Corrigé Contrôle C2 : TRCC-PYTHAGORE (55')

Compte rendu :

- *Calculs : Beaucoup de fautes de signe et de quelques fautes de priorité.*

  Calculez directement les mini-produits de type « 2ab », dit 1 000 fois et répété ! Ceux qui ne veulent pas le faire ont toujours faux.
- *Equidistance-Régionnement : Assez bien.*
- *Le gros morceau : les 4 théorèmes + la propriété angulaire de la tangente :*
  - *Quand on vous donne 3 longueurs dans un triangle ⇒ Pythagore réciproque !*
  - *Quand on cherche une longueur dans un triangle rectangle ⇒ Pythagore direct.*
  - *Beaucoup de confusion entre Pythagore direct et sa réciproque.*
  - *L'hypothèse « triangle rectangle » est souvent oubliée pour Pythagore direct.*
  - ***TRCC direct n'est pas su en général.***
  - *Propriété angulaire de la tangente non sue ou mal appliquée.*
- *Plus généralement sur les théorèmes ou propriétés :*
  - *Les théorèmes ne sont pas sus ou mal appliqués : hypothèses manquantes ou non prouvées auparavant.*
  - *Ecrivez les hypothèses en colonnes avec une accolade pour tout de suite voir le nombre d'hypothèses.*
  - *Appliquez RIGOUREUSEMENT, au mot prés, les théorèmes en appliquant les méthodes vues dans le cours.*

    Je n'arrive toujours pas à comprendre pourquoi certains veulent faire à leur sauce : « compliquée, incompréhensible et fausse » plutôt qu'appliquer les méthodes vues en classe : « simples, claires et justes » !
  - *Les preuves en « car » sont interdites : on ne répond jamais en premier à une question, on justifie d'abord !*

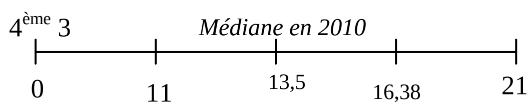
Les notations (droite, segment, longueurs) !

Soyez précis : rectangle où ? Donnez les noms des objets dont vous parlez.

Avoir son matériel ! Vous n'aurez pas le droit d'emprunter le matériel au contrôl

Relisez votre copie.

Médianes = 12,25 sur 20 en 2009 ; 12,13 en 2008.



➢ Exercice n° 1 (…………….……….. / 4 points) : Un peu de calcul ne peut faire que du bien.

$A = 2 - 2\,(\,2 - 2 \div (-2) - 2\,)$ (……….….. / 1 pt)

$= 2 - 2\,(2 \ + 1 \ - 2\,)$

$= 2 - 2 \times 1$

$= 2 - 2$

$= 0$

$E = 2 - 2\,(\,2 - 2 \div (-2)\,) - 2$ (……………….… / 1 pt)

$= 2 - 2\,(\,2 + 1\,) - 2$

$= 2 - 2 \times 3 - 2$

$= 2 - 6 - 2$

$= -6$

Remarque : Les calculs de A et E montrent l'importance de la place des parenthèses qui peut bouleverser l'ordre des calculs.

$M = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = -2$ et $b = 2$ (……..……..... / 1 pt)

Calculez directement les carrés et les mini-produits !!!!!!!!!!!

$= 4 - 8 + 4$

$= 0$

$S = (\,a + b\,)^2$ avec $a = -2$ et $b = 2$ (……………….... / 1 pt)

$= (\,-2 + 2\,)^2$

$= 0^2$

$= 0$

Remarque : On trouve le même résultat pour M et S. En fait, cela est valable quelque soient les valeurs de a et b. En effet, lors du contrat 5 sur le calcul littéral, nous aurons l'occasion de prouver que $(\,a + b\,)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, quelques soient les valeurs de a et b. Cette formule sera revue en 3ème lors du chapitre sur les identités remarquables.

➢ <u>Exercice n° 2 (…………………….… / 3 points)</u> : Keep your distances.

1. Aubin Sahalor veut poser sa serviette de plage mais pas n'importe où ! Celle-ci doit être :
   - plus près de la belle brune que de sa belle mère,

   C'est le demi-plan de frontière la médiatrice de [Belle-mère ; Belle brune] et qui contient la belle brune.
   - à moins de 20 m de son bungalow,

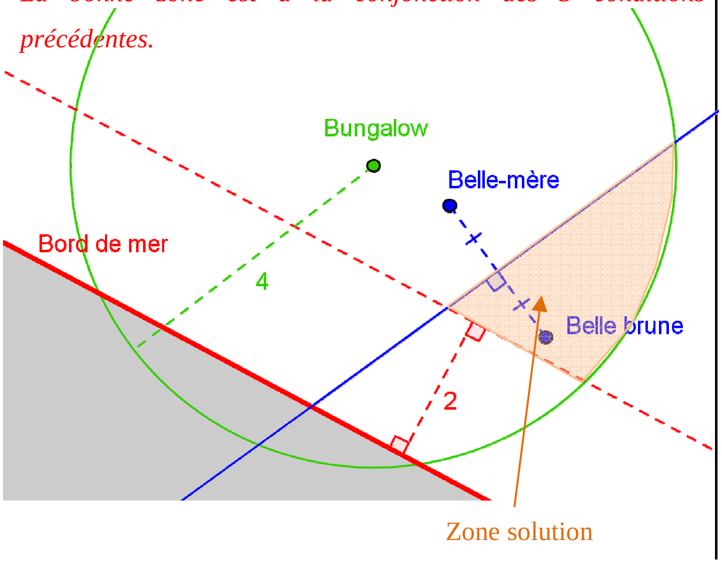
   C'est l'intérieur du cercle de centre le Bungalow et de rayon 4 cm.
   - à plus de 10 m du bord de mer.

   C'est l'extérieur de la bande formée par les deux parallèles situées à 2 cm du bord de mer.

Dans quelle zone va-t-il poser sa serviette ?

Echelle : 1 cm pour 5 m.   (…………………… / 2 pts)

La bonne zone est à la conjonction des 3 conditions précédentes.



2. Du 2 août au 15 septembre 2010, le plan Vigipirate a été renforcé. Il prévoit notamment un périmètre de sécurité autour des bâtiments sensibles.

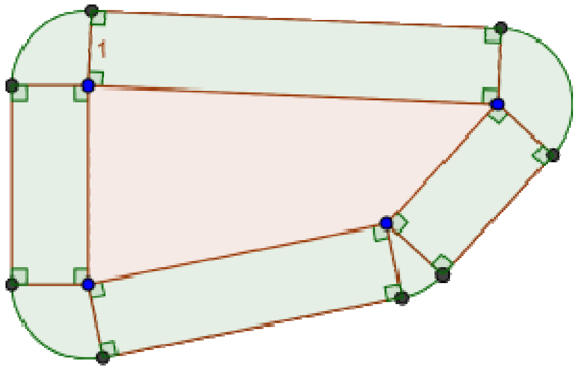
   Voici le plan d'une petite ambassade (1 cm = 5 m). Dessiner le périmètre de sécurité qui doit être établi à 5 m des murs de cette ambassade. (………..……..…… / 1 pt)

<u>*Rappel méthode :*</u>

❶ Contre chaque côté du quadrilatère, construire un rectangle de largeur la distance demandée (ici …… cm).

Faire apparaître les angles droits !

❷ En chaque sommet, compléter par un arc de cercle de centre ce sommet et de rayon la distance demandée (ici 1 cm).



<u>*Rappel :*</u>

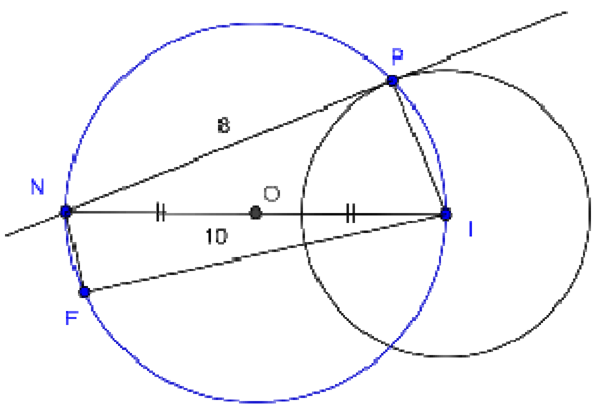
- *distance par rapport à 1 seul point fixe ⇔ ……….…..*
- *distance par rapport à 2 pts fixes ⇔ ….…….………..*
- *distance par rapport à une droite ⇔ ….…….………..*

➢ <u>Exercice n° 3 (……………………....... / 5 points)</u> : Points Cocycliques.

Sur la figure réduite ci-contre, on sait que la droite (PN) est tangente au cercle $\mathcal{C}_I$ de centre I, et que (FN) ⊥ (FI).

De plus, on sait que NI = 10 et NP = 8.

1. Quelle est la nature du triangle PIN ? Justifiez (……………..… / 1 pt).
2. Calculer la longueur PI. (……….………. / 1,5 pts).
3. Montrer que les 4 points P, I, N et F sont sur un même cercle (…..…….……. / 2 pts).
4. Tracer en bleu ce cercle (……………….…. / 0,5 pts).



Il s'agit de l'exercice 4 des contrôles 2010-2009 et 2008-2009 ou du n°3 du test 2009 un peu remanié : on a donné directement un triangle rectangle et c'est Pythagore direct qu'on utilisera cette fois-ci.

On reporte d'abord les mesures sur la figure.

1. *• Puisque la droite (PN) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en P, alors (PI) ⊥ (PN).*

   • Donc le triangle PIN est rectangle en P.

2. *Puisque SEM est rectangle en M, alors, d'après le Théorème de Pythagore, version directe, on a :*

$NI^2 = PN^2 + PI^2$

$10^2 = 8^2 + PI^2$

$100 = 64 + PI^2$

Donc $PI^2 = 100 - 64 = 36$

Donc $PI = \sqrt{36} = 6$ *u.l* *car PI est une longueur donc une quantité positive.*

La longueur PI est de 6 unités de longueur (u.l.).

3. • *Puisque PIN rectangle en P alors, d'après TRCC direct, P sur le cercle* $\mathcal{C}_{[NI]}$ *de diamètre [NI].*

   • *Puisque FIN rectangle en F alors, d'après TRCC direct,* $F \in \mathcal{C}_{[NI]}$.

   • *Les 4 points appartiennent donc au cercle* $\mathcal{C}_{[NI]}$ *de diamètre [NI].*

Son centre O est le milieu du diamètre [NI]. Son rayon est égal à NI/2.

4. *Pour tracer ce cercle, on place d'abord le milieu O du diamètre [NI]. Puis on trace le cercle de diamètre [NI].*

➢ <u>Exercice n° 4 (……………………. / 1,5 pts + bonus 1 pt) :</u> D'après le Brevet 2009.

Soit ABC un triangle tel que : AB = 16 cm, AC = 14 cm et BC = 8 cm. (Calculatrice autorisée pour cet exercice).

1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier. (……………………. / 1,5 pts)

La plus grande longueur est AB. On connaît les 3 longueurs de ABC et on veut savoir si ABC est rectangle ⇒ Pythagore réciproque avec « d'une part, d'autre part etc. ».

- *D'une part on a* $AB^2 = 16^2$
  $= 256$
- *D'autre part* $CA^2 + CB^2 = 14^2 + 4^2$
  $= 196 + 64$
  $= 260$
- *Puisque* $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$*, alors, d'après la conséquence du Théorème de Pythagore, ABC n'est pas un triangle rectangle.*

2. Le mathématicien grec Héron d'Alexandrie (I[er] siècle après J.C.) a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle quelconque (sans utiliser de hauteur).

En notant a, b et c les longueurs des trois côtés d'un triangle et $\mathcal{P}$ son périmètre, l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{2}\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - a\right)\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - b\right)\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - c\right)}$$

En appliquant cette formule, calculer l'aire du triangle ABC, arrondie au cm² près. (…………………….. / bonus 1 pt)

Calculons d'abord le périmètre de ABC : $\mathcal{P}$*(triangle ABC) = AB + BC + CA*

$= 16 + 8 + 14$

$= 38$ *cm.*

Maintenant, on peut appliquer la formule de Héron.

$$\mathscr{A}(\text{triangle ABC}) = \sqrt{\frac{\mathscr{P}}{2}\left(\frac{\mathscr{P}}{2} - a\right)\left(\frac{\mathscr{P}}{2} - b\right)\left(\frac{\mathscr{P}}{2} - c\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{38}{2}\left(\frac{38}{2} - 16\right)\left(\frac{38}{2} - 8\right)\left(\frac{38}{2} - 14\right)}$$

$$= \sqrt{19 \times 3 \times 11 \times 5}$$

$$= \sqrt{3\,135} \quad \text{valeur exacte.}$$

$$\approx 56 \text{ cm}^2 \quad \text{valeur approchée à l'unité.}$$

L'aire du triangle ABC est exactement de $\sqrt{3\,135}$ cm² soit environ 56 cm².

Question réussie correctement une seule fois sur 26 élèves !

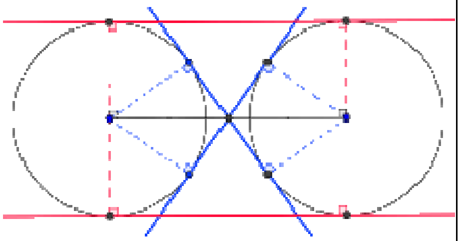
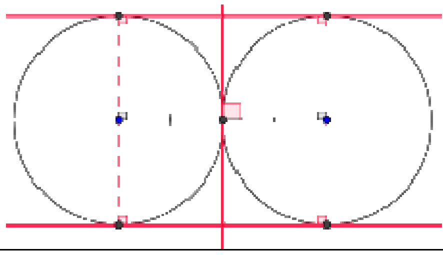
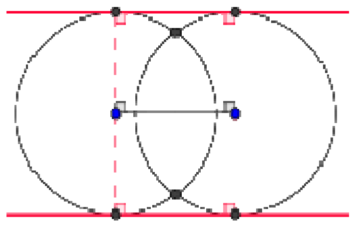
➢ Exercice n° 5 (……………………….. / 7,5 pts) : Tangentes communes à deux cercles de même rayon.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Vous avez le droit d'utiliser le résultat d'une question pour la question suivante.

Le but de cet exercice est de tracer les tangentes communes à deux cercles non confondus mais de même rayon, ***c-à-d les droites qui sont en même temps tangentes à ces deux cercles.***

• Partie 1 : Donc soient deux cercles non confondus et de même rayon. Trois configurations seulement sont possibles, elles sont listées dans le tableau ci-dessous. Pour chacune de ces trois configurations : (…………………………...... / 3 pts)

1. Tracer le deuxième cercle de même rayon.
2. Tracer en bleu (à peu près) les tangentes communes à ces deux cercles.
3. Indiquer le nombre de tangentes communes.

Cas ❶ Cercles disjoints : les deux cercles n'ont aucun point commun.	Cas ❷ Cercles tangents : les deux cercles ont un unique point commun.	Cas ❸ Cercles sécants : les deux cercles se coupent en 2 points.
		
Nb de tangentes communes : 4	Nb de tangentes communes : 3	Nb de tangentes communes : 2

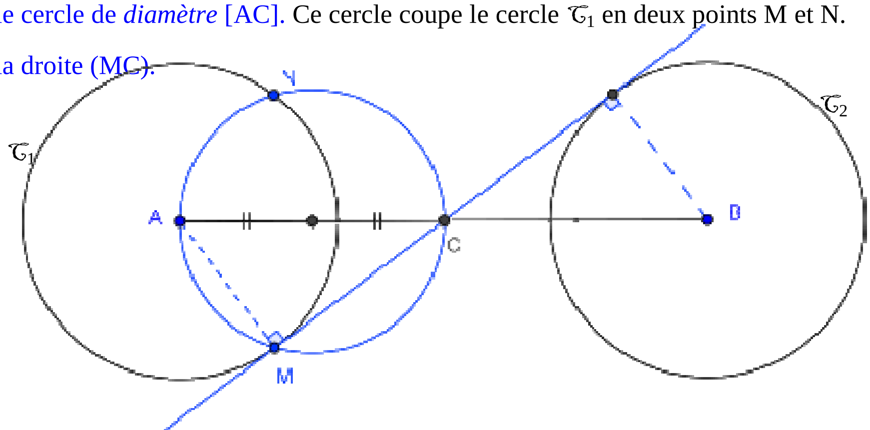
• *Partie 2 : On va maintenant s'intéresser en détail au cas ❶ (cercles disjoints), plus particulièrement aux deux tangentes communes qui ne sont pas parallèles entre-elles.*

Donc soient deux cercles disjoints mais de même rayon : $\mathscr{C}_1$ de centre A et $\mathscr{C}_2$ de centre B (voir figure ci-dessous).

Soit C le milieu du segment joignant les deux centres A et B. On note que : comme les deux cercles ont le même rayon et que C est le milieu de [AB], alors C est le centre de symétrie de la figure. Donc les deux cercles sont symétriques par rapport à C.

1. Tracer en bleu le cercle de *diamètre* [AC]. Ce cercle coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ en deux points M et N.

   Tracer en bleu la droite (MC).



2. Montrer que le triangle AMC est rectangle. (…………………………… / 1,5 pts)

Puisque $\begin{cases} \text{M} \in \mathcal{C}_{[\text{AC}]} \\ \text{M distinct de A et de C} \end{cases}$, *alors, d'après TRCC réciproque, le triangle AMC est rectangle en M.*

Donc (AM) ⊥ (MC).

3. En déduire que la droite (MC) est tangente au cercle $\mathcal{C}_1$. (…………………………… / 1 pt)

Puisque $\begin{cases} \text{① (AM)} \perp \text{(MC)} \\ \text{② M est sur le cercle de centre A} \end{cases}$, *alors (MC) est tangente en M au cercle* $\mathcal{C}_1$ *de centre A.*

4. En utilisant la symétrie centrale de centre C, montrer que la droite (MC) est aussi tangente au deuxième cercle $\mathcal{C}_2$. (………………………………….. / 1 pt) *Question jamais réussie !*

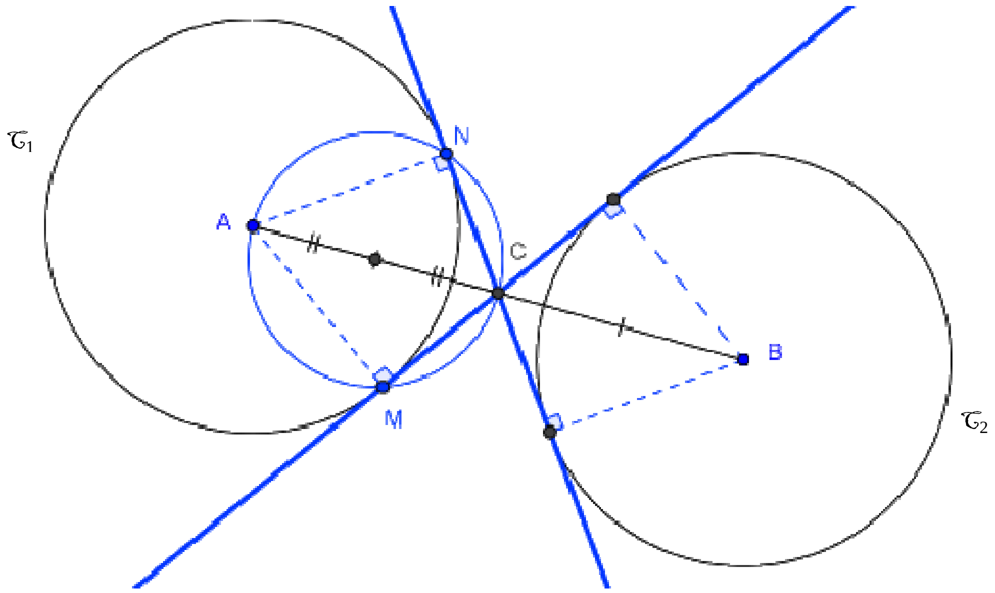
- $\mathcal{C}_1$ *a pour symétrique* $\mathcal{C}_2$ *par la symétrie centrale de centre C.*
- *Puisque la droite (MC) passe par le centre C de la symétrie, alors (MC) a pour symétrique elle-même.*
- *De plus (MC) est tangente à* $\mathcal{C}_1$*, donc, par conservation de la perpendicularité par la symétrie centrale, la symétrique de la droite (MC), c-à-d elle-même, sera aussi tangente au symétrique du cercle* $\mathcal{C}_1$*, c-à-d* $\mathcal{C}_2$*.*
- *Finalement (MC) est aussi tangente au cercle* $\mathcal{C}_2$*.*

5. Application : *Question très peu réussie !*

Sur la figure ci-contre, construire à la règle et au compas **(pas d'équerre !)**, les deux tangentes non parallèles, communes à ces deux cercles de même rayon.

Laisser tous les traits de construction nécessaires et les codages. (……...…………..…. / 1 pt)

Comme il s'agit d'une application, il suffit de s'inspirer de la figure au dessus !



① On construit C le milieu du segment [AB] joignant les deux centres.

② On trace le cercle de diamètre [AC]. Il coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ *en deux points M et N.*

③ On trace les deux droites (MC) et (NC). D'après la partie 2, ces deux droites sont tangentes communes aux deux cercles (sans être parallèles puisqu'elles sont sécantes en C sans être confondues).