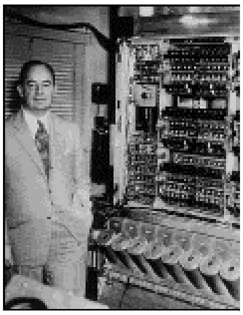
THEOREME DE PYTHAGORE ; TANGENTES.



Von Neumann posant devant l'un des tous premiers ordinateurs.

« En Mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »[1]

« Si quelqu'un croit que les mathématiques sont difficiles, c'est simplement qu'il ne réalise pas comme la vie est complexe ! »

John Von Neumann[2]

Correction en rouge et en italique

- Matériel : Matériel de géométrie ; Calculatrice scientifique (touche).
- Pré-requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*En cours*	*Maîtrisé*
Géométrie du triangle rectangle : hypoténuse, angles aigus complémentaires etc.				
Triangle rectangle et cercle circonscrit (TRCC) direct et réciproque.				
Notation x^2 (« x au carré »). Exemples : $5^2 =$ *25* $(-7)^2 =$ *49* $-7^2 =$ *-49*				
Méthode pour vérifier une égalité.				
Valeur exacte, valeur approchée, arrondis.				
Trouver un nombre inconnu dans une addition ou dans une soustraction.				
Distance entre 2 points.				

[1] Cette citation n'engage que son auteur ! Je vous avoue que je ne suis pas toujours d'accord.

[2] John Von Neumann (1903-1957) : Mathématicien hongrois naturalisé américain. Père de la Théorie des Jeux en 1944, il a grandement contribué à la naissance de l'informatique moderne. Il a conçu l'architecture de von Neumann utilisée dans tous les ordinateurs modernes et a étudié les automates cellulaires afin de construire les premiers exemples d'automates auto-reproductibles.
Son modèle de calculateur, où la même mémoire sert à conserver les programmes et les données, est resté à la base de la conception des ordinateurs jusqu'au début de la décennie 1990, où l'on commença à traiter les deux types de données dans des antémémoires différentes.

NOM et Prénom : ……………………………………………. *4ème ……*

I. UN PEU D'HISTOIRE.

A. Qui était Monsieur Pythagore ?

- Pythagore était un **mathématicien grec de la fin du 6ème siècle. av. J.C**. Il serait né au large des côtes turques.

Il fonda l'école des Pythagoriciens qui était en fait une secte de 220 membres environ. Elle dura 1 500 ans. Elle avait des activités religieuses, philosophiques, mathématiques et politiques. Leur devise était **« Toutes choses sont des nombres »**. Toutes leurs découvertes scientifiques étaient rapportées à Pythagore ! Il est donc impossible de distinguer les inventions de Pythagore de celles de ses disciples.

- Il fut l'élève de **Thalès**. Comme pour ce dernier, on ne dispose d'aucune œuvre car, à cette époque, l'enseignement était oral. On ne sait donc pas si Pythagore a démontré le théorème qui porte son nom !
- La mort de Pythagore semble étrange. Voici la version la plus répandue : un jour, sa maison fut incendiée par ses ennemis. Plusieurs de ses disciples furent tués. Pythagore lui même se sauva pour se retrouver dans un champ de haricots. Il s'arrêta et déclara qu'il préférait être tué plutôt que de traverser le champ de haricots. Ses poursuivants le prirent au mot et lui tranchèrent la gorge. ☹

B. Les Pythagoriciens :

Ils ont découvert entre autres :

- Le raisonnement par l'absurde.
- Les premières démonstrations sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (on ne peut pas écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction) et sur la somme des 3 angles d'un triangle.
- Les premières classifications des nombres en nombres pairs et impairs ainsi que les règles :
  - pair + pair = pair
  - impair + impair = *pair*
  - pair + impair = *impair*
  - pair × pair = *pair*
  - pair × impair = pair
  - impair × impair = impair
- Ils construisirent 3 polyèdres réguliers : le cube, le tétraèdre et le dodécaèdre (un polyèdre régulier est un solide dont toutes les faces sont toutes un même polygone régulier : par exemple toutes des triangles équilatéraux, ou toutes des carrés, ou toutes des pentagones réguliers etc.). Platon avait démontré qu'il n'existait que cinq polyèdres réguliers dans l'espace, les deux autres étant l'octaèdre et l'icosaèdre.

C. Historique du Théorème de Pythagore :

- Des textes gravés sur une tablette d'argile montrent que le Théorème de Pythagore était **connu des Babyloniens** dès 1800 – 1650 av. J.C soit 1000 ans avant Pythagore !

Précisons que les Babyloniens ne connaissaient pas le théorème sous sa forme générale mais utilisaient ce qu'on appelle des triplets pythagoriciens (voir p.9).

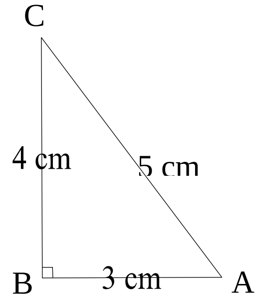
- Ce fameux « Théorème de Pythagore » **eut au fil du temps différents noms** : « Théorème de la mariée » chez les Grecs ; « Chaise de la mariée » chez les Hindous, « Figure de l'épousée » chez les Perses pour la réciproque du Théorème de Pythagore.

Au début du XXe siècle, il fut appelé par les lycéens le « Pont-aux-ânes de la géométrie » : c'était soit disant une connaissance permettant de juger de l'intelligence de quelqu'un. Son nom actuel ne date que du milieu du XXe siècle.

- Et maintenant, voyons ce fameux théorème. Place aux Maths ! Vive les *Maths* !

II. THEOREME DE PYTHAGORE, VERSION DIRECTE.

- Soit ABC le triangle *rectangle en B* ci contre.



Calculer **d'une part :** $CA^2 = 5^2 = 25$

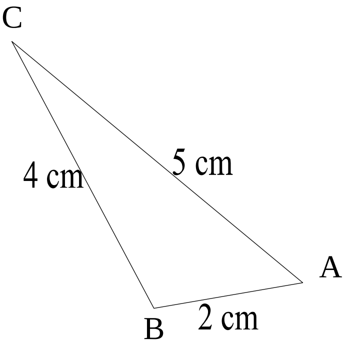
Calculer **d'autre part :** $BC^2 + BA^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

$= 25$

Que remarquez vous ? $CA^2 = BC^2 + BA^2$

- Soit maintenant le triangle ABC ci contre :



Calculer d'une part : $CA^2 = 5^2 = 25$

Calculer d'autre part : $BC^2 + BA^2 = 4^2 + 2^2$

$= 16 + 4$

$= 20$

Que remarquez-vous ? $CA^2 \neq BC^2 + BA^2$

Je ne vous étonnerai pas si je vous affirme que, de même, après calculs, on aurait aussi :

$AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ et $CA^2 + CB^2 \neq AB^2$

Ainsi, quand $CA^2 \neq BC^2 + BA^2$, le triangle ABC vous semble-t-il rectangle ? *Bien sûr que non !*

- Cette relation métrique qui semble être vérifiée par les triangles rectangles est-elle un pur hasard ? *Meuh non !*

Bien sûr que non ! Il s'agit en fait du célèbre Théorème de *Pythagore !*

A. Théorème de Pythagore version directe :

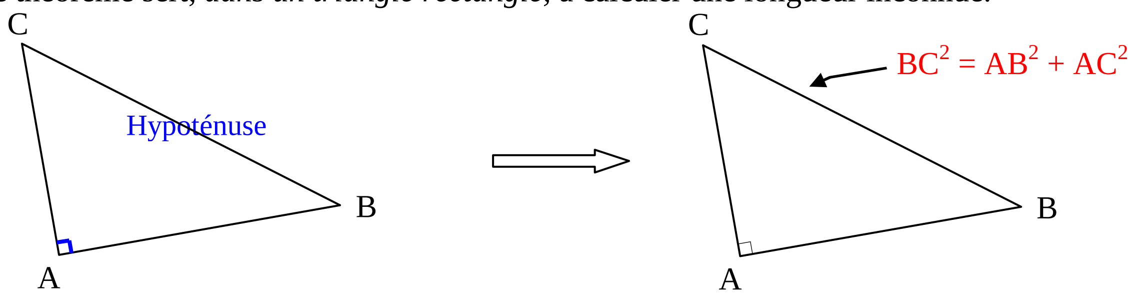
Théorème de Pythagore version directe :

	(*1* donnée ou hypothèse)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	ABC est un triangle *rectangle* en A	*alors*	$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Autrement dit : Lorsqu'un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

Utilité : Ce théorème sert, *dans un triangle rectangle,* à calculer une longueur inconnue.

Figure :



- Remarque :

La relation « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » s'appelle « l'égalité de Pythagore ».

La relation « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » s'appelle « l'égalité de Pythagore ». **Dans cette égalité, l'hypoténuse au carré doit être isolée** ! Les carrés des 2 côtés de l'angle droit forment l'autre membre de l'égalité.

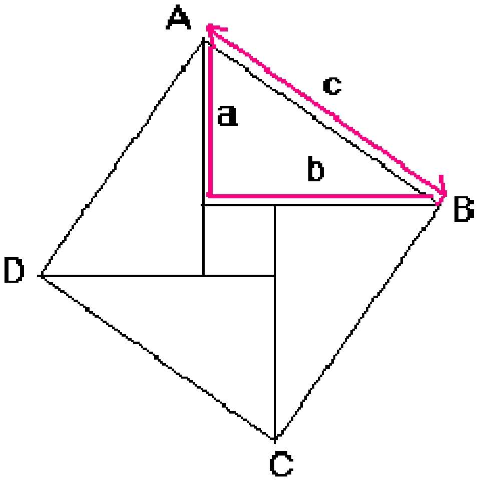
- Application : Pour chacun des triangles rectangles suivants, écrire l'égalité de Pythagore correspondante. Faites des croquis pour vous aider !

FAN rectangle en A	OUF rectangle en F	FOL rectangle en O
$FN^2 = AF^2 + AN^2$	$OU^2 = FO^2 + FU^2$	$FL^2 = OF^2 + OL^2$

B. Quatre preuves du Théorème de Pythagore :

Il existe environ 370 démonstrations de ce théorème !

① La plus ancienne est une démonstration chinoise :



➢ On démontre d'abord facilement par des considérations d'angles que ABCD est un carré.

➢ Puis, on calcule l'aire du carré ABCD de deux façons :

1ère façon : en considérant le grand carré ABCD :

$$\text{Aire (ABCD)} = c \times c = c^2$$

2ème façon : en considérant le découpage intérieur :

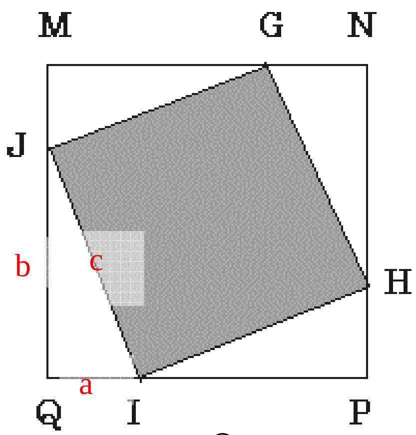
$$\text{aire(ABCD)} = 4 \times \boxed{\text{aire d'un triangle rectangle}} + \boxed{\text{aire du petit carré au milieu de côté (b-a)}}$$

$$= \underbrace{4 \times \frac{a \times b}{2}}_{2ab} + \underbrace{(a - b)^2}_{a^2 + b^2 - 2ab \text{ (admis)}}$$

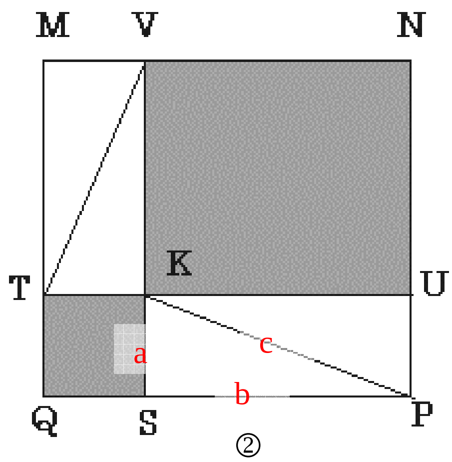
$$= a^2 + b^2$$

Finalement, en regroupant les résultats des 2 calculs, on obtient bien $a^2 + b^2 = c^2$ CQFD

② Une autre démonstration géométrique :



①



②

➢ On dispose de deux façons (voir les deux figures ① et ②) 4 triangles rectangles blancs de longueur c pour l'hypoténuse et de longueur a et b pour les côtés de l'angle droit.

➢ Tout d'abord, on arrive facilement à démontrer que JGHI est un carré (on utilise le fait que, dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires).

➢ Puis, on remarque que dans chaque figure, les aires en blanc sont évidemment *égales.*

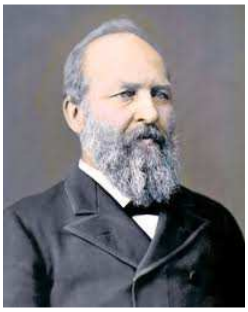
Donc	Aire grisée dans ①	=	Aire grisée dans ②			
C-à-d	Aire du carré *JGHI*	=	Aire du carré *VNUK*	+	Aire du carré *TKSQ*	
Finalement	c^2	=	b^2	+	a^2	CQFD

③ Plein d'autres belles démonstrations par découpage de Pythagore sur www.geogebratube.org.

④ Démonstration du grand Euclide (grand mathématicien grec du VI$^{\text{ème}}$ s. av. JC) :

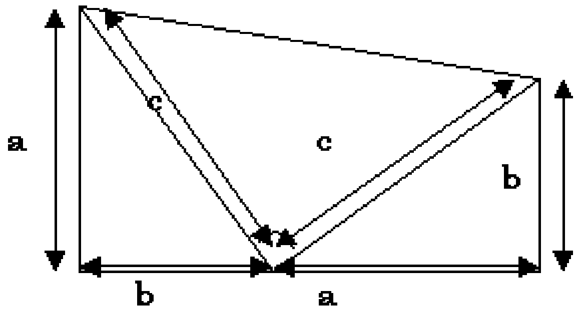
Le film de cette démonstration est visible sur www.mathkang.org, rubrique « Maths&Malice ». Je vous invite à la regarder chez vous.

⑤ Démonstration par Garfield en 1876 :



Garfield était le 20$^{\text{ème}}$ président des Etats-Unis.

Il s'est inspiré de la démonstration des Chinois. Voici la figure sur laquelle il s'est appuyé. Sa démonstration repose sur l'aire du trapèze calculée de deux manières.



C'en est fini pour les démonstrations !

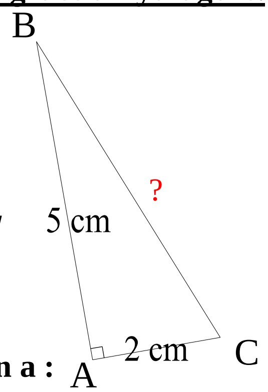
C. Utilisation du Théorème de Pythagore, version directe :

Soit ABC rectangle en A tel que AB = 5 cm et AC = 2 cm (voir figure ci-dessous). On veut calculer BC.

On sait que ABC est rectangle en A et on connaît les deux longueurs AB et AC.

Grâce au théorème de Pythagore, on va pouvoir trouver cette troisième longueur BC.

METHODE : Calculer une 3$^{\text{ème}}$ longueur dans un triangle rectangle (2 étapes) grâce à Pythagore.



❶ ***Préliminaire : A-t-on bien un triangle rectangle ?***

On s'assure d'abord qu'on a bien un triangle rectangle :

Si non, on le prouve auparavant ! Si oui, on repère l'hypoténuse : ici c'est [BC].

Cette étape ❶ est souvent oubliée par les élèves qui appliquent le théorème direct sans être certain (par l'énoncé, le codage, ou une preuve qui précède) que le triangle soit rectangle ! Vilains !

❷ ***On applique le Théorème de Pythagore direct de la p.3 :***

Puisque ABC rectangle en A, alors, d'après le théorème de Pythagore direct, on a :

$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$	*Egalité de Pythagore avec l'hypoténuse isolée à gauche.*
$(BC^2 = 5^2 + 2^2)$	*On remplace les quantités connues par leur valeur. Etape facultative.*
$\mathbf{BC^2 = 25 + 4}$	*On calcule les carrés connus.*
donc $\mathbf{BC^2 = 29}$	*On en déduit la valeur exacte de BC².*
d'où $\mathbf{BC = \sqrt{29}}$ **cm valeur exacte**[3]	*On trouve finalement la valeur exacte de BC.*
$\mathbf{BC \approx 5{,}4}$ **cm**	*Avec la touche de la calculette, on a un arrondi de BC (ici au 1/10$^{\text{ème}}$).*

La troisième longueur BC mesure exactement $\sqrt{29}$ cm soit environ 5,4 cm.

[3] $\sqrt{29}$ se lit « racine carrée de 29 » : c'est le nombre *positif* qui a pour carré 29. Autre exemple $\sqrt{9} = 3$ car le carré de 3 est 9 ($3 \times 3 = 9$).

1. Application ① : Calculer la longueur de l'hypoténuse.

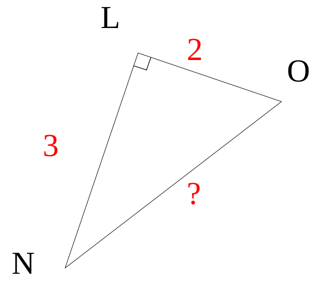
Soit NOL un triangle rectangle en L, avec LO = 2 et LN = 3. Calculer la longueur de l'hypoténuse ON.

❶ Faire d'abord un croquis. Reporter les longueurs connues et placer un « ? » pour la longueur inconnue.

*❷ En appliquant **exactement, AU MOT PRES, la méthode vue p.5**, calculer ON (valeur exacte en cm, puis arrondi au mm).*

D'après l'énoncé, LON est bien un triangle rectangle en L. Son hypoténuse est [ON].

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :



Puisque NOL est un triangle rectangle en L,

alors, d'après le théorème de Pythagore version directe, on a :

$NO^2 = LN^2 + LO^2$

$NO^2 = 3^2 + 2^2$

$NO^2 = 9 + 4$

Donc $NO^2 = 13$

D'où $NO = \sqrt{13}$ cm valeur exacte.

La longueur NO de l'hypoténuse est exactement $\sqrt{13}$ cm.

Avec la touche $\sqrt{\ }$ de la calculette, on peut donner une valeur approchée de NO : NO $\approx$ 3,6 cm (arrondi au mm).

2. Application ② : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit.

Soit un triangle rectangle dont on connait l'hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit.

On veut trouver la longueur de l'autre côté de l'angle droit. Méthode :

❶ Faire d'abord un croquis. Reporter les longueurs connues et le « ? ».

*❷ En appliquant **rigoureusement la méthode vue p.5,** trouver la valeur demandée.*

D'après l'énoncé, ABC est bien un triangle rectangle en A. Son hypoténuse est [BC].

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

Puisque ABC est un triangle rectangle en A,

alors, d'après le théorème de Pythagore version directe, on a :

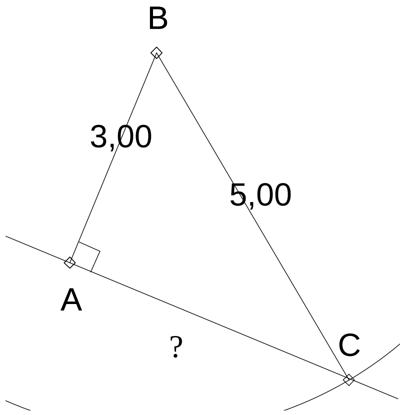
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$25 = 9 + AC^2$

Donc $AC^2 = 25 - 9 = 16$

D'où $AC = \sqrt{16} = 4$ u.l valeur exacte.

La troisième longueur AC mesure exactement 4 u.l.



D'après l'énoncé, BOL est bien un triangle rectangle en B. Son hypoténuse est [OL].

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

Puisque BOL est un triangle rectangle en L,

alors, d'après le théorème de Pythagore version directe, on a :

$OL^2 = BO^2 + BL^2$

$49 = 16 + BL^2$

Donc $BL^2 = 49 - 16 = 33$

D'où $BL = \sqrt{33}$ u.l valeur exacte.

La troisième longueur AC mesure exactement 4 u.l.

D. Conséquence du Théorème de Pythagore version directe :

Quand *le carré de la longueur du plus grand côté* d'un triangle est DIFFERENT de la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle NE PEUT PAS être rectangle

1. Application :

Soit le triangle ABC ci-contre tel que :

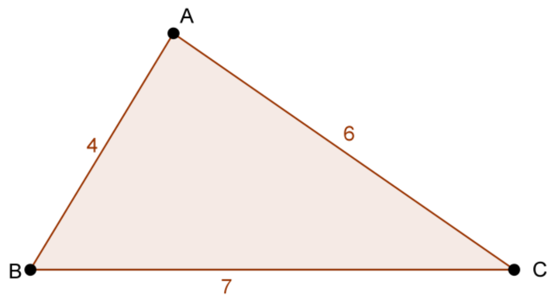
AC = 4 cm ; AB = 6 cm et BC = 7 cm.

Semble-t-il rectangle ? Oui. Où ? En A.

En fait, les apparences sont trompeuses !

On va montrer dans ce qui suit que ce triangle n'est pas rectangle !

Figure



Il s'agit en fait de vérifier si BC^2 (***BC est la plus grande longueur***) est égal ou différent de $AB^2 + AC^2$.

Pour vérifier s'il y a égalité ou non, on applique la méthode vue au contrat 1 en utilisant la formulation :

« D'une part à gauche on a, ….., D'autre part à droite on a, ……., Puisque,…. » et calculs en colonnes !

- D'une part à gauche on a : $BC^2 = 7^2$
  $= 49$

- D'autre part on a : $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 6^2$
  $= 16 + 36$
  $= 52$

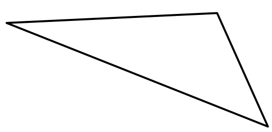
- Puisque *$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle.*

2. A vous maintenant : ***Sans faire de figure,*** le triangle EVA (EV = 5 ; EA = 6 et VA = 7) est-il rectangle ? Compléter ce croquis pour bien visualiser la situation.

- D'une part on a : $VA^2 = 7^2$
  $= 49$

- *D'autre part on a : $EV^2 + EA^2 = 5^2 + 6^2$*
  $= 25 + 36$
  $= 61$

- *Puisque $VA^2 \neq EV^2 + EA^2$ alors le triangle EVA n'est pas rectangle.*



III. RECIPROQUE DU THEOREME DE PYTHAGORE.

A. Question :

Inversement, un triangle ABC vérifiant $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est-il forcément rectangle en A ?

Prenons un exemple : Construire le triangle ABC tel que AB = 2,4 cm ; AC = 3,2 cm ; BC = 4 cm.

Calculer **d'une part on a :** $BC^2 = 4^2$

$= 16$

Calculer **d'autre part** on a : $AB^2 + AC^2 = 2,4^2 + 3,2^2$

$= 5,76 + 10,24$

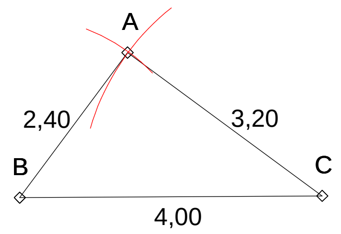
$= 16$

Quelle égalité vérifie ce triangle ?

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

ABC vous semble-t-il rectangle ? *Oui.* Où ? *En A.*

Figure



Ainsi, le fait que « Lorsque $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC semble être rectangle en A », n'est pas un pur hasard ! Il s'agit en fait de la réciproque du Théorème de Pythagore :

B. Réciproque du Théorème de Pythagore :

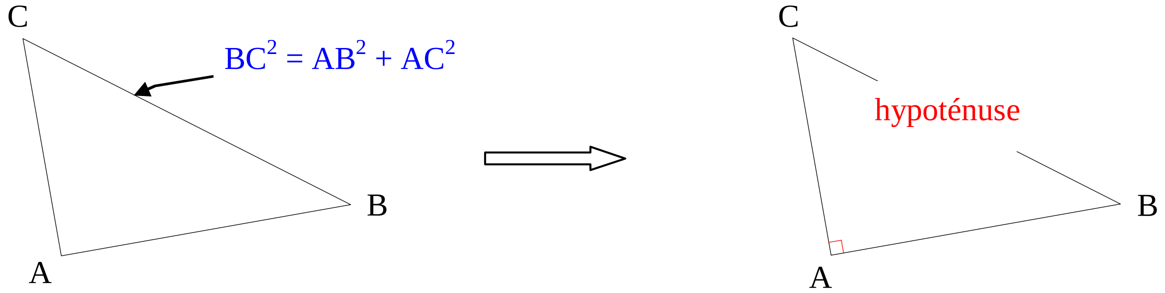
Réciproque du Théorème de Pythagore :

	(*1* donnée ou hypothèse)		(*1* résultat ou conclusion)
Quand	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	*alors*	ABC est un triangle rectangle en A.

Autrement dit : Lorsque dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle. Le plus grand côté est alors l'hypoténuse.

Utilité : Cette réciproque sert à démontrer *qu'un triangle est rectangle en un point.*

Figure :



C. Utilisation de la réciproque de Pythagore :

Soit le triangle MNP tel que : MN = 12 cm, MP = 35 cm et NP = 37 cm. On veut savoir s'il est rectangle.

Peut-on construire ce triangle sur la feuille ? *Non !* On ne peut donc pas se faire une idée par le dessin !

Et pourtant, grâce aux 3 longueurs données, on va vérifier si ce triangle MNP est rectangle ou non.

Il s'agit là encore de vérifier ou non une égalité ⇒ Méthode vue au contrat 1 avec formulation :

« D'une part, …..., D'autre part, ………..., Puisque,…. » et calculs en colonnes !

METHODE : Vérifier par les longueurs qu'un triangle est rectangle ou non (3 étapes).

❶ ***On fait un croquis puis on repère la plus grande longueur du triangle : pour MNP ci-dessus, c'est NP (37 cm).***

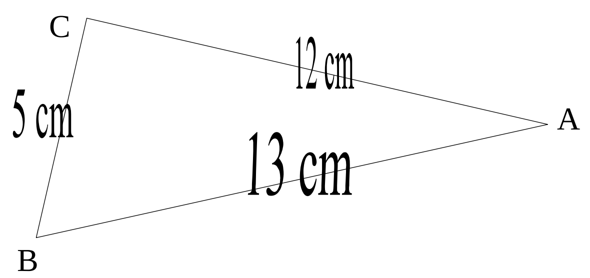
❷ ***On vérifie par calcul (méthode « d'une part,…, d'autre part,… ») si il y a ou non égalité de Pythagore :***

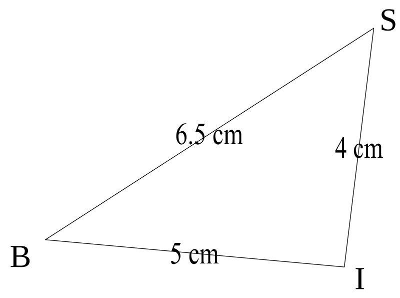
- **D'une part on a :** $NP^2 = 37^2$
  $= 1369$
- **D'autre part on a :** $MN^2 + MP^2 = 12^2 + 35^2$
  $= 144 + 1225$
  $= 1369$

❸ ***On conclut :***

- **Puisque** $NP^2 = MN^2 + MP^2$ **alors, d'après la réciproque de Pythagore**, MNP *est rectangle en M*.

➢ Applications :





Ces deux triangles semblent rectangles. Le sont-ils vraiment ? Appliquer **RIGOUREUSEMENT** la méthode !

❶ Pour le triangle ABC : AB = 13 cm est la plus grande longueur.

❷ Vérification ou non de l'égalité :

D'une part $AB^2 = 13^2$
$= 169$

D'autre part $CA^2 + CB^2 = 12^2 + 5^2$
$= 144 + 25$
$= 169$

❸ On conclut :

Puisque *AB² = CA² + CB²* ***alors, d'après la réciproque de Pythagore****, ABC est un triangle rectangle en C.*

❶ Pour le triangle BIS : BS = 6,5 cm est la plus grande longueur.

❷ Vérification ou non de l'égalité :

D'une part $BS^2 = 6{,}5^2$
$= 42{,}25$

D'autre part $IB^2 + IS^2 = 5^2 + 4^2$
$= 25 + 16$
$= 41$

❸ On conclut :

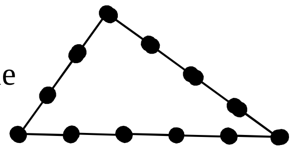
Puisque $IB^2 + IS^2 \neq BS^2$ ***alors, d'après la conséquence de Pythagore direct****, BIS n'est pas un triangle rectangle.*

D. Quelques remarques sur le Théorème de Pythagore :

1. Soyez précis : rectangle en quel point ? Attention aux notations : segment ou longueur ?
2. Puisque le Théorème de Pythagore **ET** sa réciproque sont vrais en même temps, on dispose maintenant d'une 2$^{\text{ème}}$ propriété caractéristique pour le triangle rectangle (en plus de celle avec le cercle circonscrit) :

« Les triangles rectangles, et eux seuls, ont leur carré du plus grand côté = somme des carrés des 2 autres côtés ! »

3. En Mésopotamie, en Inde, et même en Egypte, on utilisait des **cordes à nœuds pour obtenir des angles droits (**pour construire des autels etc.).



Par exemple une corde à 13 nœuds régulièrement espacés permet de tracer un triangle rectangle de longueurs de côtés 3 ; 4 et 5 (les nœuds n°1 et 13 se confondent).

Voici une liste de quelques triplets de nombres entiers vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$:

(3 ; 4 ; 5)   (5 ; 12 ; 13)   (6 ; 8 ; 10)   (7 ; 24 ; 25)   (8 ; 15 ; 17)   (12 ; 16 ; 20)

(12 ; 35 ; 37)   (15 ; 20 ; 25)   (15 ; 36 ; 39)   (20 ; 21 ; 29)   (119 ; 120 ; 169) etc.

Ces triplets de nombres sont appelés **triplets pythagoriciens** car ils peuvent être les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle.

Ces triplets sont connus des maçons qui les utilisent pour « fabriquer » des angles droits.

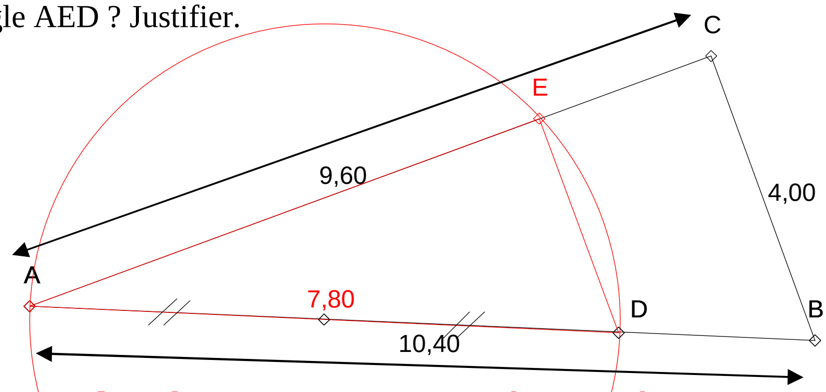
IV. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR PYTHAGORE ET TRCC.

A FAIRE SUR VOTRE CAHIER D'EXERCICES.

➢ Exercice ① : Brevet Pondichéry juin 2001 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 10,4 cm ; AC = 9,6 cm et BC = 4 cm.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
2. Montrer que ABC est rectangle.
3. Soit D le point du segment [AB] tel que AD = 7,8 cm. Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AD] recoupe le segment [AC] en E. Quelle est la nature du triangle AED ? Justifier.
4. Montrer que (BC) // (DE).



2. ***D'une part*** $AB^2 = 10{,}4^2 = 108{,}16$

D'autre part $CA^2 + CB^2 = 9{,}6^2 + 4^2 = 92{,}16 + 16 = 108{,}16$

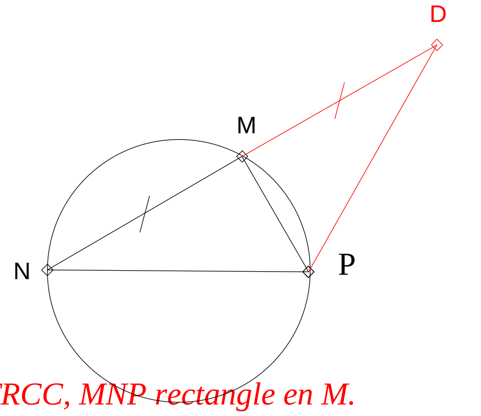
Puisque $AB^2 = CA^2 + CB^2$ ***alors, d'après la réciproque de Pythagore****, ABC est un triangle rectangle en C.*

3. *Attention à ne pas confondre diamètre et rayon pour la construction de E !*

Puisque $\left\{\begin{array}{l} ① \ E \in \mathcal{C}_{[AD]} \\ ② \ E \text{ distinct de A et D} \end{array}\right\}$ *alors, par la réciproque de TRCC, AED rectangle en E.*

4. *Puisque* $\left\{\begin{array}{l} (BC) \perp (AC) \\ (ED) \perp (ED) \end{array}\right\}$ *alors (BC) // (ED).*

- <u>Exercice ② :</u>



Sur la figure ci-contre, M ∈ $\mathcal{C}_{[NP]}$.

Construire D, le symétrique de N par rapport à M. Codage ?

1. Quelle est la nature du triangle MNP ?
2. Que représente la droite (MP) pour le segment [ND] ?
3. En déduire la nature du triangle NDP.

1. *Puisque* $\left\{\begin{array}{l} ①\ M \in \mathcal{C}_{[NP]} \\ ②\ \text{M distinct de N et P} \end{array}\right\}$ *alors, par la réciproque de TRCC, MNP rectangle en M.*

   Donc (MN) ⊥ (MP)

2. *Puisque D est le symétrique de N par rapport à M, alors M milieu de [ND].*

   Puisque $\left\{\begin{array}{l} \text{M milieu de [ND]} \\ \text{(MP)} \perp \text{(ND)} \end{array}\right\}$ *alors (MP) est la médiatrice de [ND].*

3. *Puisque P ∈ (MP) qui est la médiatrice de [ND], alors PN = PD.*

   Donc NPD est isocèle en P.

- <u>Exercice ③ : Passera, passera pas ?</u>

Entre 2 points au sol A et B distants de 100 m, on attache une corde détendue de 101 m.

Pour retendre complètement cette corde de 101 m, on la soulève verticalement en son milieu C.

1. Compléter et coder le schéma ci- dessous. Placer H le milieu de [AB].
2. Un bus de 4m de hauteur veut passer sous la corde en C.

A priori, passera-t-il sans toucher la corde ? *La majorité des gens disent non !*

Maintenant, en utilisant Pythagore, prouver si oui ou non le bus passe sans toucher la corde.

• *Puisque C milieu de la corde tendue, alors CB = 50,5 m.*

Puisque H milieu de [AB], alors HB = 50 m.

• *Puisque les points C et H sont équidistants des points A et B, alors [CH] est la médiatrice de [AB].*

Donc le triangle CHB est rectangle en H.

• *Pour savoir si le bus passe sous la corde, il est nécessaire de connaître la hauteur CH.*

Puisque CHB rectangle en H, alors, d'après le théorème de Pythagore version directe, on a :

$$CB^2 = HC^2 + HB^2$$

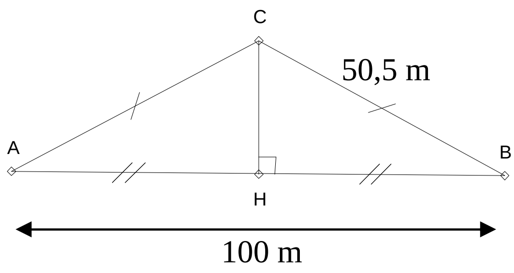
$$50{,}5^2 = HC^2 + 50^2$$

Donc $HC^2 = 50{,}5^2 - 50^2$

$$HC^2 = 2\,550{,}25 - 2\,500$$

$$HC^2 = 50{,}25$$

D'où $HC = \sqrt{50{,}25} \approx 7 \text{ m !}$

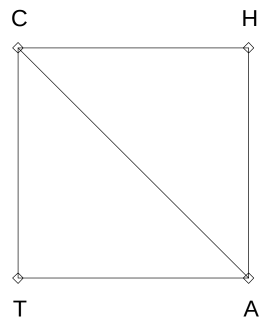


Un bus de 4m de haut passe largement sous la corde en C !

Remarques :

- *Ce qui est difficilement concevable pour l'esprit humain est qu'une corde 1 m plus longue que la distance AB engendre une hauteur de prés de 7 m ! Cela semble disproportionné !*
  En fait, à cause des carrés dans Pythagore, nous ne sommes pas dans une situation de proportionnalité ! Et c'est pourquoi on a tendance à faire un schéma proportionnel, ce qui est trompeur !
- *Enfin, nous n'avons pas tenu compte de la largeur du bus dans l'exercice. Les calculs seront faisables avec le Théorème de Thalès (contrat 7). Mais rassurez vous, un bus normal passe largement !*

➢ Exercice ④ : Calculer la longueur de la diagonale d'un carré TCHA dont le périmètre vaut 36 cm. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième.



- *Calculons d'abord la longueur commune des côtés.*

Longueur des côtés $= \dfrac{\text{Périmètre de TCHA}}{4} = \dfrac{36}{4} = 9$ *cm.*

- *Puisque TCHA est un carré alors CHA est un triangle rectangle (isocèle) en H.*

Donc, d'après le Théorème de Pythagore version directe, on a :

$CA^2 = HC^2 + HA^2$

$CA^2 = 9^2 + 9^2$

$CA^2 = 81 + 81$

$CA^2 = 162$

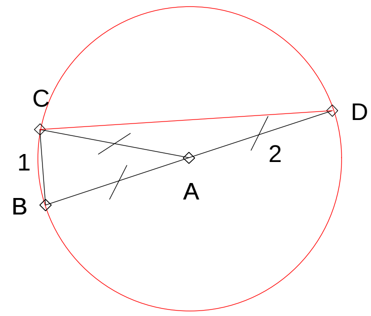
Donc $CA = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ *cm valeur exacte*

Avec la calculette, on obtient une valeur approchée au dixième : $CA \approx 12{,}7$ *cm.*

- *En fait, on vient de montrer dans un cas particulier que, lorsqu'un carré a pour longueur x, alors ses diagonales ont pour longueur* $\sqrt{2}\,x$.

➢ Exercice ⑥ : Sur la figure codée ci-contre, on sait que BC = 1 et AD = 2 et A ∈ [BD].

Calculer la longueur CD (valeur exacte puis arrondi au centième).



- *On connaît les 2 longueurs BD et BC dans le triangle BCD, on pourrait donc trouver CD si on savait que BCD était rectangle.*
- *On soupçonne fortement le triangle BCD d'être rectangle en C ! Montrons-le :*

Puisque $\left\{\begin{array}{l} A \in [BD] \\ AB = AD \end{array}\right\}$ *donc A milieu de [BD].*

De plus, d'après le codage, AC = AB = AD donc $C \in \mathcal{C}_{[BD]}$.

Puisque $\left\{\begin{array}{l} ① \ C \in \mathcal{C}_{[BD]} \\ ② \ C \text{ distinct de B et D} \end{array}\right\}$ *alors, d'après la réciproque de TRCC, CBD rectangle en C.*

- *Appliquons le célèbre théorème de Pythagore, version directe :*

Puisque BCD rectangle en C, alors, d'après le théorème de Pythagore version directe, on a :

$$BD^2 = CB^2 + CD^2$$

$$4^2 = 1^2 + CD^2$$

$$16 = 1 + CD^2$$

Donc $CD^2 = 16 - 1 = 15$

D'où $CD = \sqrt{15}$ *valeur exacte*

CD mesure exactement $\sqrt{15}$ *u.l (unité de longueur) soit, grâce à la calculette,* $CD \approx 3{,}87$ *u.l arrondi au centième.*

Le Kilimandjaro et ses neiges éternelles qui auront bientôt disparu du fait du réchauffement climatique.

➢ Exercice ⑤ Hello Papa Tango Charlie (Mort Shuman 1976) :

Le vol HPTC relie les villes de Paris et Tananarive[4] distantes de 9 500 km, par vol direct (en ligne droite).

Au dessus du Kilimandjaro[5], qui se trouve à 6 000 km de Paris, le pilote annonce son altitude à la tour de contrôle de Tananarive : « Allô ici vol Hello Papa Tango Charlie. Survolons le majestueux Kilimandjaro à 10 000 m d'altitude. Pouvez-vous nous indiquer la distance restante ? A vous. »

Quelle distance va annoncer le contrôleur de Tananarive ? (valeur exacte puis arrondie au m)

Une figure complète (mais non à l'échelle !) s'impose pour matérialiser la situation !

Vue de face, on a la situation suivante :

P représente Paris, T Tananarive, A l'avion et AH l'altitude de l'avion.

La distante restante représente en gros la longueur AT. Or [AT] est l'hypoténuse du triangle rectangle ATH (car l'altitude est donnée par la verticale qui est perpendiculaire au sol supposé horizontal !).

Il faut et il suffit donc de connaître 2 longueurs dans AHT pour avoir AT par Pythagore. On a déjà AH et HT est facile à trouver.

- ➢ *Puisque* $H \in [PT]$*, alors* $HT = PT - PH = 9\,500 - 6\,000 = 3\,500$ *km.*

Puisque AHT rectangle en H, alors, d'après le célèbre théorème de Pythagore version directe :

$$AT^2 = HA^2 + HT^2$$

$$AT^2 = 10^2 + 3\,500^2$$

$$AT^2 = 100 + 12\,250\,000$$

$$AT^2 = 12\,250\,100$$

Donc $AT = \sqrt{12\,250\,100}$ *Valeur exacte*

D'où $AT \approx 3\,500{,}014$ *km* *Valeur arrondie au m.*

« Allô vol Hello Papa Tango Charlie, ici Antananarivo. Il vous reste exactement 3 500 km et 14 m avant d'atterrir sur le sol de notre grande île rouge. Over »

- ➢ *Remarque : Ce résultat peut paraître surprenant : il reste à peu prés autant de km à parcourir pour un avion se trouvant à 10 km d'altitude qu'un avion se trouvant au sol !*

[4] Tananarive (Antananarivo en malgache) : capitale de Madagascar.

[5] Le Kilimandjaro est le point culminant du continent africain : 5 895 mètres.

*Dans cette situation, le croquis, **qui n'est pas à l'échelle**, est vraiment trompeur ! N'oubliez pas que 10 km, ce n'est rien comparé à 3 500 km (faites le calcul : 10/3500).*

Donc A et presque confondu avec H, donc AHT est presque isocèle en T, d'où TA ≈ TH !

➢ Remarque importante :

On voit encore dans tous ces exercices que la difficulté n'est pas tant d'appliquer le Théorème de Pythagore version directe ou réciproque, que d'être certain que les hypothèses soient bien vérifiées :

- « triangle rectangle » pour la version directe.
- « relation entre les carrés des longueurs » pour la version réciproque.

Le plus souvent, ces conditions sont « cachées » dans l'énoncé et il faut les prouver auparavant.

Par exemple, on ne vous donnera pas directement un triangle rectangle tout cuit sur un plateau, mais on vous servira à la place 3 points sur un cercle dont deux diamétralement opposés (ce qui indirectement donne un triangle rectangle par TRCC réciproque ce qui était le cas de l'exo ⑥).

V. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 4ème, TRCC & Pythagore). Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin !

A. Tableau récapitulatif : Comment choisir parmi les 4 théorèmes ?

Cochez les bonnes cases.	on peut appliquer : TRCC direct	Réciproque TRCC	Pythagore direct	Réciproque Pythagore
Pour montrer qu'un triangle est rectangle ou que 2 droites sont perpendiculaires ou qu'on a un angle droit,		×		×
Pour calculer une troisième longueur dans un triangle rectangle,			×	
Quand on connaît 3 longueurs dans un triangle,				×
Pour montrer qu'un ou plusieurs points sont sur un même cercle ou demi-cercle dont on pourra donner un diamètre,	×			
Quand on connaît 2 longueurs dans un triangle rectangle,			×	
Quand on a un ou des points sur un cercle ou demi-cercle dont on connaît un diamètre,		×		
Quand on a un cercle ou demi-cercle et qu'on veut montrer que 2 droites sont perpendiculaires ou qu'on a un angle droit		×		
Pour trouver la longueur de la médiane issue de l'angle droit dans un triangle rectangle,	×			

B. Conseils :

➢ Ne pas oublier que : la symétrie axiale induit la médiatrice donc milieu + angle droit (codage !).
La symétrie centrale induit le milieu (codage !).

➢ Au risque de me répéter, je rappelle que la principale difficulté n'est pas d'appliquer un théorème, mais de bien vérifier que les hypothèses sont bien réalisées :

- soit elles sont livrées directement dans l'énoncé : cas le plus heureux ! Ne rêvons pas, c'est assez rare.
- soit elles sont codées sur la figure de l'énoncé : cas un peu moins direct que le précédent.

- soit elles ont été prouvées dans des questions précédentes : il faut toujours bien regarder l'enchaînement des questions.
- enfin *le cas le plus général* où les hypothèses ne sont ni dans l'énoncé, ni codées sur la figure, ni prouvées dans des questions précédentes, dans ce cas, il faut retrousser ses manches et prouver au préalable chaque hypothèse dont on a besoin.

➢ Appliquez RIGOUREUSEMENT les théorèmes, sans dévier d'un signe !

Soyez à peu prés sûr à 99,9 % qu'un théorème appliqué de manière plus ou moins « libre », devient faux !

➢ Ecrivez les hypothèses en colonnes, avec une accolade quand il y en a plusieurs, pour tout de suite voir le nombre d'hypothèses.

➢ Précision : rectangle où ?

➢ Attention aux notations (droites, segments, cercles etc.).

➢ Figures : codez bien les données de l'énoncé seulement ; utilisez de la couleur.

C. Erreurs fréquentes :

➢ Sur Pythagore direct ou réciproque :

- Pour Pythagore direct :

Mal écrire l'égalité de Pythagore : l'hypoténuse² est seule d'un côté de l'égalité.

L'hypothèse « triangle rectangle » est souvent oubliée.

- Pour la réciproque : c'est le plus grand côté au carré qu'on calcule seul d'une part !
- Beaucoup de confusion entre Pythagore direct et sa réciproque :

Pour Pythagore direct, on affirme d'abord que le triangle est rectangle.

Pour la réciproque, on utilise « d'une part… d'autre part… puisque ».

- Confondre le carré de AB et le double de AB : lorsque $AB = 5$, $AB^2 =$ *25* et non ~~10~~ !

  lorsque $AB^2 = 36$, $AB =$ *6* et non ~~18~~ !

➢ Sur les théorèmes en général :

- Non sus ou mal appliqués : hypothèses manquantes ou non prouvées auparavant.
- Beaucoup confondent appliquer et réciter : plutôt que de blablater ou de (mal) réciter, appliquez RIGOUREUSEMENT, au mot prés, les théorèmes en utilisant les méthodes vues en cours.
- On n'utilise pas les mots « si », « quand » ou « lorsque » quand on commence une preuve : une preuve est une **affirmation** et non une supposition ! Donc une preuve commence par « puisque » ou « comme ».
- Les preuves en « car » sont interdites : on ne répond jamais en premier à une question, on justifie d'abord ! Donc preuve en « puisque » ou « comme ».
- Confusion entre valeurs exactes et valeurs approchées.

D. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? *Les Fractions.*