LES PUISSANCES

« Les Nombres sont le plus haut degré de la Connaissance.
Le Nombre est la Connaissance même. » Platon[1]

- *Matériel :* Vous aurez besoin de votre **calculatrice scientifique** pour ce cours.

- *Pré requis pour prendre un bon départ :*

	A refaire	*A revoir*	*En cours d'acquisition*	*Maîtrisé*
Additions et Soustractions de nombres relatifs.				
Multiplications par 10 ou 100 ou 1 000 etc.				
Divisions par 10 ou 100 ou 1 000 etc.				
Multiplications par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc.				
Divisions par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc.				
Nombres « au carré » ou « au cube » : $3^2 =$ …… $(-5)^2 =$ ….. $-5^2 =$ …..				
Nombres inverses.				
Diviser par un nombre revient à …………………………………………….				
Conversions usuelles pour les longueurs, surfaces, volumes, durées…				

[1] Platon, 428-328 av. JC : Grand philosophe grec, disciple et rapporteur de Socrate. Il comptera parmi ses élèves Aristote.

NOM et Prénom : ……………………………………. *4ème ……*

I. RAPPELS DE SIXIEME.

① Multiplications par 10 ou 100 ou 1 000 etc. :

$25 \times 1\,000 =$ $87 \times 10\,000 =$ $8{,}7 \times 100 =$

$2{,}78 \times 10 =$ $8{,}007 \times 100 =$ $5{,}87 \times 1\,000\,000 =$

$0{,}54 \times 10 =$ $0{,}54 \times 1\,000 =$ $0{,}002 \times 100 =$

$0{,}00458 \times 10 =$ $0{,}0578 \times 100\,000 =$ $5{,}024 \times 100 =$

② Multiplications par 0,1 ou 0,01 ou 0,001 etc. :

$54 \times 0{,}1 =$ $897{,}1 \times 0{,}01 = 8{,}971$ $25 \times 0{,}001 =$

$0{,}45 \times 0{,}1 =$ $215\,400 \times 0{,}1 =$ $0{,}004 \times 0{,}01 =$

③ Divisions par 10 ou 100 ou 1 000 etc. :

$\frac{54}{10} = 5{,}4$ $\frac{897{,}1}{100} =$ $\frac{25}{1\,000} =$

$\frac{0{,}45}{10} =$ $\frac{215\,400}{10} =$ $\frac{0{,}004}{100} =$

En passant, on remarque que les résultats du ③ sont ……………………………… à ceux du ②.

Rappel : ***Diviser par un nombre ($\neq 0$) revient à ……………………….….. par son ……….…………..***

II. LES PUISSANCES DE 10.

A. Les limites de l'écriture décimale et du bon Français :

Dans le tableau ci-dessous, que signifient les lettres c, d, et u ? ……………………………………………..

Question n°				*Trillions d'unités*						*Billions d'unités*			*Milliards d'unités*			*Millions d'unités*			*Milliers d'unités*			*Unités*		
	c	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*
1.																								
2.																								
3.																								
4.																								

1. Placer le nombre mille milliards dans le tableau. *Combien de zéros possède ce nombre ?* ....

2. Le diamètre de la Voie Lactée, notre galaxie est de un milliard de milliards de kilomètres.

Placer ce nombre dans le tableau. *Combien de zéros possède ce nombre ?* …….

3. Le Capitaine Haddock jurait "Mille milliards de mille sabords !". Ecrire ce nombre dans le tableau. *Combien de zéros possède-t-il ?* ………. Reformuler ce nombre de « sabords » avec moins de mots, de façon correcte : ……………………………………………………………………….. Pas facile hein !

4. La masse de la planète Neptune est de 100 000 000 000 000 000 000 000 de tonnes. Placer ce nombre dans le tableau puis l'écrire en Français : ……………………………………………………………..

- La manipulation précédente de ces nombres « hyper » grands est-elle commode ? ……….

Effectivement non ! Comprenez-vous maintenant le titre IIA] page précédente ? ……….

De plus, ces très grands nombres ne sont pas facilement manipulables à la calculatrice (à cause du nombre limité de chiffres sur l'écran de la calculatrice) et posent des problèmes de lecture à l'écran.

- **L'idéal serait de trouver une nouvelle écriture de ces nombres plus courte donc plus pratique.**

Ecrivez cent millions en chiffres : ………………….………… Combien comporte-t-il de zéros ? ……..

Voici une notation plus condensée (courte) qui permet d'écrire ce nombre : $\mathbf{10^8}$.

10^8 se lit « 10 puissance 8 » ou « 10 exposant 8 » (ou « puissance 8^ième^ de base 10 »).

Que peut bien représenter ce 8 en exposant dans 10^8 ? …………………………

- Complétez en colonne :

$10 = 10^{\dots}$	$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ ……………..
$10 \times 10 = 100 = 10^{\dots}$	$10^5 =$ …………………………..……... = …………
$10 \times 10 \times 10 =$ ………….. $= 10^{\dots}$	$10^6 =$ ………………………….………… = …………

Généralisons.

B. Cas des puissances positives de 10 : définitions.

❶ Par convention : $\boxed{10^0 = 1 \quad \text{et} \quad 10^1 = 10}$

Soit n un nombre entier positif supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$),

❷ 10^n est par définition le produit de n facteurs tous égaux à 10.

Autrement dit **:** **pour $n \geq 2$,** $\boxed{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \text{etc.} \times 10}_{\text{produit de n facteurs 10}}}$

<u>Deux exemples :</u>
$10^3 = 10 \times 10 \times 10$
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$

❸ $\mathbf{10^n}$ se dit « **10 puissance n** » ou « **10 exposant n** » ou « **puissance n^ième^ de base 10** ».

- <u>Application</u> : En vous aidant du tableau II-A] page précédente, écrire sous forme de puissances de 10 les quantités suivantes :

Le diamètre de la Voie Lactée, notre galaxie : .... km.

Le nombre de sabords du Capitaine Haddock : ....

La masse de la planète Neptune : .... tonnes.


The Milky Way

Ces écritures sont elles plus simples et plus commodes qu'en IIA] page précédente ? ……..

Voyons maintenant les opérations entre ces puissances de 10.

C. Multiplications et divisions de puissances de 10 :

➢ Complétez suivant le modèle :

• $\mathbf{10^2 \times 10^3} = \underbrace{(10 \times 10)}_{\text{2 facteurs}} \times \underbrace{(10 \times 10 \times 10)}_{\text{3 facteurs}} = 100\ 000 = \mathbf{10^5} = \mathbf{10^{2+3}}$

$\mathbf{10 \times 10^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{10^{\ldots}} = \mathbf{10^{\ldots + \ldots}}$

• $\dfrac{\mathbf{10^3}}{\mathbf{10^2}} = \dfrac{10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10 = \mathbf{10^1} = \mathbf{10^{3-2}}$

$\dfrac{\mathbf{10^5}}{\mathbf{10^2}} = \dfrac{}{} = \ldots\ldots\ldots = \mathbf{10^{\ldots}} = \mathbf{10^{\ldots - \ldots}}$

➢ Maintenant calculer *directement, sans détailler* :

$10^{45} \times 10^{23} = 10^{\ldots}$ $\qquad 10^{33} \times 10^{23} =$ $\qquad \dfrac{10^{21}}{10^{18}} = 10^{\ldots}$ $\qquad \dfrac{10^{55}}{10^{33}} =$

➢ Généralisons :

❶ Multiplication de puissances de 10 :

Soient n et m, 2 entiers positifs, $\boxed{\mathbf{10^n \times 10^p = 10^{n \ldots\ldots p}}}$ Ex : $10^{12} \times 10^7 = 10^{19}$

❷ Division de puissances de 10 :

Soient n et m, 2 entiers positifs, $\boxed{\dfrac{\mathbf{10^n}}{\mathbf{10^p}} = \mathbf{10^{n \ldots\ldots p}}}$ Ex : $\dfrac{10^{12}}{10^5} = 10^7$

D. Cas des puissances négatives de 10 :

Compléter : $0{,}1 = \dfrac{1}{\ldots\ldots} = \dfrac{10^{\ldots\ldots}}{10^{\ldots\ldots}} = 10^{\ldots\ldots - \ldots\ldots} = 10^{\ldots\ldots}$

On retrouve la notation puissance négative utilisée pour les inverses dans le contrat sur les fractions :

« l'inverse de 10 » $= \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} = \mathbf{10^{-1}} = \mathbf{0{,}1}$

➢ Généralisons :

❶ **10^{-1} est l'inverse de 10.**

Autrement dit : $\boxed{\mathbf{10^{-1} = \dfrac{1}{10}}}$

❷ Soit n un nombre entier relatif, alors **10^{-n} est l'inverse de 10^n.**

Autrement dit : $\boxed{\mathbf{10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}} \left(= \dfrac{\mathbf{1}}{\underbrace{\mathbf{10 \times 10 \times (etc.) \times 10}}_{\text{n facteurs}}} \right)}$ Ex : $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5}$

➢ Deux réflexes :

- Dés que vous voyez un **signe « – » en exposant**, il faut penser **« inverse de »** !
- Réciproquement, dés que vous voyez des **inverses**, il faut penser **« puissances négatives »** !

➢ Trois remarques :

- Les deux formules fondamentales « $10^n \times 10^p = 10^{n\,\dots\dots\,p}$ » et « $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n\,\dots\dots\,p}$ » restent évidemment valables pour les puissances négatives !

- Quand n est un grand nombre, 10^n est un nombre gi…………………………………

Citons le Gogol ou Googol (= 10^{100}), nombre devenu très célèbre grâce un moteur de recherche.

Avec ce nombre, on dépasse le nombre d'atomes dans l'Univers ! A titre de comparaison, le nombre de cheveux sur toutes les têtes de la population mondiale est de l'ordre de 10^{15} seulement !

- Inversement, quand n est un grand nombre, 10^{-n} est un nombre ridiculement p…………….. !

C'est pourquoi les puissances négatives de 10 sont utilisées pour représenter les quantités minuscules.

Par exemple, sur les commandes électriques de vol de l'Airbus A380, le taux de pannes doit être de l'ordre de 10^{-9}, soit une panne au maximum pour 1 milliard de vols !

➢ Application : Donnez les écritures sous forme de puissance négative de 10 des nombres suivants :

1. Certains microbes ont une longueur de 0,000 001 m = 10^{-6} m **(la virgule s'est déplacée de 6 crans vers la droite pour arriver après le chiffre 1 donc -6 en exposant de 10).**

Comment se dit ce nombre en Français ?...

2. Les dimensions d'un atome sont de l'ordre de 0,000 000 000 1 m = …………..

3. Des vieux ordinateurs exécutent une instruction en 0,000 000 01 secondes = ………

III. ECRITURE SCIENTIFIQUE.

On peut trouver dans une encyclopédie les informations suivantes :

- La population de la Terre est évaluée à 7 100 000 000 d'individus en décembre 2012.

Ecrivons à l'aide des puissances de 10 ce nombre : 7 100 000 000 = 7,1 × 1 000 000 000 = $7{,}1 \times 10^9$

- La distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 000 000 km :

  150 000 000 km = 1,5 × ………………………….. km = …..… × ……..... km

- Le diamètre d'un cheveu est de 0,000 065 m.

Ecrivons à l'aide des puissances de 10 ce nombre : 0,000 065 m $= \dfrac{6{,}5}{100\,000} = \dfrac{6{,}5}{10^5} = 6{,}5 \times 10^{-5}$ m.

- Un atome a une taille d'environ 0,000 000 000 12 m :

$$0{,}000\,000\,000\,12 \text{ m} = \frac{1{,}2}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = \frac{1{,}2}{10^{\dots\dots}} = \dots\dots \times \dots\dots\dots \text{ m}$$

Tous ces nombres ont pu être écrits comme produit d'un nombre décimal (entre 1 inclus et 10 exclu) avec une puissance entière (positive ou négative) de 10.

Cette écriture s'appelle l'écriture ………………………………..

A. Définition de l'écriture scientifique :

❶ L'écriture scientifique d'un nombre est l'écriture de type : $\boxed{a \times 10^n}$

avec $1 \leq a < 10$ (a entre 1 inclus et 10 exclu) et n un entier relatif.

*Autrement dit, **a** est un nombre décimal ayant **un seul chiffre non nul avant la virgule** et n est un entier de signe quelconque.*

❷ « **a** » s'appelle la **mantisse.** ❸ « **n** » s'appelle l'**exposant**.

Utilité : L'écriture scientifique d'un nb indique l'ordre de grandeur (donné par la puissance de 10) de ce nb.

- Exemple :

On a les égalités : $150\,000\,000 = 15 \times 10^7 = 1{,}5 \times 10^8 = 0{,}15 \times 10^9$

Et pourtant, seule l'écriture $1{,}5 \times 10^8$ est une écriture scientifique ! En effet, seul 1,5 est compris entre 1 inclus et 10 exclu ($1 \leq 1{,}5 < 10$), contrairement à 15 et 0,15.

- Mémento :

Notez dans l'exemple ci-dessus que, **pour conserver les égalités** :

Lorsque la mantisse augmente « a↑ », l'exposant diminue « n↓ ».

et inversement **Lorsque la mantisse diminue « a↓ », l'exposant augmente « n↑ ».**

B. Exercices sur l'écriture scientifique (e.s.) :

① Parmi ces nombres, certains ne sont pas en écriture scientifique. Réécrivez-les en écriture scientifique.

$0{,}256 \times 10^2 =$	$10{,}1 \times 10 =$	$210 \times 10^3 =$
$0{,}256 \times 10^{-2} =$	$1 \times 10^6 =$	$322{,}1 \times 10^{-2} =$
$0{,}006 \times 10^5 =$	$0{,}0005 \times 10^{-3} =$	$10 \times 10^{-1} =$

② Ecrivez les nombres suivants en format scientifique :

- L'année lumière est une unité de distance ! C'est la distance parcourue par la lumière en une ………..…………….. ! 1 année lumière = 9 500 000 000 000 km =
- La masse de la Terre est de l'ordre de 5 977 000 000 000 000 000 000 tonnes =
- La population terrestre en 2025 devrait être à peu près de 8 600 000 000 d'habitants =
- Les fibres optiques ont un diamètre de 0,000 008 m =
- Au loto, la probabilité de trouver les 6 bons numéros parmi 49 est de 0,000 000 072 =

(soit à peu près 1 chance sur 14 millions !!)

③ Ecrivez sous forme décimale (exercice pas marrant du tout !) :

- La vitesse de la lumière est de 3×10^5 km par seconde =
- Notre galaxie, la Voie Lactée, contient environ 2×10^{11} étoiles =
- Un virus de type classique peut être assimilé à un cube d'arête 2×10^{-7} m =
- Un puissant microscope peut mesurer une distance de $0{,}02 \times 10^{-9}$ m =

Allez voir la superbe animation flash 

(tapez dans un moteur de recherche « scaleofuniverse »).

C. Comparaison de 2 nombres en écriture scientifique :

L'écriture scientifique sert en fait énormément pour comparer des quantités :

Méthode : Pour comparer deux nombres ***DEJA MIS EN ECRITURE SCIENTIFIQUE*** **:**

Etape ❶ : On commence par comparer leurs ordres de grandeur (donnés par les puissances de 10) :

Les nombres sont alors classés dans le même ordre que leurs exposants de 10.

Etape ❷ : Si les ordres de grandeur sont les mêmes (exposants égaux) :

Les nombres sont alors classés dans le même ordre que leurs mantisses.

➢ 3 exemples :

- $8{,}2 \times 10^6 < 7 \times 10^9$ car l'un est de l'ordre du million (10^6), l'autre du milliard (10^9).
- $1{,}121 \times 10^{-5} > 1{,}12 \times 10^{-5}$ car ordres de grandeur égaux (10^{-5}) mais mantisse 1,121 > mantisse 1,12.
- **Attention ! Pour appliquer cette méthode de comparaison, il faut absolument que les nombres soient déjà mis en écriture scientifique.**

Contre exemple : On a $5 \times 10^3 < 700\,000 \times 10^2$ bien que exposant 3 > exposant 2 ! Donc attention !

➢ Application : Ranger par ordre croissant les 6 nombres suivants :

5×10^5 $0{,}51 \times 10^6$ 7×10^{-2} 700×10^{-3} $0{,}071 \times 10$ $5\,000 \times 10^3$

IV. PUISSANCES ENTIERES D'UN NOMBRE RELATIF.

On va généraliser le concept de puissances de 10 à des puissances de base autre que 10.

A. Définitions :

Exemples : Que signifie 5^2 ? Vous savez que 5^2 = …….. × …….. = …..….. (et non 10 !)

De même, 2^3 =…….. × ………. × ………. = ……… (et non 6 !)

➢ Plus généralement :

Cinq définitions : Soient a un nombre relatif non nul et n un nombre entier relatif :

- $\mathbf{a^0 = 1}$ Tout nombre à la puissance …. donne toujours …. Ex : $(-7{,}8)^0$ = ….. = ……
- $\mathbf{a^1 = a}$ Tout nombre à la puissance ….. redonne ………………..... Ex : $1{,}7^1$ = …….. $(-5)^1$ = ……
- Pour $n \geq 2$, $\mathbf{a^n = a \times a \times (etc.) \times a}$ (produit de ….... facteurs tous égaux à …..)

On lit « a puissance n » ou « a exposant n » ou « puissance $n^{\text{ième}}$ de **base a** ». Ex : $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$

Remarque : a^2 se dit « a au carré ou le carré de a » et a^3 se dit « a au cube ou le cube de a ».

- $\mathbf{a^{-1} = \dfrac{1}{a}}$ L'inverse de a s'écrit a^{-1} c-à-d $\dfrac{1}{a}$. Ex : 3^{-1} = ……. π^{-1} = …… $\dfrac{1}{y}$ = …..
- Pour $n \geq 0$, $\mathbf{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{a \times a \times (etc.) \times a}}$ Ex : L'inverse de 7^5 s'écrit $7^{\cdots\cdots}$ = $\dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots}$

B. Trois cas particuliers :

1. Puissance de 0 :

En fait, les définitions page précédente s'étendent aussi aux puissances de 0 (**sauf 0^0 qui n'existe pas !**) :

Quelque soit la valeur de $n \neq 0$, $0^1 = 0^2 = 0^3 = \mathbf{0^n = \ldots\ldots\ !}$

c-à-d **0 mis à n'importe quelle puissance (sauf 0^0 qui n'existe pas) donne toujours …… !**

2. Puissances de 1 :

Les puissances de 1, c'est facile ! Quelque soit la valeur de n :

$1^0 = 1^1 = 1^2 = \mathbf{1^n = \ldots\ldots}$ **1 mis à n'importe quelle puissance donne toujours …... !**

3. Puissances de (-1) :

$(-1)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots$ $(-1)^4 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots$ $\mathbf{(-1)^{\text{puissance paire}} = \ldots\ldots}$ $(-1)^{-848} =$

$(-1)^1 = \ldots\ldots$ $(-1)^3 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\mathbf{(-1)^{\text{puissance impaire}} = \ldots\ldots}$ $(-1)^{6/2} =$

(-1) à une puissance *paire* donne toujours ….. (-1) à une puissance *impaire* donne toujours …..

Plus généralement : $(-a)^{\text{puissance paire}}$ est de signe …….. $(-a)^{\text{puissance impaire}}$ est de signe …..

C. Trois erreurs à éviter :

❶ **<u>Erreur d'opération :</u> Confondre multiplication et puissance.**

$3^2 = \ldots \times \ldots = \ldots\ldots$ est différent de $3 \times 2 = \ldots\ldots$

$3^2 \neq 3 \times 2$! Cette erreur d'opération est constamment faite par les élèves !

❷ **<u>Erreur de signe :</u> La puissance agit sur le nombre juste devant l'exposant ou entre parenthèses.**

$-7^2 = -(7)^2 = -(\ldots\ldots \times \ldots\ldots) = \ldots\ldots$ est différent de $(-7)^2 = (-7) \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$!

$-7^2 \neq (-7)^2$! Cette erreur de signe est souvent faite par les élèves !

❸ **<u>Erreur de priorité :</u> La puissance est toujours prioritaire sur les 4 autres opérations de base.**

$2 \times 4^2 = 2 \times (4)^2 = \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots$ est différent de $(2 \times 4)^2 = (\ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots\ldots$

$5 + 3^2 = 5 + (3)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$ est différent de $(5 + 3)^2 = (\ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots\ldots$

$2 \times 4^2 \neq (2 \times 4)^2$ et $5 + 3^2 \neq (5 + 3)^2$! Ces erreurs de priorité sont constamment faites par les élèves !

Voici donc le nouvel ordre de priorités des calculs :

1. **Parenthèses ou Crochets en commençant par les plus intérieurs.**
2. **Puissances.**
3. **Multiplications et Divisions.**
4. **Additions et Soustractions.**

- <u>Exercice</u> : Ces 4 calculs sont faux ! Notez le type d'erreur puis corrigez-les.

$-5^2 = 25$ $5 \times 2^2 = 10^2 = 100$ $2^2 + 3^2 = 5^2 = 25$ $9^2 = 18$

Passons maintenant aux opérations sur les puissances d'un entier quelconque.

V. LES 5 REGLES DE CALCUL SUR LES PUISSANCES ENTIERES.

On va évidemment retrouver des formules similaires à celles pour les puissances de 10.

Soient donc 2 bases décimales relatives non nulles « a » et « b » et 2 exposants entiers relatifs « n » et « p » :

A. Produit « mêmes bases ; exposants différents » :

Compléter en suivant le modèle :

$\mathbf{2^4 \times 2^2} = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \mathbf{=} \mathbf{2^6} = 2^{4+2}$

$3^2 \times 3^4 =$

$a^3 \times a^4 =$

Généralisons :	Formule ❶	$a^n \times a^p = a^{\cdots\cdots\cdots}$

B. Quotient « mêmes bases ; exposants différents » :

Compléter en suivant le modèle :

$\frac{\mathbf{3^4}}{\mathbf{3^2}} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 3 \times 3$ (on a simplifié la fraction) $= \mathbf{3^2} = \mathbf{3^{4-2}}$

$\frac{7^5}{7^4} =$ $\frac{b^6}{b^4} =$

Généralisons :	Formule ❷	$\frac{a^n}{a^p} = a^{\cdots\cdots\cdots}$

C. Produit « bases différentes ; mêmes exposants » :

$\mathbf{2^4 \times h^4} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times h \times h \times h \times h = 2h \times 2h \times 2h \times 2h \mathbf{=} \mathbf{(2\,h)^4}$

$4^2\, y^2 =$

$a^3\, b^3 =$

Généralisons :	Formule ❸	$a^n \times b^n = (\ldots\ldots \times \ldots\ldots)^{\cdots}$ ⚠

D. Quotient « bases différentes ; mêmes exposants » :

$\frac{\mathbf{2^3}}{\mathbf{5^3}} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \mathbf{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$

$\frac{k^2}{3^2} =$ $\frac{a^3}{b^3} =$

Généralisons :	Formule ❹	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)^{\cdots\cdots}$ ⚠

E. Puissance de puissance :

$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2}$ (d'après la formule 1) $= 5^6 = 5^{2 \times 3}$

$(p^3)^4 =$

Généralisons	Formule ❺	$(a^n)^p = a^{\cdots\cdots\cdots\cdots}$

F. Sévères mises en garde :

➢ **PAS DE FORMULES POUR L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION DE PUISSANCES !**

Pas convaincu ? : Calculer d'une part $5^2 - 2^2 =$ d'autre part $(5 - 2)^2 =$

Ainsi, $5^2 - 2^2$ est différent de $(5 - 2)^2$!

Ce problème de l'addition et de la soustraction déjà rencontré dans le contrat sur les ………………...…….. est encore présent pour les puissances et le sera encore pour les racines carrées en 3ème.

En 3ème, nous verrons des formules spéciales pour $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$: ce sont les Identités Remarquables.

➢ **PAS DE FORMULE « BASES DIFFERENTES ; EXPOSANTS DIFFERENTS » !**

Pas convaincu ? : Calculer d'une part $1^6 - 2^3 =$ d'autre part $(1 - 2)^{6-3} =$

Ainsi, $1^6 - 2^3$ est différent de $(1 - 2)^{6-3}$!

VI. FORMULAIRE.

Récapitulez ci-dessous les 5 définitions p.7, les 3 cas particuliers p.8 et les 5 formules p.9 et 10 :

5 définitions (p.7) :	3 cas particuliers (p.8) :	5 formules (p.9 et 10) :
❶	❶	❶
❷	❷	❷
❸	❸	❸
❹		❹
❺		❺
		Ces 5 formules fonctionnent selon le principe « Même Base » ou « Même exposant ».

Evidemment, à partir de maintenant, on utilisera *directement* toutes ces formules !

VII. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LES PUISSANCES.

A. Exercices sur les puissances de 10 :

➢ **Exercice 1 :** Ecrire les nombres suivants sous la forme 10^n, où n est un entier relatif :

1 000 = 10 = 1 = 0,01 = 0,000 001 =

$\frac{1}{10} =$ $\frac{1}{10\,000} =$ $\frac{1}{10^2} =$ $\frac{1}{10^{63}} =$ $\frac{1}{10^{-1}} =$ $\frac{1}{10^{-3}} =$

cent millions = un centième = un millionième =

➢ **Exercice 2 :** Compléter les égalités avec des puissances de dix :

234,56 × ……….. = 23 456 ……….... × 9,875 = 9 875 8 × ……….. = 0,8

……….... × 48 = 0,000 48 0,099 × ……….. = 99 …………... × 20 = 0,000 002

➢ **Exercice 3 :** Compléter les égalités :

10^3 × ……..…..... = 4 000 …………….. × 10^{-2} = 4,21 10^2 × …………... = 70 000

……………... × 10^{-1} = 2,5 10^0 × …………... = 52 …………….. × 10^{-3} = 9

➢ **Exercice 4 : Conversions.** Compléter à l'aide d'une puissance de dix.

1 km = ... cm 1 t = ... kg 1 km² = ... m^2 1 cm^3 = ... m^3

(1 cm = ... m 1 g = …………….. kg 1 cm² = ... m² 1 m^3 = ... litre)

hm² = ha		*dam²*		*m²*		*dm²*		*cm²*	
d	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*

m³			*dm³*			*cm³*			*mm³*		
					l	*dl*	*cl*	*ml*			

B. Exercices sur l'écriture scientifique :

➢ **Exercice 1 :** Parmi les six nombres suivants, quatre ne sont pas en notation scientifique. Retrouvez les et écrivez les en notation scientifique.

$3{,}71 \times 10^{-9}$ 10×10^5 $0{,}4 \times 10^{-3}$

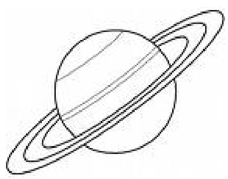
$0{,}9 \times 10^4$ $85{,}6 \times 10^{-2}$ $9{,}025 \times 10^0$

➢ **Exercice 2 : Astrophysique.**

1. Remettre toutes ces quantités en écriture scientifique.

$1\,428 \times 10^6$ km $142{,}8 \times 10^6$ km $1{,}428 \times 10^9$ km $0{,}1428 \times 10^8$ km

2. La planète Saturne est située à un milliard quatre cent vingt huit millions de kilomètres du Soleil. Parmi les écritures ci-dessus, lesquelles donnent cette distance ?



- **<u>Exercice 3 :</u> Echec et maths !**

170 000 milliards de milliards de milliards est un ordre de grandeur du nombre de manières de jouer les 10 premiers coups d'une partie d'échecs. Ecrire ce nombre en notation scientifique.

C. Exercices sur les 5 formules de base :

- **<u>Exercice 1 :</u>** Formule ❶ $a^n \times a^p = a^{\dots\dots\dots\dots}$ On garde la ……………..

$7^4 \times 7^5 = \dots\dots$ $f^{-3} \times f^7 = \dots\dots$ $10^{-8} = 10^{\dots} \times 10^{-5}$ $6^3 \times 6^{\dots} = 6^{-2}$ $(-2)^4 \times (-2)^{\dots} = -2$

- **<u>Exercice 2 :</u>** Formule ❷ $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{\dots\dots\dots\dots}$ On garde la ……………..

$\dfrac{10^8}{10^5} = \dots\dots$ $\dfrac{5^3}{5^7} = \dots\dots$ $\dfrac{9^6}{9^6} = \dots\dots$ $10^{-6} = \dfrac{10^4}{10^{\dots}}$ $\dfrac{(-6)^{\dots}}{(-6)^{-3}} = (-6)^2$ $\dfrac{d}{d^3} = d^{\dots}$

- **<u>Exercice 3 :</u>** Formule ❸ $a^n \times b^n = (\dots \times \dots)^{\dots}$ On garde l'…………………

$5^6 \times 3^6 = (\dots \times \dots)^{\dots} = \dots\dots^{\dots}$ $(-7)^{-8} \times 3^{-8} = (\dots \times \dots)^{\dots} = \dots\dots^{\dots}$ $3^{47} \times 2^{47} = \dots\dots^{\dots}$

$5^9 \times \dots^9 = 20^9$ $\dots\dots^{\dots} \times 2^{15} = (-14)^{15}$ $(k \times 3)^2 = \dots \times \dots = \dots$ $(2 \times d)^3 = \dots \times \dots = \dots$

- **<u>Exercice 4 :</u>** Formule ❹ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{\dots}$ On garde l'…………………

$\dfrac{8^{29}}{4^{29}} = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{29} = \dots\dots^{\dots}$ $\dfrac{6^{-31}}{4^{-31}} = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{\dots} = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{\dots}$ $\dfrac{10^{24}}{15^{24}} = = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{\dots}$ $\dfrac{(-8)^{10}}{14^{10}} = \left(\dfrac{\dots}{\dots}\right)^{\dots}$

$\dfrac{9^{-8}}{\dots\dots^{-8}} = 3^{-8}$ $5^9 = \dfrac{\dots\dots^{\dots}}{4^9}$ $\dfrac{15^6}{\dots\dots^{\dots}} = \dfrac{3^6}{4^6}$ $\left(\dfrac{2}{d}\right)^3 = \dfrac{\dots}{\dots} = \dfrac{\dots}{\dots}$

- **<u>Exercice 4 :</u>** Formule ❺ $(a^n)^m = a^{\dots\dots\dots\dots}$

$(8^3)^3 = \dots\dots^{\dots}$ $(h^{-6})^{-8} = \dots\dots^{\dots}$ $((-1)^2)^{-3} = \dots\dots^{\dots} = \dots$ $f^{-24} = (f^{\dots})^3$ $\dfrac{1}{b^6} = (\dots^3)^{\dots}$

D. Mélanges sur les 5 formules de base :

- **<u>Exercice 1</u> :** Ecrire le résultat sous la forme d'une seule puissance :

$3^{21} \times 5^{21} =$	$(-3) \times (-3)^4 =$	$(a^3)^2 \times a =$	$6^4 \times (-7)^4 =$
$\dfrac{(-3)^{-10}}{6^{-10}} =$	$\dfrac{(-5)^{-12}}{(-5)^{-15}} =$	$\dfrac{8^{32}}{(-4)^{32}} =$	$\dfrac{-7^{-14}}{(7^3)^{-6}} =$
$a^3 \times a \times a^2 =$	$(-2)^3 \times (-3)^3 \times (-4)^3 =$	$(a \times a^3)^2 =$	$(a^8 \times a)^3 =$

➢ **<u>Exercice 2 :</u>** Remplacer chaque pointillé par l'entier relatif qui convient :

$3^{25} = 3^{8} \times 3^{\dots\dots}$ $\qquad 2{,}5^{\dots\dots} \times 2{,}5^{-8} = 2{,}5^{-3}$ $\qquad \dfrac{0{,}4^{---}}{0{,}4^{-2}} = 0{,}4^{2}$ $\qquad \dfrac{15^{-12}}{15^{\dots\dots}} = 15^{-3}$ $\qquad \dfrac{8^{-5} \times 8^{7}}{8^{-15} \times 8} = 8^{\dots}$

$(3^{\dots\dots})^{5} = 3^{-20}$ $\qquad (-1)^{-24} = \dots\dots$ $\qquad a \times a^{n} \times a^{\dots\dots} = a^{n+3}$ $\qquad 14^{\dots} \times 2^{-5} = 28^{-5}$ $\qquad (10^{3})^{-2} \times 10^{\dots} = 10$

$\dfrac{1}{g^{-6}} = \dots\dots$ $\qquad 1 \text{ cm}^2 = \dots\dots^{\dots\dots} \text{ m}^2$ $\qquad 3^{-34} \times \dots\dots^{-34} = (-18)^{-34}$ $\qquad \dfrac{\dots\dots^{43}}{(-5)^{43}} = 2^{43}$ $\qquad \dfrac{6^{-9}}{\dots\dots^{-9}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-9}$ $\qquad k^{-86} = \dots$

➢ **<u>Exercice 3 :</u> Ni même base, ni même exposant !**

Ecrire ces 5 expressions sous la forme *d'une seule puissance*. (Aide : on peut décomposer l'une des bases).

$M = 25^{3} \times 5^{-2}$

$=$

$O = \dfrac{27^{2}}{3^{-5}}$

$=$

$E = 2^{5} \times 14^{2} \times 7^{5}$

$=$

$V = \dfrac{3 \times 6^{10}}{2^{-1}}$

$=$

$E = 6^{6} \times 81^{2} \times 4^{4}$

$=$

E. <u>Calculs complexes avec des puissances de 10 :</u>

➢ **<u>Exercice 1 :</u>** Calculer et donner le résultat sous forme scientifique puis décimale.

<u>Méthode</u> : $A = \dfrac{-27 \times (10^{2})^{3} \times 16 \times 10^{-8} \times 10^{6}}{-36 \times (10^{4})^{5} \times 10^{-14} \times (-4)}$

$\overset{①}{=} \dfrac{-27 \times 16}{-36 \times (-4)} \times \dfrac{10^{6} \times 10^{-8} \times 10^{6}}{10^{20} \times 10^{-14}}$

$\overset{②}{=} -\dfrac{\mathbf{9} \times 3 \times \mathbf{4} \times \mathbf{4}}{\mathbf{9} \times \mathbf{4} \times \mathbf{4}} \times \dfrac{10^{4}}{10^{6}}$

$= -3 \times 10^{-2}$ e.s (écriture scientifique)

$= 0{,}03$ e.d (écriture décimale)

① Comme il n'y a <u>ni addition ni soustraction</u>, on peut séparer les nombres des puissances de 10.

② On doit :
- *s'occuper du signe final.*
- *décomposer pour simplifier la fraction.*
- *simplifier les puissances.*

$B = \dfrac{-45 \times 10^{-15} \times 8 \times 10^{12}}{10^{20} \times (-2) \times 10^{-22} \times 5 \times 3^{2}}$

$=$

R = 0,4

$A = \dfrac{-7 \times 10^{4}}{2 \times (10^{3})^{2}}$

$=$

R = $-3{,}5 \times 10^{-2}$

$C = \dfrac{5 \times (10^{-2})^{-3} \times 77 \times 10^{-8}}{10^{-3} \times 14 \times (10^{-1})^{3} \times 25}$

$=$

R = $1{,}1 \times 10^{4}$

- **Exercice 2 :** Calculer et donner le résultat sous forme scientifique puis décimale.

Attention ! La présence d'additions ou de soustractions vous oblige à repasser en écriture décimale !

$M = \dfrac{0{,}054 \times 10^3 - 0{,}04 \times 10^2}{10^{-2}}$

=

R = 5×10^3

$N = \dfrac{7 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^8}{500 \times 10^{-2} + 0{,}02 \times 10^2}$

=

R = 2×10^5

$O = \dfrac{20 \times 10^{-2} - 0{,}302 \times 10^2}{-0{,}65 \times 10^3 - 5\,000 \times 10^{-2}}$

=

R = 5×10^{-2}

- **Exercice 3:** Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

Ex : $\dfrac{0{,}1}{2} = \dfrac{0{,}1 \times 5}{2 \times 5}$

$= \dfrac{0{,}5}{10}$

$= 0{,}5 \times 10^{-1}$

$= 5 \times 10^{-2}$

$\dfrac{9}{500} =$

$\dfrac{0{,}07}{25} =$

$\dfrac{0{,}072}{5\,000} =$

F. Exercices de synthèse sur le calcul de puissances :

- **Exercice 1 :** Calculer en colonnes **en respectant les priorités** :

$F = (-1)^{-24} + 2 \times 6^2$

$E = 8^0 + 5 \times 3^2$

$U = 0{,}5 \times 10^3 - 50 \times 10^{-2}$

$X = 2{,}5^6 \times 0{,}4^6$

$C = (-1)^{-27} + 5 \times (-1{,}2)^0$

$A = (2 \times 10^{-30})^4$

Résultat en écriture scientifique

$M = 17 - 2 \times \dfrac{27^2}{9^2}$

$P = (-5)^{-384} \times 0{,}2^{-384}$

=

➢ **<u>Exercice 2 :</u>** Réduire les produits et fractions suivants :

$6k \times 3k \times k =$ $2k^2 \times 6k^5 =$ $5a^3 \times 2a \times 4 =$ $(f^4)^2 \times f \times (y^3)^3 =$

$\dfrac{5x^5 \times xy \times 2y^2}{4x^{-3}y \times x^2} =$ $\dfrac{2^5 \times 9^2 \times 7^{-6}}{3^6 \times 2^{-1} \times 7^{-8}} =$

➢ **<u>Exercice 3 : Test 2009.</u>** Ecrire ces 4 expressions sous la forme *d'une seule puissance*.

$A = \dfrac{(5^2)^5}{5^{-2} \times 5^{-3}}$ $=$	$I = \dfrac{7^{12}}{49^3}$ $=$	$B = 0{,}5^7 \times 3^5 \times 9^4 \times 2^7$ $=$	$O = 6^{20} \times 3^{-15} \times (\dfrac{1}{2})^{20}$ $=$

➢ **<u>Exercice 4 :</u>** Les expressions suivantes sont-elles vérifiées par les valeurs proposées ?

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ pour $a = 2^{-1}$ et $b = 4^{-1}$

A gauche, on a : $(a + b)^2 =$

$(-1)^n + 2 \times 1^{-m} = -1{,}7^0 - (-1^n)^m$ pour $n = -4$ et $m = -3$

➢ **<u>Exercice 5 :</u>** Pythagore, fractions et puissances. D'après le Test 2009.

Soit WOK un triangle tel que : WO = 2^{-2} = ……… WK = 1^{-577} = ……. OK = 2^{-1} = …….

1. Quel est le plus grand côté du triangle WOK ? Justifier. (……..………… / 1 pt)

2. Le triangle WOK est-il rectangle ? Justifier. (……………..……. / 0,5 + 1 + 0,5 pts)

➢ **<u>Exercice n° 6: Questionnaire à Choix Multiples (QCM), Test 2011.</u>** (………………… / 2,5 points).

Pour chaque affirmation, trois choix vous sont proposés dont un seul est vrai. Lequel ? **L'entourer.**

(Barème : réponse juste = + 0,5 pts sans réponse = 0 pt réponse fausse = - 0,25 pts)

(Les scores finaux négatifs sont ramenés à une note de 0 / 2,5)

Affirmations	*Choix 1*	*Choix 2*	*Choix 3*	*Points (Prof)*
① 10^{12} est égal à :	1 million de millions	1 dizaine de milliards	1 centaine de milliers de millions	
② est égal à :	-3	1	-1	
③ a^{-n} est égal à :	$\frac{1}{a^{-n}}$	$\frac{1}{a^{n}}$	$-a^{n}$	
④ $(a-b)^2$ est égal à	$a^2 - b^2$	$2 \times a - 2 \times b$	$(a-b)(a-b)$	
⑤ Ce QCM comporte 5 questions avec 3 choix possibles par question. Le nombre de combinaisons de réponses possibles à ce questionnaire est égal à :	3×5	5^3	3^5	

G. Situations :

Situations à faire sur votre *cahier d'exercices*, méthode Analyse-Synthèse.

➢ Situation 1 : « To Infinity and Beyond ».

Un vaisseau spatial a mis 20 ans pour faire le voyage Planète X-Terre. Sachant que la Planète X est située à 0,045 années-lumière de la Terre et qu'une année-lumière est égale à $9{,}5 \times 10^{12}$ km, calculer la vitesse moyenne de ce vaisseau spatial exprimée ***en km par an.*** Donner l'écriture scientifique du résultat.

➢ Situation 2 : «A la queue leu leu, à la queue leu leu. Tout le monde s'éclate à la queue leu leu ».

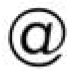
Après la saison de la grippe, une bande de jeunes microbes décide d'aller un peu décompresser au cinéma.
« Et si on allait voir « Mr Propre II L'ultime Lavage » ? Il y a une scène de lessive cauchemardesque ! » dit l'un. « Brrr, presque aussi horrible que la queue qui nous attend ! » répondit un autre.
Et effectivement, le tout Microbland s'était donné le mot pour assister au film événement : une file d'attente longue de **0,2 mm** s'était formée !
« Ben y'en a du monde ! » s'exclama le plus virulent de la bande.
Eh oui, y'en a des microbes pour voir pour la première fois Mr Propre avec un tee shirt sale !
Mais au fait, combien de microbes y a-t-il dans la queue ? (on prendra 10^{-6} m comme diamètre pour les microbes.)

➢ Situation 3 : Et si c'était vrai ? (d'après le Test 2010)

Rêvons un peu ! Supposons que chaque jour durant une année, toutes les personnes vivant en France métropolitaine (environ 63,1 millions de personnes en janvier 2011) réduisent leurs déchets de 10 grammes seulement (soit à peu près l'équivalent d'une pièce de 20 centimes et d'une pièce de 10 centimes d'euros !) !

1. Mettre en écriture scientifique les quantités 63,1 millions personnes et 10 grammes convertis en tonnes.
2. Au bout d'une année, quelle quantité de déchets (en tonnes) serait ainsi évitée ? Ecritures scientifique et décimale.
3. Combien de Tour Eiffel cela représente-t-il à peu près ? La Tour Eiffel pèse 10 100 tonnes.

➢ Situation 4 : Une dette explosive ! D'après le Contrôle 2006.

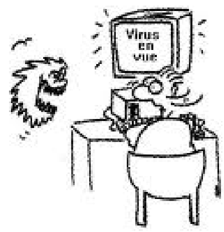



Au premier trimestre 2011, la dette publique de la France était d'environ 1 646,1 milliards d'euros.

1. La France fait partie de la « Zone Euro ». Qu'est-ce que la « Zone Euro » ? Quels sont les pays qui la composent ?
2. Combien en euros cela représente-t-il par français, arrondi à l'euro près (écritures scientifique et décimale) ?
3. Quelle hauteur atteindrait une pile de billets de 100 € représentant la dette publique française ?

(Un billet de 100 € a une épaisseur de 10^{-3} cm. On donnera le résultat dans une unité convenablement choisie.)

➢ Situation 5 : Propagation de virus informatique[2] (Test 2005).



Un ordinateur est infecté par un nouveau virus contre lequel les antivirus sont impuissants pour l'instant.
Le virus va fouiller dans le carnet d'adresse et s'auto envoie à 2 nouvelles adresses pour ainsi infecter 2 nouveaux ordinateurs, puis il se met en veille. Cela prend 1 seconde.
Faites un schéma en arbre représentant les ordinateurs infectés à chaque seconde pour vous aider à résoudre le problème.

1. Combien de **nouveaux** ordinateurs sont infectés à la $3^{\text{ème}}$ seconde. Ecrire le résultat sous forme de puissance.
2. Combien d'ordinateurs **au total** sont infectés au bout de 3 secondes.
3. Combien de secondes au minimum faut-il pour infecter 50 ordinateurs au total.

[2] Beaucoup de modèles de propagations (épidémies, rumeurs, virus….) sont construits sur des modèles mathématiques utilisant les puissances.

VIII. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

- **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 4ème, Puissances).**
- **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin !**

A. Conseils :

- Puissances négatives : Penser « inverse ».
- Calculs complexes :

Bien connaître ses tables !

Bien connaître ses 5 formules de base et Ne pas en inventer !

Attention aux priorités (grandement se méfier dés qu'il y a des additions ou des soustractions) !

Qui se ressemblent, s'assemblent : **principe soit même base soit même exposant.**

Les fractions, même avec des puissances, restent des fractions : on peut les simplifier comme d'habitude.

Relire tout de suite son calcul.

- Situations : Eviter de répondre en une étape. Ayez un ordre de grandeur des résultats à trouver.

B. Erreurs à éviter :

- Confondre inverse et opposé : $x^{-1} \neq -x$ $2^{-1} \neq -2$ $5^{-3} \neq -5 \times 3$ ou -3×5 !
- Se tromper dans les signes quand on transforme une puissance négative :

$\frac{5^6}{5^{-6}} = 5^{6-(-6)} = 5^{12}$ et non 5^{6-6} ! De même $\frac{1}{10^{-3}} = 10^3$ et non 10^{-3} !

- Confondre puissance et multiplication : $4^3 \neq 4 \times 3$!
- **Inventer une formule d'addition ou de soustraction** pour les puissances : $(5-3)^2 \neq 5^2 - 3^2$!
- Erreur de signe classique : $-5^2 \neq (-5)^2$!
- Prendre un nombre < 1 ou ≥ 10 comme mantisse dans l'écriture scientifique :

$0,7 \times 10^{-6}$ et 12×10^2 ne sont pas des écritures scientifiques car $0,7 < 1$ et $12 \geq 10$.

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ……………………………………..

Perle du Bac 2009 : « Une ligne droite devient rectiligne quand elle tourne. »