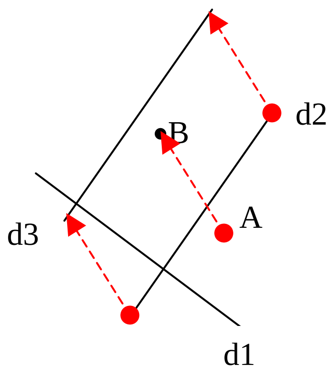
Puisque (d1) ⊥ (d2) alors, par conservation de la mesure d'angles, alors leurs *translatées* (d'1) et (d'2) seront aussi *perpendiculaires.*

➢ Attention ! Il n'est nul part dit qu'une droite et son image sont perpendiculaires, ***ce qui est toujours faux*** ! Regardez (d1) et (d'1) : d'après le cours V A] p.8, elles sont *parallèles* !

➢ Exercice : Sur la figure ci contre, (d1) ⊥ (d2).

Tracer (d3), l'image de (d2) par la translation qui transforme A en B.

Comment sont d1 et d3 ? Justifiez !



Puisque (d3) est l'image de (d2) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ alors (d3) // (d2).

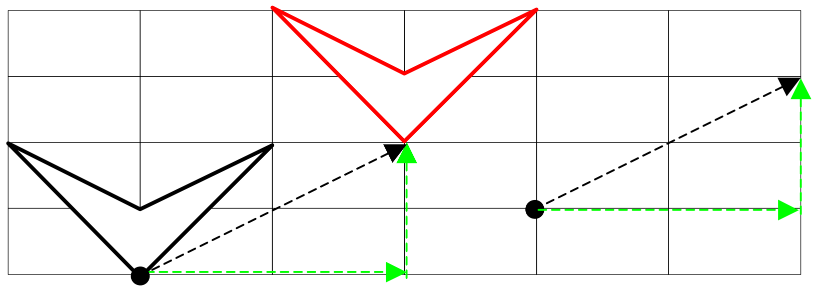
Puisque $\begin{cases} (d3) \mathbin{//} (d2) \\ (d1) \perp (d2) \end{cases}$ *alors (d3) ⊥ (d1).*

❹ Les translations conservent les Aires :

Une figure et sa figure translatée ont même *aire.*

Tracez en rouge la translatée de la figure ci contre.

On décompose le vecteur en un mouvement horizontal (ici 2 à droite) et un mouvement vertical (ici 2 vers le haut). Puis on reproduit ces mouvements à partir de la figure de départ.



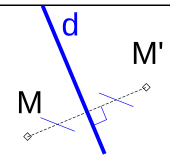
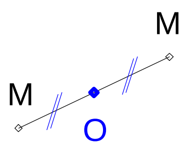
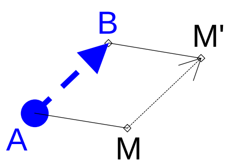
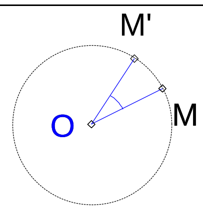
Ont-elles même aire ? *Oui !*

❺ Conséquences des propriétés de conservation :

Puisque les translations conservent les distances, les angles, le parallélisme etc. alors quelle est l'image par une translation :

- d'un triangle isocèle ? *Un triangle isocèle identique et superposable.*
- d'un triangle équilatéral ? *Un triangle équilatéral identique superposable.*
- d'un parallélogramme ? *Un parallélogramme identique et superposable.*
- d'un rectangle ? *Un rectangle identique et superposable.*
- d'un carré ? *Un carré identique et superposables.*

V. TABLEAU RECAPITULATIF DES TRANSFORMATIONS.

Transformations	« Sens commun »	Elément(s) caractéristique(s)	Objet(s) géométrique(s) associé(s)	Figure	
Symétrie axiale vue en *6ème*	« Effet *miroir* ou Réflexion »	Axe de symétrie	*Médiatrice*		
Symétrie centrale vue en 5ème	« Demi *Tour* »	*Centre de symétrie*	*Milieu*		
Translation vue en 4ème	*« Glissement »*	*Vecteur ou « mouvement »*	*Parallélogramme*		
Rotation vue en 3ème	« Tourner autour d'un point fixe »	{Centre de rotation Angle orienté	Angle géométrique et Cercle		

VI. EXERCICES.

A. Construction de figures par translation :

Méthode de construction :

Pour construire la figure image **(en couleur !)** on doit :

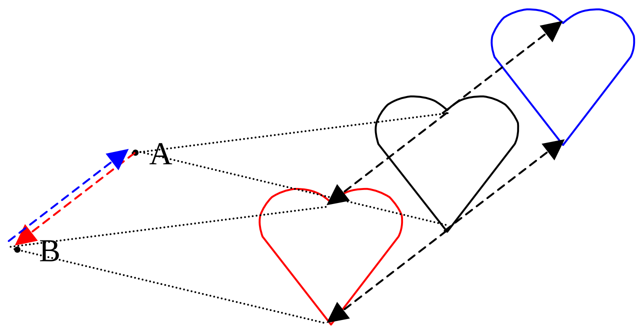
❶ Repérer le « mouvement » et le dessiner (attention au sens) si ce n'est déjà fait puis :

❷ On construit l'image **point par point**[3] :

- Soit à la règle et au compas par parallélogramme quand il n'y a pas de quadrillage.
- Soit par déplacements horizontaux et verticaux sur le quadrillage quand il y en a un.

- **Exercice 1 :**

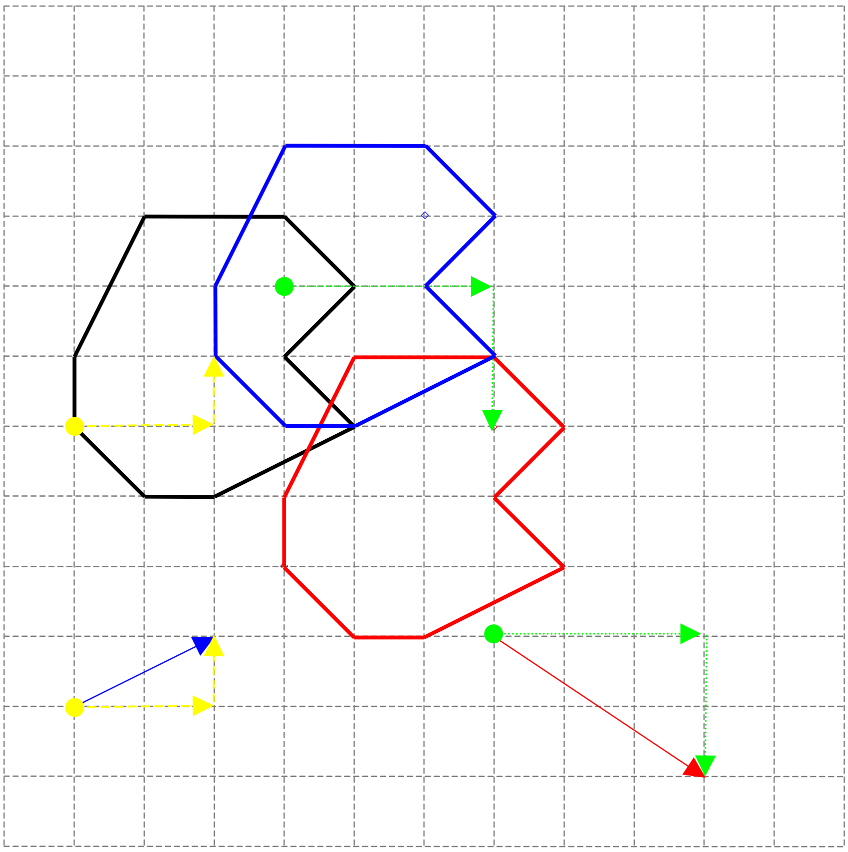
Construire les images du cœur par la translation qui transforme A en B et par celle qui transforme B en A.



- **Exercice 2 :**

Construire les deux images du Pacman suivant par les 2 translations dont chaque vecteur vous est donné.

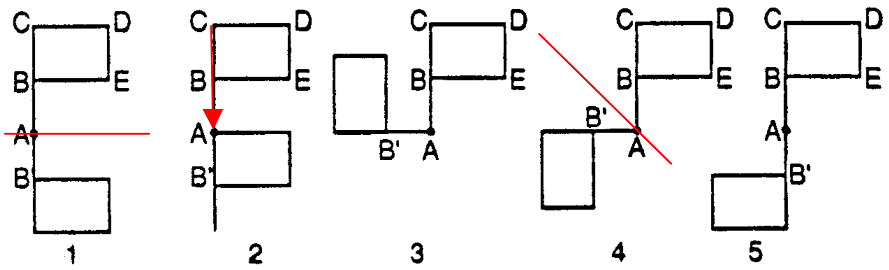
Pour la méthode : voir p.9 ❹



[3] Sommet par sommet serait plus juste.

B. Identification des transformations :

- **Exercice 1 :**



Chacun de ces dessins représente un petit drapeau ABCDE auquel on fait subir une transformation géométrique.

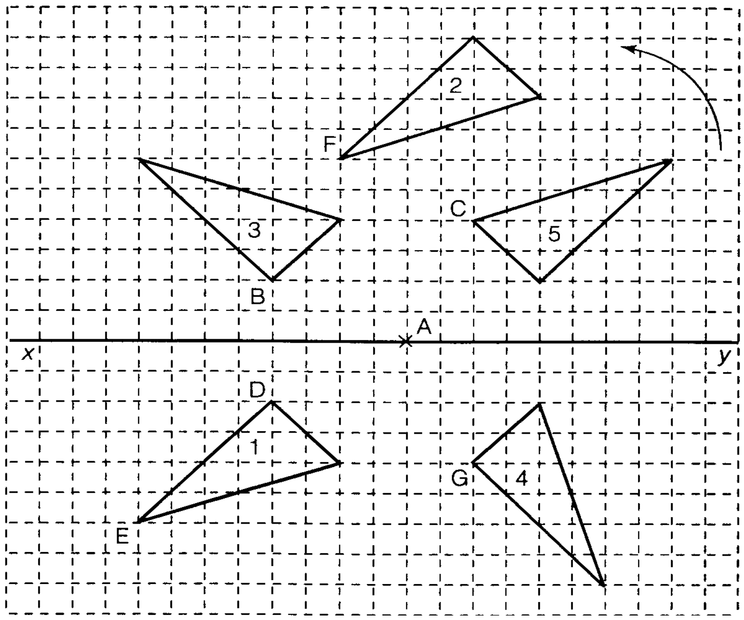
Dans chacune de ces transformations, le point B a pour image B'.

Remplis le tableau suivant en indiquant :

- le numéro du dessin correspondant à la transformation.
- les éléments de chaque transformation (axe de symétrie ou centre de symétrie ou « mouvement »).
- Fais apparaître en rouge sur chaque figure les éléments qui définissent chaque transformation s'ils ne sont pas déjà tracés.

n°	type de transformation	éléments définissant la transformation
5	symétrie centrale	de centre *A.*
2	translation	de « mouvement » $\overrightarrow{CA}$ *ou* $\overrightarrow{BB'}$.
1	symétrie axiale	d'axe *la droite à (BB') passant par A.*
4	symétrie axiale	d'axe *la médiatrice de [BB']*

- **Exercice 2 :**



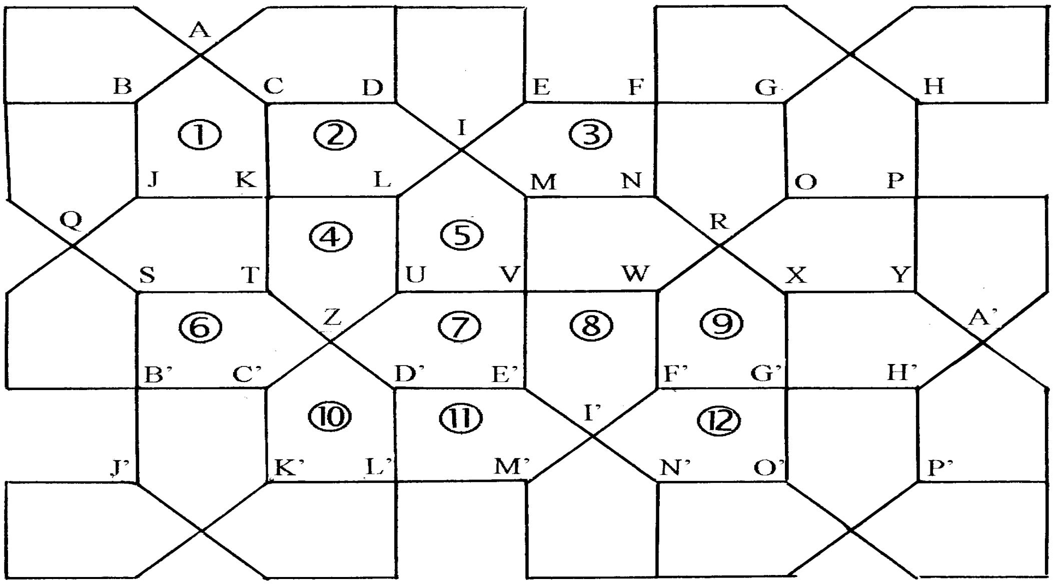
Chacun des triangles 2, 3, 4 et 5 est obtenu à partir du triangle 1 à l'aide d'une symétrie axiale, ou d'une symétrie centrale, ou d'une translation.

Complète les trois phrases suivantes :

- L'image du triangle 1 par la symétrie axiale d'axe *(xy)* est le triangle *3.*
- L'image du triangle 1 par la symétrie centrale de centre *A* est le triangle *5.*
- L'image du triangle 1 par la translation qui transforme *E en F* est le triangle *2.*

Fais apparaître *en rouge* les éléments qui définissent chaque transformation s'ils ne sont pas déjà tracés.

➢ Exercice 3 :



Complétez le tableau suivant :

	type de transformation	**éléments définissant la transformation**		**type de transformation**	**éléments définissant la transformation**
①→⑤	*Translation*	*Vecteur* $\overrightarrow{AI}$	⑩→⑤	*Translation*	*Vecteur* $\overrightarrow{ZI}$
④→⑥	*Rotation*	*Centre Z et d'un quart de tour*	②→11	*Translation*	*Vecteur* $\overrightarrow{DE'}$
④→⑩	*Symétrie axiale*	*Axe (ZA')*	⑤→⑧	*Symétrie centrale*	*Centre V*
④→⑩	*Symétrie centrale*	*Centre Z*	⑨→①	*Translation*	*Vecteur* $\overrightarrow{AR}$

➢ Exercice 4 :

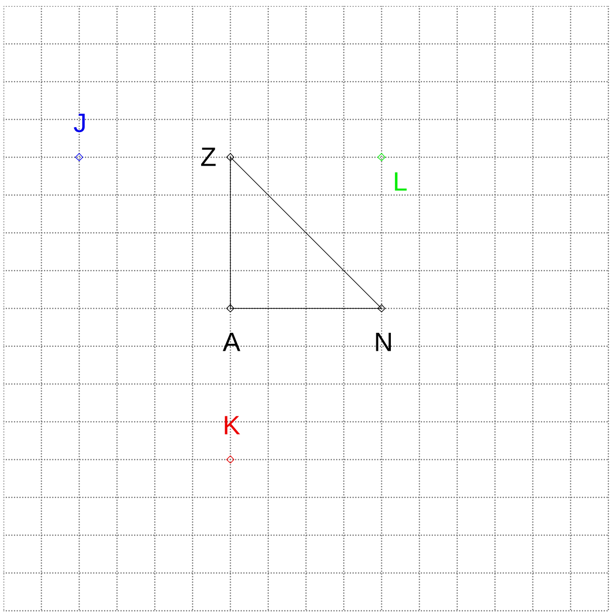
Construis, sur le quadrillage ci-contre au milieu, un triangle ZAN rectangle en A et tel que :

AN = AZ = 4 carreaux.

1) Place le point K image de Z par la symétrie de centre A.

2) Place le point L image de A par la symétrie axiale d'axe (ZN).

3) Place le point J image de Z par la translation qui transforme N en A.



C. Parallélogrammes et translations :

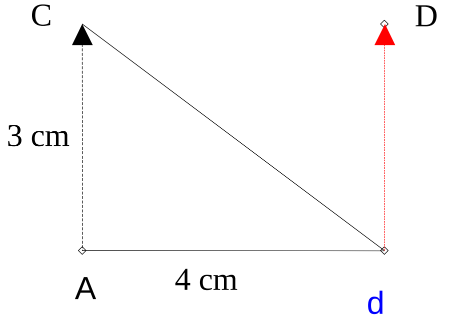
Exercices à faire à gauche ou dans votre cahier d'exercices.

La majorité des exercices de raisonnement vont jouer sur le changement de registres :
Passage translation $\longrightarrow$ parallélogramme et inversement passage parallélogramme $\longrightarrow$ translation.

- Exercice 1 :

Soit un triangle ABC de longueur AB = 3cm ; AC = 4 cm et BC = 5 cm

1. Tracer ce triangle ABC sur votre copie et construire en vert le point D translaté de B par la translation qui transforme A en C.



2. Quelle est la nature de ABC ?

On nous donne les 3 longueurs du triangle : il faut penser à la réciproque de Pythagore !

- *D'une part* $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

  D'autre part $BC^2 = 25$

- *Puisque $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors d'après la réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.*

3. Prouver que ABDC est un rectangle.

- *Puisque* $\left\{\begin{array}{c} B \notin (AC) \\ t_{\overrightarrow{AC}}(B) = D \end{array}\right\}$ *alors ACDB est un parallélogramme.*

- *Puisque* $\left\{\begin{array}{c} \text{ABDC parallélogramme} \\ \widehat{B} \text{ est un angle droit} \end{array}\right\}$ *alors ABDC est un rectangle !*

4. Soit O l'intersection des diagonales. Quelle est la nature du triangle COD ?

- *Puisque ABDC est un rectangle alors les diagonales [AD] et [BC] sont de même longueur et se coupent en leur milieu O.*

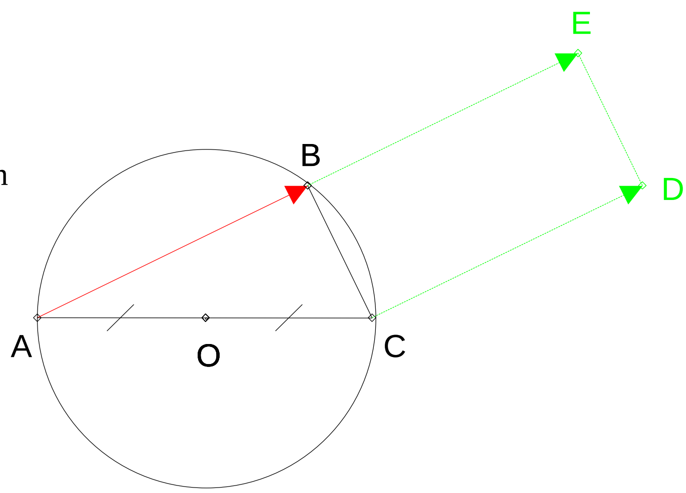
Donc OD = OC

- *Donc OCD est un triangle isocèle en O.*

- Exercice 2 :

Sur la figure ci contre (qu'on complètera au fur et à mesure) [AC] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et B est un troisième point sur ce cercle $\mathcal{C}$.

Tracer en vert E et D, les images respectives de B et C par la translation qui transforme A en B.



Partie ① :

1. Prouver que (AB) ⊥ (BC).

Puisque $\left\{\begin{matrix} B \in \mathcal{C}_{[AC]} \\ B \neq A \text{ et } C \end{matrix}\right\}$ *alors, d'après le théorème triangle rect. et cercle circonscrit, ABC rectangle en B.*

Donc (AB) ⊥ (BC).

2. Montrer que BCDE est un rectangle.

- *D'après l'énoncé,* $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ *donc la translation qui transforme A en B est la même que celle que celle qui transforme B en E :* $t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BE}}$
- *D'après l'énoncé* $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$ *qu'on peut aussi écrire* $t_{\overrightarrow{BE}}(C) = D$ *d'après ce qui précède.*

Puisque $\left\{\begin{matrix} t_{\overrightarrow{BE}}(C) = D \\ C \notin (BE) \end{matrix}\right\}$ *alors BEDC est un parallélogramme.*

- *Puisque* $\left\{\begin{matrix} \text{BCDE est un parallélogramme} \\ (BC) \perp (BE) \end{matrix}\right\}$ *alors BCDE est un rectangle !*

3. On sait que AC = 5 et BC = 3. Calculer AB.

Puisque ABC est rectangle en B, alors, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 + BA^2 = CA^2$

D'où $BA^2 = CA^2 - BC^2$

$= 5^2 - 3^2$

$= 25 - 16$

$BA^2 = 9$

Donc $BA = +\sqrt{9} = 3$ *(car BA est une longueur donc positive).*

Partie ② :

4. Montrer que AB = BE.

Puisque $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ alors AB = BE donc B est équidistant de A et E (en fait B est le milieu de [AE].

5. Montrer que (BC) est la médiatrice de [AE].

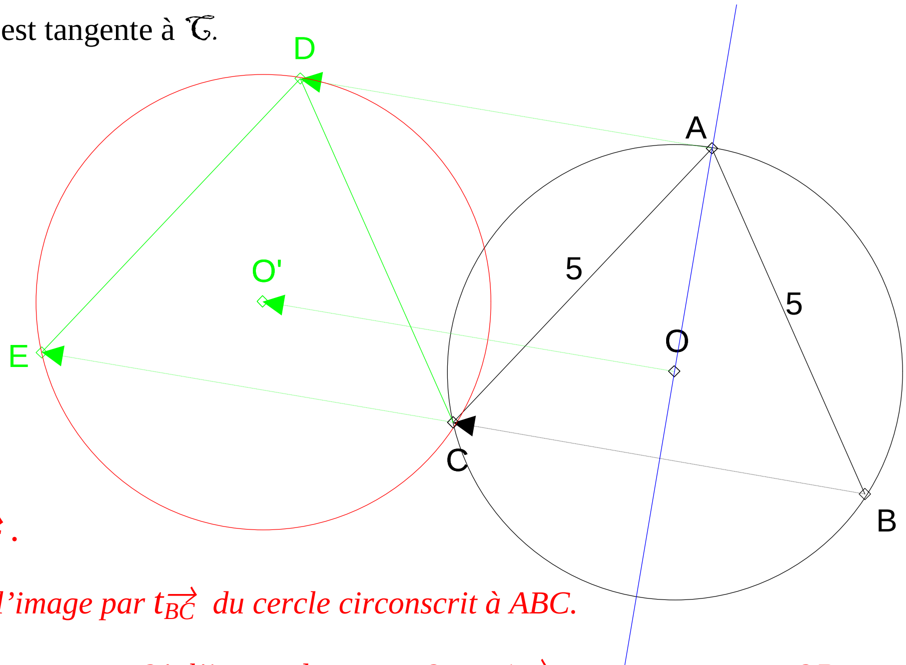
Puisque $\left\{\begin{matrix} \text{B est équidistant de A et E} \\ (BC) \perp (BE) \end{matrix}\right\}$ *alors (BC) est la médiatrice de [AE].*

6. En déduire la nature de ACE.

Puisque C ∈ med[AE] alors AC = AE donc le triangle ACE est isocèle en C.

- <u>Exercice 3 :</u>

1. Tracer un cercle $\mathcal{C}_{(O\ ;\ 3cm)}$ puis placer *sur le cercle* 3 points A, B et C tels que le triangle ABC soit isocèle en A et AB = 5cm.
2. Construire en vert les points D et E, images respectives des points A et C par la translation qui transforme B en C.
3. Tracer le plus simplement possible le cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit au triangle CDE. Expliquer.
4. Montrer que (OA) ⊥ (BC) et que (AD) // (BC).
5. En déduire que la droite (AD) est tangente à $\mathcal{C}$.



1. *et 2. Voir figure ci contre.*
2. *Puisque par $t_{\overrightarrow{BC}}$:*

   B a pour image C

   C a pour image E

   A a pour image D,

alors BCA a pour image CED par $t_{\overrightarrow{BC}}$.

Donc le cercle circonscrit à CED est l'image par $t_{\overrightarrow{BC}}$ du cercle circonscrit à ABC.

Ce cercle circonscrit à CED a donc pour centre O', l'image du centre O par $t_{\overrightarrow{BC}}$ et son rayon sera OD.

4. *Puisque ACB isocèle en A, alors A est équidistant de B et C.*

   Puisque O est le centre du cercle circonscrit à ABC alors O est aussi équidistant de B et C.

   Puisque O et A sont équidistant de B et C, alors (OA) est la médiatrice de [BC]

   Donc (OA) ⊥ (BC).

   Puisque A a pour image D par $t_{\overrightarrow{BC}}$, alors ABCD est un parallélogramme, donc (AD) // (BC).

5. *Puisque* $\left\{\begin{array}{l}(AD) // (BC)\\(OA) \perp (BC)\end{array}\right\}$ alors (AD) ⊥ (OA).

   Puisque $\left\{\begin{array}{c}\text{A est sur le cercle } \mathcal{C} \text{ de centre O}\\(AD) \perp (OA)\end{array}\right\}$ *alors (AD) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A.*