Contrôle C2 : TRCC-THEOREME DE PYTHAGORE (1h)

Compte rendu :

- Calculs : Beaucoup de fautes de signe et quelques fautes de priorité.

  Notation « a^2 » à revoir : $(-1)^2$= ….. ? $(-7)^2$ = ……… ? -7^2 = ……… ?

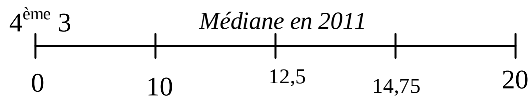
  Calculez directement les mini-produits de type « 2ab », dit 1 000 fois et répété ! Ceux qui ne veulent pas le faire ont toujours faux.
- Le gros morceau : les 4 théorèmes + la propriété angulaire de la tangente :
  - Quand on vous donne 3 longueurs dans un triangle ⇒ ……………………………………………………
  - Quand on cherche une longueur dans un triangle rectangle ⇒ ………………………………………………..
  - Beaucoup de confusion entre Pythagore direct et sa réciproque.
  - **L'hypothèse « triangle rectangle » est souvent oubliée pour Pythagore direct.**
  - Pythagore direct : on met toujours l'hypoténuse au carré seule dans l'égalité !
  - **TRCC direct n'est pas su en général.**
- Plus généralement sur les théorèmes ou propriétés :
  - Les théorèmes ne sont pas sus ou mal appliqués : hypothèses manquantes ou non prouvées auparavant.
  - Ecrivez les hypothèses en colonnes avec une accolade pour tout de suite voir le nombre d'hypothèses.
  - Appliquez RIGOUREUSEMENT, au mot prés, les théorèmes en appliquant les méthodes vues dans le cours. Je n'arrive toujours pas à comprendre pourquoi certains veulent faire à leur sauce : « compliquée, incompréhensible et fausse » plutôt qu'appliquer les méthodes vues en classe : « simples, claires et justes » !
  - Les preuves en « car » sont interdites : on ne répond jamais en premier à une question, on justifie d'abord !
  - **Vous devez citer le nom du théorème utilisé.**
  - Du dessin rajouté à une figure ne peut pas constituer un début de preuve !

Les notations (droite, segment, longueurs) !

Soyez précis : rectangle où ? Donnez les noms des objets dont vous parlez.

Relisez votre copie.

Médianes = 13,5 sur 21 en 2010 ; 12,25 sur 20 en 2009 ; 12,13 en 2008.



➢ Exercice n° 1 (……………..……….. / 4 points) : Un peu de calcul ne peut faire que du bien.

M = 2 − 4 (2 − 4 ÷ (-2) − 4) (………………..…. / 1 pt)

= 2 − 4 (2 + 2 − 4)

= 2 − 4 × 0

= 2 − 0

= 2

A = 2 − 4 (2 − 4 ÷ (-2)) − 4 (……………….…. / 1 pt)

= 2 − 4 (2 + 2) − 4)

= 2 − 4 × 4 − 4

= 2 − 16 − 4

= -18

Remarque : Les calculs de A et E montrent l'importance de la place des parenthèses qui peut bouleverser l'ordre des calculs.

On remplace directement les mini-produits type 2ab.

H = a^2 − 2ab + b^2 avec a = -1 et b = 1 (……..……... / 1 pt)

= 1 + 2 + 1

= 4

E = $(a - b)^2$ avec a = -1 et b = 1 (………..……….. / 1 pt)

= $(-1 - 1)^2$

= $(-2)^2$

= 4

Remarque : On trouve le même résultat pour H et E. En fait, cela est valable quelque soient les valeurs de a et b. En effet, lors du contrat 5 sur le calcul littéral, nous aurons l'occasion de prouver que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, quelques soient les valeurs de a et b. Cette formule sera revue en 3ème lors du chapitre sur les identités remarquables.

➢ <u>Exercice n° 2 (…………………….. / 2 points)</u> : Questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chaque affirmation, trois choix vous sont proposés dont un seul est vrai. Lequel ? **L'entourer.**

Réponse juste = + 0,5 pts Sans réponse = 0 pts Réponse fausse = – 0,25 pts

Les scores finaux négatifs sont ramenés à une note de 0 pt)

Croquis ou pas croquis ?

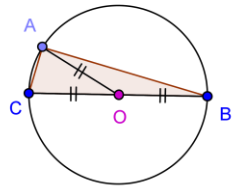
Affirmations	*Choix 1*	*Choix 2*	*Choix 3*
① Lorsqu'un triangle est rectangle, alors	le carré de l'hypoténuse est égal aux 2 autres côtés au carré.	le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés.	le carré de l'hypoténuse est égal au carré de la somme des 2 autres côtés.
② Si $CB^2 + AC^2 = AB^2$, alors	ABC rectangle en A.	ABC rectangle en B.	ABC rectangle en C.
③ Soit ABC rectangle en A et O le milieu de [BC]. Alors	$OA = \frac{BC}{2}$	$\frac{OA}{2} = BC$	OA = 2BC.
④ Soient un triangle ABC et son cercle circonscrit. Alors	ABC est forcément rectangle.	ABC peut être rectangle.	ABC est forcément quelconque.

① Soient a l'hypoténuse d'un triangle rectangle et b et c les 2 côtés de l'angle droit :

- *le choix 1 ne veut rien dire : on ne sait pas quelle opération il y a entre b² et c².*
- *le choix 2 se traduit par « $a^2 = b^2 + c^2$ ».*
- *le choix 3 se traduit par « $a^2 = (b + c)^2$ »*

② D'après l'égalité de Pythagore écrite, [AB] est l'hypoténuse donc ABC rectangle en C.

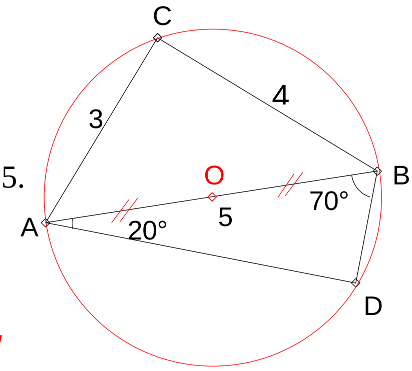
③ TRCC direct et un rapide croquis comme ci-contre nous convainc que le rayon OA vaut la moitié du diamètre BC.



④ D'après TRCC réciproque, à la condition que l'un des côtés du vrai triangle se confond avec l'un des diamètres du cercle alors le triangle est rectangle. Donc le triangle peut être rectangle mais pas toujours.

Quant au choix 3, il semble évident qu'il est faux, un triangle inscrit dans un cercle pouvant être rectangle (TRCC réciproque), isocèle ou équilatéral.

QCM très peu réussi. Ne répondez rien quand vous n'êtes pas sûr plutôt que de perdre des points.



➢ <u>Exercice n° 3 (…………………......... / 5 points)</u> : Points cocycliques. Test 2005.

1. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle.

   Preuve en 4 étapes. (……………………............... / 1,5 + 1 + 1 + 1 pts)

2. Tracer ce cercle. (…………………. / 0,5 pts) *Beaucoup oublient de tracer le cercle !*

1. • On connaît les 3 longueurs du triangle ABC :

⟹ Réciproque de Pythagore.

- *D'une part* $BA^2 = 5^2$
  $= 25$
- *D'autre part* $CB^2 + CA^2 = 3^2 + 4^2$
  $= 9 + 16$
  $= 25$
- *Puisque $BA^2 = CB^2 + CA^2$, alors, d'après la réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en C.*

• Puisque ABD est un triangle, alors on a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} = 180°$$

Donc $\widehat{D} = 180° - 20° - 70°$

$\widehat{D} = 90°$ *!*

Donc ABD rectangle en D.

• Puisque ABC rectangle en C alors, d'après TRCC direct, $C \in \mathcal{C}_{[AB]}$

• Puisque ABD rectangle en D, alors, d'après TRCC direct, $D \in \mathcal{C}_{[AB]}$

• Les 4 points appartiennent donc au cercle $\mathcal{C}_{[AB]}$ de diamètre [AB].

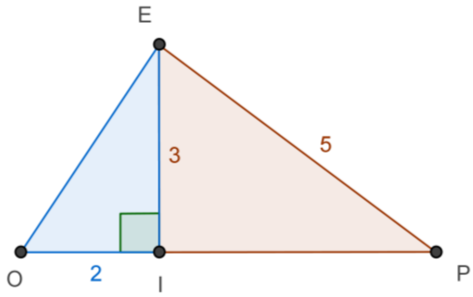
Son centre O est le milieu de [AB].

Son rayon est égal à $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$

➢ <u>Exercice n° 4 (…………………… / 4,5 pts) : Apparences trompeuses.</u>

Sur la figure codée et réduite ci-contre, on sait que :

- les points O, I et P sont alignés.
- OI = 2 ; IE = 3 ; EP = 5.
- les triangles OIE et PIE sont rectangles.



1. Calculer OE^2 ***(on ne demande pas OE)***. (………………….. / 1,5 pts)
2. Calculer la valeur exacte de la longueur IP. (………………. / 1,5 pts)
3. Le grand triangle OEP est-il rectangle ? Justifier. (……………… / 1,5 pts)

1. Puisque OIE rectangle en I, alors, d'après le célèbre théorème de Pythagore direct, on a :

$$OE^2 = IO^2 + IE^2$$
$$OE^2 = 4 + 9$$
$$OE^2 = 13$$

2. Puisque PIE rectangle en I, alors, d'après le célèbre théorème de Pythagore direct, on a :

$$EP^2 = IE^2 + IP^2$$
$$25 = 9 + IP^2$$

Donc $IP^2 = 25 - 9$

$IP^2 = 16$

D'où $IP = \sqrt{16} = 4$ *u.l. v.e.*

Beaucoup d'erreurs dans l'écriture de l'égalité de Pythagore : c'est toujours l'hypoténuse qui doit être isolée dans cette égalité !
Beaucoup de confusions entre IP^2 et IP.

3. • Puisque O, I et P sont alignés, alors :

$$OP = OI + IP$$
$$OP = 2 + 4$$
$$OP = 6$$

• La plus grande longueur du triangle OEP est OP. On connaît les 3 longueurs de OEP et on veut savoir s'il est rectangle ⇒ Pythagore réciproque avec « d'une part, d'autre part etc. ».

- *D'une part on a* $OP^2 = 6^2 = 36$
- *D'autre part* $EO^2 + EP^2 = 13 + 25 = 38$
- *Puisque $OP^2 \neq EO^2 + EP^2$, alors, d'après la conséquence du Théorème de Pythagore, OEP n'est pas un triangle rectangle, contrairement aux apparences !*

NOM et Prénom …………………………………………… *Classe de Quatrième ……* *Contrat 2 Année 2011 2012*

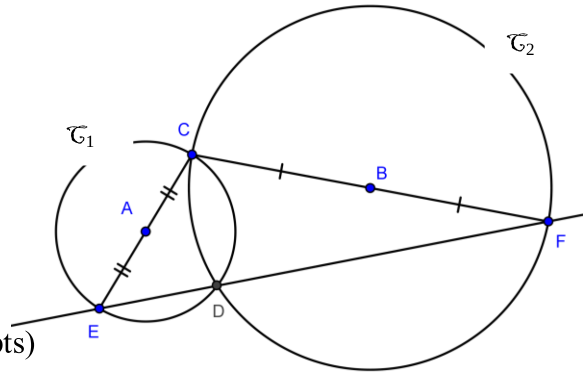
➢ <u>Exercice n° 5 (……………………….. / 4,5 pts)</u> :

Soient deux cercles : $\mathcal{C}_1$ de centre A et $\mathcal{C}_2$ de centre B.

Ces deux cercles se coupent en deux points C et D.

C a pour symétrique E par rapport à A et F par rapport à B.

Vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question pour la question suivante.



1. a) Justifier que [CE] est un diamètre de $\mathcal{C}_1$. (…………… / 0,5 pts)

   b) Quelle est la nature du triangle CDE ? Justifier. (………………… / 1 pt)

2. De la même manière, montrer que (CD) $\perp$ (DF) (…………………… / 0,5 + 1 pt)

3. Déduire des questions 1 et 2 que les points E, D et F sont alignés. (……………………….. / 1 + 0,5 pts)

1. a) Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{C sur le cercle } \mathcal{C}_2 \\ \textit{E symétrique de C par rapport à A le centre du cercle } \mathcal{C}_1\end{array}\right\}$*, alors E est sur le cercle* $\mathcal{C}_1$*.*

Donc [CE] est un diamètre de $\mathcal{C}_1$*.*

1 seule élève a réussi cette question correctement en 2011 !

b) Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{D} \in \mathcal{C}_{[\text{ CE }]} \\ \text{D distinct de C et de E}\end{array}\right\}$*, alors, d'après TRCC réciproque, le triangle CDE est rectangle en D.*

Donc (CD) $\perp$ *(DE).*

2. a) Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{C sur le cercle } \mathcal{C}_2 \\ \textit{F symétrique de C par rapport à B le centre du cercle } \mathcal{C}_2\end{array}\right\}$*, alors F est sur le cercle* $\mathcal{C}_2$*.*

Donc [CF] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$*.*

b) Puisque $\left\{\begin{array}{l}\text{D} \in \mathcal{C}_{[\text{ CF }]} \\ \text{D distinct de C et de F}\end{array}\right\}$*, alors, d'après TRCC réciproque, le triangle CDF est rectangle en D.*

Donc (CD) $\perp$ *(DF).*

3. Puisque $\left\{\begin{array}{l}(\text{CD}) \perp (\text{DE}) \\ (\text{CD}) \perp (\text{DF})\end{array}\right\}$ *alors (DE) // (DF).*

Les droites (DE) et (DF) sont parallèles et ont de plus le point D en commun, donc les droites (DE) et (DF) sont confondues.

Donc les points E, D et F sont alignés.

<u>Autre façon</u> : En utilisant les angles et en montrant que l'angle $\widehat{EDF}$ *est plat.*

$$\begin{aligned}\widehat{EDF} &= \widehat{EDC} + \widehat{CDE} \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°\end{aligned}$$

Puisque $\widehat{EDF} = 180°$*, alors* $\widehat{EDF}$ *est un angle plat donc les points E, D et F sont alignés.*

1 seul élève en 2011 a réussi cette question correctement en passant par les angles !