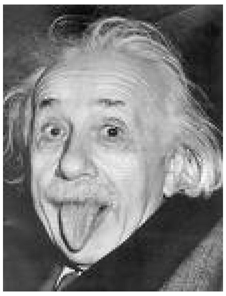
LA PROPORTIONNALITE

« A l'école, en algèbre, j'étais du genre Einstein. Mais plutôt Franck qu'Albert. »

Philippe Gueluck[a]



« Deux choses sont infinies : l’Univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l’Univers, je n’en ai pas encore acquis la certitude absolue. »

Albert Einstein[b]

- *Pré requis pour prendre un bon départ :*

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Simplification des écritures fractionnaires.			
Comparer deux fractions.			
Multiplication d’un nombre par une écriture fractionnaire.			
Fraction d’une quantité.			
Fractions et proportions.			
Pourcentages, augmentation et baisse en pourcentage.			
Proportionnalité : définition, tableau et propriétés.			
Proportionnalité : reconnaître un tableau de proportionnalité.			
Proportionnalité : calcul du coefficient.			
4èmes proportionnelles : équations de type $\frac{x}{3} = \frac{5}{7}$ *ou* $\frac{3}{x} = \frac{5}{7}$.			
Conversions horaires.			

- *Abréviations : pplté = proportionnalité*
  pptiel = proportionnel

---

[a] *Philippe Gueluck :* Auteur de la bande dessinée « Le Chat » et chroniqueur dans l’émission télé « On a tout essayé ».

[b] Einstein, Albert (1879-1955) : Grand physicien allemand naturalisé américain. Il proposa la théorie de la relativité restreinte (1905) et générale (1915) et reçut le Prix Nobel de Physique en 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Il a ainsi largement contribué au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie. Son travail est notamment connu pour l'équation E=MC² qui explique la puissance de l’énergie nucléaire. Il est aussi connu pour ses nombreuses facéties, Science et fantaisie faisant chez lui bon ménage.

NOM et prénom : …………………………………………………… *4[ème] …….*

I. DEFINITION ET REPRESENTATIONS DE LA PPLTE.

A. Définition de la proportionnalité :

Dans une situation où les valeurs d'une grandeur Y s'obtiennent en multipliant les valeurs d'une autre grandeur X par un nombre fixé, **on dit que** :

① Les grandeurs **Y et X sont proportionnelles**.

② La situation est une **situation de proportionnalité**.

③ Le nombre fixe multiplicateur s'appelle le **coefficient de proportionnalité.**

En fait, on utilise rarement la définition telle qu'elle, mais plutôt ses deux représentations suivantes :

B. Deux représentations de la proportionnalité :

- Une situation de proportionnalité peut être présentée sous 2 formes :

Sous forme de relation :

$$\boxed{\text{Grandeur Y} = \text{nb fixe} \times \text{Grandeur X}}$$

Toute relation de type :

une grandeur = une autre grandeur × nb fixe

s'appelle : **Une relation de proportionnalité.**

Sous forme de tableau :

Grandeur X (unité)		
Grandeur Y (unité)		

× nb fixe

On passe d'une ligne à l'autre en multipliant toujours par le même nombre fixe :

On dit que ce tableau est :

Un tableau de proportionnalité.

Dans ces 2 représentations, le coefficient multiplicateur s'appelle le **coefficient de proportionnalité.**
Ce coefficient pourra avoir un nom plus particulier suivant la situation de proportionnalité. Nous en verrons quelques exemples plus loin.

C. 2 exemples importants de couples de grandeurs proportionnelles :

1. Pourcentage et Proportionnalité :

- Soit une crème contenant 25 % de Matière Grasse (MG). Cela signifie que :

la proportion de la *Masse de matière grasse* par rapport à la *Masse totale de crème* est de $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

Autrement dit : pour ……… g de crème, il y a …….. g de matière grasse.

Et on a la formule : *Masse de matière grasse dans la crème* $= \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times$ *Masse* ……………………………….

C'est une relation de ……………………………. Les masses de crème et de MG sont donc proportionnelles.

Complétez le tableau de proportionnalité correspondant :

Masse de crème (en g)	100	500	40	…..	24
Masse de matière grasse (en g)	25	…..	10	50	6

Coefficient de proportionnalité

$\times \frac{25}{100}$

➢ <u>Deux remarques sur le coefficient</u> :

❶ Le coefficient doit être écrit **sous la forme la plus simple possible : soit un entier, soit une fraction irréductible :** ici $\frac{25}{100}$ = ……. F.I ! (modifiez le coefficient dans le précédent tableau !)

❷ Dans la boîte du coefficient à droite du tableau, on peut aussi bien écrire $\times\frac{1}{4}$ que $\div 4$.

La proportionnalité fonctionne aussi bien avec une multiplication entre les lignes du tableau qu'avec une division (par l'inverse).

➢ En conclusion :

① ***« Appliquer un pourcentage à une grandeur » est une situation de proportionnalité !***

Le pourcentage donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

② **Plus généralement, *« Prendre la fraction d'une quantité » est une situation de proportionnalité.***

La proportion (la fraction) donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

2. Echelle et Proportionnalité :

➢ Sur la reproduction d'un dessin *à l'échelle 3*, les *Longueurs Dessinées* sont obtenues en multipliant les *Longueurs Réelles* par le même coefficient de proportionnalité qui vaut évidemment ……

L'échelle 3 signifie : « Si la longueur réelle vaut 1, alors la longueur dessinée correspondante vaudra …… »

D'où la formule : *Longueurs Dessinées* = ……. × …………………………………………..

Complétez le tableau de proportionnalité correspondant.

Longueurs Réelles (en cm)	1	50		200	
Longueurs Dessinées (en cm)	3		300		210

échelle

× …..

➢ En conclusion :

① ***« Appliquer une échelle à une grandeur » est une situation de proportionnalité !***

On utilise donc la proportionnalité pour tout ce qui est plans, cartes, agrandissement, modèles réduits, etc.

② **Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité s'appelle : l'…………………………**

<u>Formule de l'échelle :</u> **Echelle =** $\dfrac{\textbf{Longueur Dessinée (unité)}}{\textbf{Longueur Réelle (même unité)}}$

L'échelle donne une colonne complète du tableau de proportionnalité.

II. COEFFICIENT DE PPLTE ET EGALITE DE FRACTIONS.

A. Activité :

➢ Voici une situation de proportionnalité : « Un paresseux (pas un élève !) parcourt 2 km en 4 heures. »

En supposant que le paresseux garde toujours la même allure, on cherche à prévoir *la distance* que cet animal pas pressé va parcourir *durant* 8 h ; durant 30 min ; durant 1 journée.

➢ Complétez le tableau de proportionnalité représentant cette situation :

$\times \frac{1}{c}$

………….. du parcours (en ……..)	4	…	…	…
………………….. parcourue prévue (en km)	2	…	…	…

$\times$ c

Le coefficient de proportionnalité (ici noté c) est le nombre inconnu qui vérifie l'équation : $4 \times c = 2$.

En résolvant cette équation, on trouve $c = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ F.I !

➢ On remarque en formant les 4 fractions $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{0{,}25}{0{,}5}, \frac{12}{24}$ (correspondantes aux 4 colonnes *inversées*), qu'elles sont toutes égales à $\frac{1}{2}$. Le coefficient de proportionnalité est donc bien $\frac{1}{2}$.

B. Coefficient de proportionnalité et colonnes inversées :

L'activité précédente nous permet d'énoncer la propriété suivante :

① Toutes les colonnes inversées forment des fractions toutes égales au coefficient de proportionnalité.

② Pour calculer le coefficient, il suffit donc d'avoir une colonne complète :

Le coefficient est égal à la fraction inversée correspondant à cette colonne complète.

C. Sens de la proportionnalité :

Le mot proportionnalité est construit à partir de 2 mots : *Proportionnalité*

Proportions

……...………

On peut donc écrire : Proportionnalité ⇔ Proportions + Egalité.

Ce qui veut dire Proportionnalité ⇔ Egalité des Proportions.

Ce qui veut dire Proportionnalité ⇔ Egalité des Fractions.

L'étymologie du mot proportionnalité pose en fait le fondement mathématique de la proportionnalité :

La Proportionnalité repose sur l'Egalité des Fractions !

En pratique : Quand on a affaire à une **situation de proportionnalité**, il faut automatiquement penser à **utiliser l'égalité des fractions formées par les colonnes** du tableau correspondant. Et vice versa.

III. REMPLIR UN TABLEAU DE PROPORTIONNALITE.

On vient de voir que toute **situation de proportionnalité repose mathématiquement sur l'…………...….. des fractions (chaque fraction représentant une …………..…………. du tableau de proportionnalité).** Ces égalités de fractions permettent de trouver un ou plusieurs nombres inconnus dans un tableau de pplté.

A. Calcul d'une $4^{ème}$ proportionnelle par égalités de fractions :

➢ Voici 2 tableaux de proportionnalité incomplets qu'on veut remplir.

Compléter les 4 égalités de ……………………… permettant de trouver x, y, z, et k puis **résolvez** ces 4 équations.

5	12	y
7	x	21

k	10	6
7	z	9

$\frac{y}{21} = \frac{5}{7}$ $\frac{x}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

B. Trois remarques sur le calcul des $4^{èmes}$ proportionnelles :

❶ Pour minimiser les erreurs, on forme chaque égalité de fractions :

- **en s'assurant que l'inconnue soit au numérateur.**
- **en réutilisant à chaque fois la colonne complète déjà donnée par l'énoncé.**

❷ *On pouvait aussi trouver y par multiplication horizontale sur la $1^{ère}$ colonne en remarquant que $7 \times 3 = 21$ donc $5 \times 3 = y$.*
On pouvait aussi trouver z par multiplication verticale sur la $1^{ère}$ ligne par le coefficient de pplté qui est donnée par la $3^{ème}$ colonne inversée $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ F.I. D'où $z = 10 \times \frac{3}{2} = 5 \times 3 = 15$.

On voit donc qu'on dispose d'un large éventail de méthodes pour remplir un tableau de pplté :

- **par égalité de …………………………… (méthode principale).**
- **par multiplication « verticale » entre deux lignes par le coefficient de pplté ou par son inverse.**
- **par multiplication « horizontale » entre la colonne complète et une autre colonne.**

Ces 3 méthodes donnent évidemment les mêmes résultats car elles reposent en fait toutes sur l'……………………………. des ………………………….

❸ **On appelle « $4^{ème}$ proportionnelle » toute quantité inconnue dans une situation de proportionnalité.**

On parle de $4^{ème}$ proportionnelle car c'est la $4^{ème}$ quantité (inconnue) dans l'égalité de fractions.

IV. RESOLUTION DE SITUATIONS UTILISANT LA PPLTE.

A. Méthode générale en 2 étapes :

Reprenons un problème soit disant difficile du contrat ③ sur les fractions (p.4) et voyons qu'on peut le résoudre facilement en utilisant la proportionnalité et une bonne méthode !

« Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40% !

Sans écouter, un chapitre demande 15 heures de travail à la maison.

Combien de temps travaillerez-vous en écoutant ? » (Réponse = 9h)

Il est question de pourcentages donc on a affaire à une situation de proportionnalité.

➢ **Etape ① : Traduction de la situation sous forme de Tableau de proportionnalité.**

• Il s'agit d'une situation de répartition donc le nombre 100 doit correspondre au nombre total d'heure, c-à-d à la durée normale de travail.

• Il faut que l'énoncé nous donne une colonne complète du tableau. Cette information est donnée par le pourcentage !

« Travailler 40% de moins en écoutant en classe. » signifie que :

*Pour **100 h** de travail normal, on effectuera, grâce à une meilleure écoute, 40 h de travail en moins **c-à-d 60 h (= 100 – 40)**.*

Ce raisonnement classique sur une baisse en pourcentage constitue la seule petite difficulté.

Durée normale de travail (en h)	100	15
Durée de travail en écoutant (en h)	….	t

➢ **Etape ② : Calculs des 4èmes proportionnelles + Phrases-Réponses.**

- Par égalité des fractions : $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Résolvez cette équation.

Remarque : On aurait pu trouver t par multiplication verticale par le coefficient de pplté, c-à-d par application de la relation de pplté : $t = \dots\dots \times \frac{\dots}{\dots} = 9$ *On a ainsi plusieurs façons de trouver le résultat.*

- Et bien oui, écouter en classe permet de travailler 9h au lieu de 15h pour un contrat ! Ca vaut le coup !

➢ Remarque : Vous pouvez faire la comparaison entre cette résolution par tableau de pplté et la résolution classique par FRCP du problème. Les 2 méthodes sont valables mais celle par tableau est très élégante.

B. Résumé de la Méthode en …… étapes :

Etape ❶ : Tableau.

Il s'agit de traduire la situation de pplté (de répartition ou d'évolution) sous forme de tableau de pplté.

C'est l'étape la plus importante et évidemment la plus difficile.

On remplit le tableau dans l'ordre suivant :

① **la colonne complète numérique (donnée par un % ou une fraction ou deux informations numériques liées).**

② **puis les intitulés précis en tête (début) de ligne (en n'oubliant pas les unités !).**

③ **puis une colonne par question (on mettra une lettre judicieusement choisie dans les cases inconnues).**

Etape ❷ : $4^{\text{èmes}}$ proportionnelles + Phrases-Réponses.

- Calculs des $4^{\text{èmes}}$ pptielles inconnues **principalement par égalité de fractions (produit en croix).**
- Réponses **en bon français** aux questions posées.

C. Situations de proportionnalité à résoudre :

J'ai assez bossé, à vous maintenant ! En **respectant rigoureusement la méthode ci dessus en …… étapes** (sauf exercice préliminaire), résoudre les problèmes suivants **sur votre cahier d'exercices :**

➢ **Exercice préliminaire : Colonnes et pourcentages.**

Ecrire les «colonnes» correspondantes à :

15%	+ 15%	– 15%	20%	+ 20%	– 20%.
100	100				

➢ **Exercice 1 : « L'espoir fait vivre. »**

En 1900, l'espérance de vie des hommes en France était égale à 49 ans. En 2007, elle avait augmenté de 58,2 %.

Calculer l'espérance de vie en 2007 arrondie à l'entier le plus proche.

➢ **Exercice 2 : Augmentation en pourcentage.**

En 2002, il y avait 17,9 millions d'internautes en France. En octobre 2007, ils étaient 30 millions.

Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre d'internautes en France entre 2002 et 2007.

➢ **Exercice 3 : Attention aux pourcentages !**

Certaines accroches commerciales sont très pernicieuses ! J'ai pu voir par exemple, dans un des magasins de disques de Mr Richard Branson, ceci : « Pour 100 € d'achat, un bon d'achat de 10€ vous est offert (utilisable pour 50€ d'achat minimum) ! ».

1. A priori, sans réfléchir, à quel taux de réduction correspondent ces 10€ ? …….. %.
2. Je parie que vous avez répondu (en grande majorité) 10% ! Ce qui est faux !

Calculer le vrai taux de réduction auquel correspondent ces 10€.

➢ **Exercice 4 : Contrôle 2005.**

Actuellement, quand on veut louer un appartement, les propriétaires de logements exigent que le prix du loyer représente au maximum $\frac{2}{5}$ du salaire mensuel du candidat locataire.

1. Bienaimée gagne 1500€ par mois. Pourra-t-il louer un appartement à 650€ ?
2. Désiré a trouvé un 3 pièces sur Paris qui lui plait, à 900€ de loyer.

Combien doit-il gagner par mois au minimum pour avoir cet appartement ?

➢ **<u>Exercice 5</u> : Contrôle 5ème 2004.**

Cet exercice comporte …….. situations différentes. Donc nous aurons besoin de …… tableaux de proportionnalité.

Dans une élection cantonale, la candidate Aimoi Elise a obtenu les résultats suivants :

1. Dans la commune de Bures sur Yvette, il y a 3500 votants et il a obtenu 32% des voix. Quel est son nombre de voix ?
2. Dans la commune d'Orsay, il a obtenu 748 voix représentant 34% des voix. Quel est le nombre de votants ?
3. Dans la commune de Gif sur Yvette, il a obtenu 850 voix sur 2500 votants. Quel est le pourcentage de voix obtenues ?

➢ **<u>Exercice 6</u> : Indice de base 100.**

En économie et dans beaucoup de domaines, on utilise des indices. Tout comme les pourcentages, les indices permettent de mieux se rendre compte de l'évolution d'une situation (de pplté) au cours du temps.

Par exemple, il y a eu 383 950 bacheliers toutes séries confondues en 1990, 480 654 en 1995, 501 941 en 2000, 480 100 en 2004 et 517 313 en 2008. Ces nombres « bruts » ne permettent pas de voir facilement l'évolution du nombre de bacheliers en France.

Pour rendre plus lisible l'évolution, on va attribuer arbitrairement l'indice 100 à l'année 1990. Autrement dit, le nombre 383 950 de bacheliers en 1990 correspondra au nombre 100.

A l'aide d'un tableau de proportionnalité, trouvez les indices correspondants aux années 1995, 2000, 2004 et 2008.

En déduire les augmentations en pourcentage entre 1990 et 1995 et entre 1990 et 2008.

➢ **<u>Exercice 7</u> : Pourcentage sur la réunion de 2 ensembles.**

Dans une ville, il n'y a que 2 écoles. Dans la 1ère école A de 200 écoliers, il y a 40% de garçons. Dans la 2ème école B, 60% des 400 écoliers sont des garçons. Sans réfléchir, quel est le pourcentage d'écoliers garçons dans cette ville ? ……….. %.

Je parie que vous avez répondu 50% (qui est la moyenne de 40% et 60%). Et pourtant, c'est faux ! En faisant cela, vous ne tenez pas compte du nombre total d'élèves dans chaque école !

1) Calculer le nombre total d'écoliers garçons dans cette ville ? (Analyse-Synthèse)

2) En déduire le pourcentage d'écoliers garçons dans la ville, arrondi au 1/10ème ? (Analyse-Synthèse)

➢ **<u>Exercice 8</u> : Problème d'échelle (contrôle de 5ème en 2004).**

Ce sont bientôt les vacances. N'oublions pas notre carte routière à l'échelle $\frac{1}{400\,000}$!

1. Matuvu et Ahouioussa sont séparées par 2,5 cm sur la carte. Quelle distance réelle les sépare ?
2. Les villes de Ehdidonc et Ouipatro' sont distantes de 31 km. La carte indique 7,5 cm. Cette carte est-elle précise ?

➢ **<u>Exercice 9</u> : Pourcentage sur la réunion de 2 ensembles. Le retour. Contrôle 2008.**

Dans une maison de retraite, 70% des 40 mamies et 25% des 24 papys écoutent du Métal.

Quel pourcentage (arrondi au 1/10ème) de papys-mamies écoutent du Métal dans cette maison de retraite ?

➢ **<u>Exercice 10</u> : Un cocktail bien proportionné.**

Une Fleur d'Amour est un cocktail sans alcool composé de 4cl de jus d'ananas, 7 cl de jus de mangue, 7 cl de nectar de bananes. Excellent pour une soirée dédiée aux Maths !

1. Quelle est la proportion de jus de mangue par rapport au volume total ?
2. Dans l'euphorie mathématique, on décide d'inviter des ami(e)s pour partager notre joie. Il faut fabriquer 2,2 litres de cocktail. 0,9 litres de jus de mangue suffira-t-il ?
3. Pendant vos révisions de Maths à la maison, réalisez le cocktail et donnez-moi vos impressions.

➢ **<u>Exercices sur le web</u>** : Site « maths au collège » de François Loric (voir rubrique liens sur mon site yalamaths.free.fr), rubrique Exercices, Proportionnalité.

V. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA PROPORTIONNALITE.

Un magasin octroie 10 % de réduction aux clients possédant sa carte de fidélité.

Le *montant de l'économie réalisée* par rapport au *prix total* sera donné par la relation de proportionnalité :

Economie réalisée (en €) = ……….. × ………………..……………….….………….. (en …..)

Le coefficient de proportionnalité est ……… = ..…….. F.I !

Représentons cette situation de proportionnalité sous forme de tableau :

× …..

Prix total (en €)	20	25		
Economie réalisée (en €)	2		20	1,6

× …..

A. Construction d'un graphique à partir d'un tableau (Rappels) :

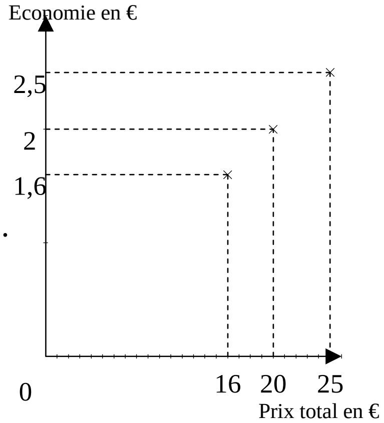
- Le tableau est très pratique pour répondre à des questions concrètes et la relation de proportionnalité résume le tableau.

Mais ni la relation de proportionnalité ni la représentation sous forme de tableau de valeurs ne donnent une idée *au premier coup d'œil* des variations de la situation (y a-t-il augmentation rapide de l'économie lorsque le prix total augmente par exemple).

- C'est pourquoi, à partir du tableau, on construit un graphique dans un repère orthonormé. Mais comment donc ? Hein ?

C'est simple : à chaque colonne numérique du tableau, on associe un point (et ses coordonnées).

Par exemple, à la $1^{\text{ère}}$ colonne correspond le point de coordonnées (20 ; 2), à la $2^{\text{ème}}$ colonne correspond le point (25 ; 2,5) etc.



La $1^{\text{ère}}$ ligne du tableau donne les abscisses des points.

La $2^{\text{ème}}$ ligne du tableau donne les ……..………………….. des points.

Voici le graphique qu'on obtient (on remarquera les intitulés précis des axes !).

Vérifiez à la règle que les 3 points dessinés sont alignés avec le point origine.

C'est bon ? ………..

B. Propriétés graphiques de la proportionnalité (Rappels) :

<u>Propriété</u> : **Sur une représentation graphique,**

	……. *condition ou hypothèse*		……. *résultats ou conclusions*
Quand	on a une situation de proportionnalité	alors	***TOUS*** les points sont { ① alignés ② avec le point origine .

<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à représenter graphiquement une situation de proportionnalité.

La réciproque est vraie aussi :

<u>Réciproque</u> : **Sur une représentation graphique,**

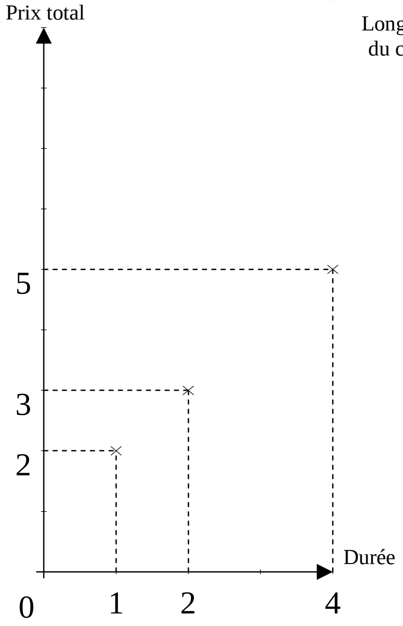
	……. *conditions ou hypothèses*		……. *résultat ou conclusion*
Quand	***TOUS*** les points sont { ① ………………… ②avec ……………….………	alors	on a une situation de ……………………………

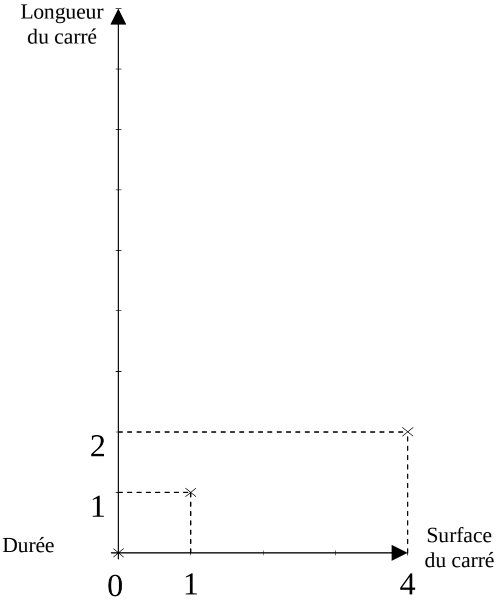
<u>Utilité</u> : Cette propriété sert à reconnaître graphiquement une situation de ………………………………

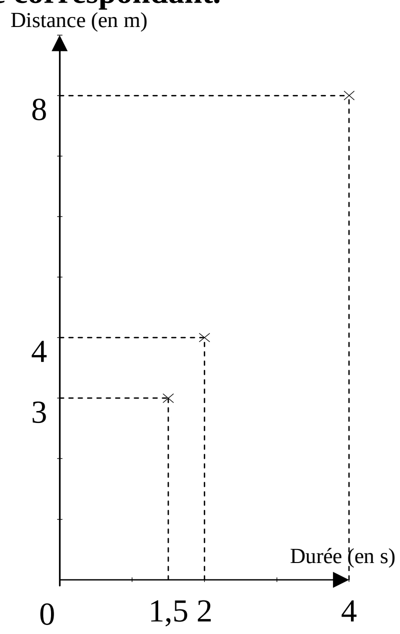
C. Exercices : Graphiques et Proportionnalité (Rappels).

❶ Les graphiques suivants sont ils représentatifs de situations de proportionnalité ? **Justifier !**

***Si oui*, dresser le tableau de proportionnalité correspondant.**





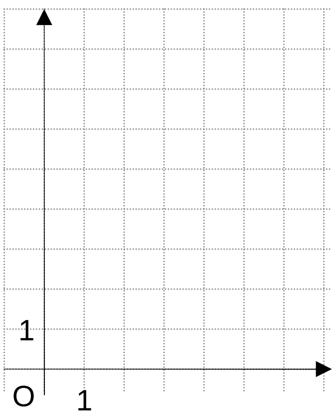


❷ 1) Justifier *par des calculs* si les 2 tableaux ci-dessous sont ou non des tableaux de proportionnalité.

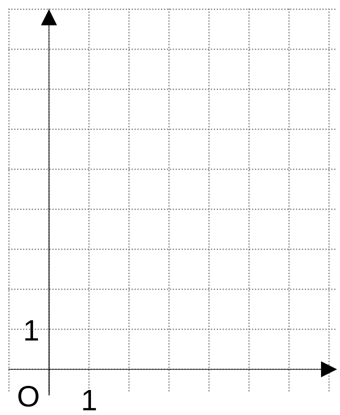
Longueur du carré (en cm)	1	2	3
Surface du carré (en cm²)	1 (= 1^2)	…	…

Longueur du carré (en cm)	0,5	1	2
Périmètre du carré (en cm)	2 (= $0,5 \times 4$)	…	…

2) Construire le graphique correspondant à chaque tableau et vérifier à la règle s'il y a situation de pplté.



Ecrivez les intitulés précis pour chaque axe.



❸ L'Indice de Masse Corporelle (IMC) permet de contrôler son poids.

Il dépend de la taille et du poids et est donné par la formule suivante : $\text{IMC} = \dfrac{\text{poids (en kg)}}{(\text{taille en mètres})^2}$

Par exemple pour un adulte pesant 70 kg, on a : $\text{IMC} = \dfrac{70}{(\text{taille en mètres})^2}$

1. A l'aide de la formule et de votre calculatrice (ou mieux d'un tableur), remplir le tableau suivant :

Taille (en m)	1,50	1,60	1,70	1,80	1,9
IMC pour un adulte de 70 kg					

2. Prouver qu'il n'y a pas proportionnalité entre l'IMC et la taille, (à poids constant !).

3. A l'aide d'un tableur, construisez le graphique correspondant au tableau et vérifiez sur le graphique que vous aurez imprimé que les points ne sont pas alignés.
4. On considère que le poids est « normal » pour un IMC entre 19 et 25. Calculez votre IMC.

➢ Terminons par une dernière remarque sur la proportionnalité :

Ce concept, très présent dans nos vies quotidiennes sera revu en 3$^{\text{ème}}$: en fait la proportionnalité est la traduction numérique d'un concept algébrique encore plus général : la Linéarité.

En 3$^{\text{ème}}$, vous verrez une application de la linéarité aux fonctions : les fonctions linéaires.

Maintenant, il ne faut pas croire que tout varie de manière proportionnelle et que tout tableau est un tableau de proportionnalité, loin de là ! Par exemple, la surface d'un carré n'est pas proportionnelle à sa longueur ; la distance de freinage n'est pas proportionnelle à la durée du freinage ; la qualité est rarement proportionnelle au prix etc. Vous verrez des exemples plus détaillés de non proportionnalité à partir de l'année de 2$^{\text{de}}$.

Ces exemples montrent qu'il ne faut pas confondre « qui dépend de » avec « proportionnel à ». La proportionnalité est une relation de dépendance bien particulière : une dépendance multiplicative fixe entre 2 grandeurs.

VI. VITESSE MOYENNE ET PROPORTIONNALITE.

➢ Reprenons un problème de mouvement uniforme : « Un hélicoptère a parcouru 500 kilomètres en 2 heures. ».

1. Quelle durée doit-on prévoir pour parcourir une distance de 200 kilomètres ?
2. En gardant la même allure, quelle est la distance prévisible parcourue en une 10 minutes ?

× …..

× …..

…………………………………… (en h)			
………………………………..………..			

➢ Intéressons nous de plus près au coefficient de proportionnalité :

Ici le coefficient de proportionnalité s'obtient donc par l'opération $\dfrac{\text{Distance du trajet (en km)}}{\text{Durée du trajet (en h)}}$.

Cette fraction revient à savoir combien de kilomètres sont parcourus par heure de trajet : ce coefficient de proportionnalité représente donc **la distance moyenne parcourue (en km) par heure de trajet.**

On a donné un nom à cette distance moyenne par unité de temps : c'est la vitesse moyenne de déplacement !

A. Définition de la vitesse moyenne :

La vitesse moyenne d'un mobile sur un trajet est **le quotient de la distance** du trajet **par la durée** du trajet.

❶ Formule : Vitesse moyenne sur un trajet = $\dfrac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}$

❷ Unités : **L'unité de la vitesse moyenne est donnée par les unités prises pour la distance et la durée.**

Si par exemple la distance est *en cm* et la durée *en minutes*, la vitesse sera en ………. par ……..

En général on utilise **le km h^{-1}**(ou km/h ou km par h) et le **m s^{-1} (m/s ou mètre par seconde) qui est l'Unité du Système International** pour les vitesses.

❸ Notation : Quand on connaît les unités, on note par exemple : V_{moy} (en m s^{-1}) = $\dfrac{\text{D (en m)}}{\text{T (en s)}}$.

➢ Quatre remarques sur la vitesse moyenne :

① J'attire votre attention sur cette dernière notation source de nombreuses confusions :

D est la longueur totale du trajet et ***T est la durée de ce trajet*** et non l'horaire de départ ou d'arrivée comme on le voit parfois dans des copies d'élèves ! De plus **T doit être une durée en écriture décimale ou fractionnaire** et non en écriture h min s.

② L'unité usuelle de la vitesse moyenne (le km/h) permet de retrouver la formule de la vitesse :

km par heure signifie des kilomètres divisés par des heures d'où la formule : V_{moy} (km/h) = $\dfrac{\text{D (km)}}{\text{T (h)}}$

③ On entend souvent dire par exemple « 20 km heure » au lieu de « 20 km par heure ». La première formulation est fausse et dangereuse car on a tendance à croire qu'il y a un produit dans la formule de la vitesse moyenne !

④ On insiste bien sur l'expression « vitesse moyenne » : en effet, cette formule ne marche pas pour donner la vitesse instantanée qu'on lit sur le tableau de bord d'une voiture quand on roule.

Le concept de vitesse instantanée est trop compliqué pour vous les jeunes et ne sera vue qu'en 1ère !

➢ Deux exemples de calcul de vitesse moyenne :

Un marathonien de haut niveau peut parcourir les 42,195 km en 2 h 15 min. Quelle est sa vitesse moyenne (en km h^{-1}) ?

• **Attention ! Il faut d'abord convertir la durée en nombre décimal :** 2 h 15 min = 2,25 h *(et non 2,15 !)*

• Puis V_{moy} (en km/h) = $\dfrac{\text{D (en km)}}{\text{T (en h)}}$

$= \dfrac{\text{…………… km}}{\text{…………… h}}$

$\approx$ ………….. km h^{-1}

Attention, cette vitesse moyenne ne signifie pas que le marathonien a toujours couru à la même allure !

Un cheval peut parcourir 110 km en 2 h 45 min.

Quelle est alors sa vitesse moyenne (en km h^{-1}) ?

B. Deux autres formules dérivées de la formule de la vitesse moyenne :

En manipulant la formule $V_{moy} = \dfrac{D}{T}$, on peut isoler soit la distance D, soit la durée T. D'où les 2 formules :

① Distance parcourue = Vitesse moyenne × Durée du parcours	$D = V_{moy} \times T$
② Durée du parcours = $\dfrac{\text{Distance parcourue}}{\text{Vitesse moyenne}}$	$T = \dfrac{D}{V_{moy}}$

➢ Deux remarques :

• La première formule indique directement que la distance D est proportionnelle à la fois à la vitesse moyenne V_{moy} et à la durée T du parcours.

• Attention à la cohérence des unités !

➢ Applications :

• Un avion vole à une vitesse moyenne de 800 km/h pendant 7 h 45 min. Quelle distance a-t-il parcourue ?

• A la même vitesse, combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 9 600 km ?

C. Conversions de vitesse :

Méthode en deux étapes : Pour convertir par exemple une Vitesse en km/h en une Vitesse en m/s, il faut :

① **Convertir** la distance D en mètres et la durée T en secondes.

② **Calculer** la vitesse avec ces nouvelles valeurs converties de la distance D et de la durée T.

➢ Trois exemples de conversion de vitesse :

La vitesse moyenne du son dans l'air est environ 331 m/s. Convertir en km/h.

① 331 m = 0,331 km et 1 s = $\frac{1}{3\,600}$ h

② d'où V_{moy} (en km/h) $= \frac{\text{D (en km)}}{\text{T (en h)}}$

$= \frac{0{,}331 \text{ km}}{\frac{1}{3\,600}\text{ h}}$

$= 0{,}331 \times 3\,600$

$\approx 1\,192$ km/h

Une vitesse moyenne du son dans l'air est d'environ 1 192 km/h (à 0°C).

Le record du monde d'athlétisme du 100 mètres plat est de 9,69 s.

Quelle est la vitesse moyenne en km/h ?

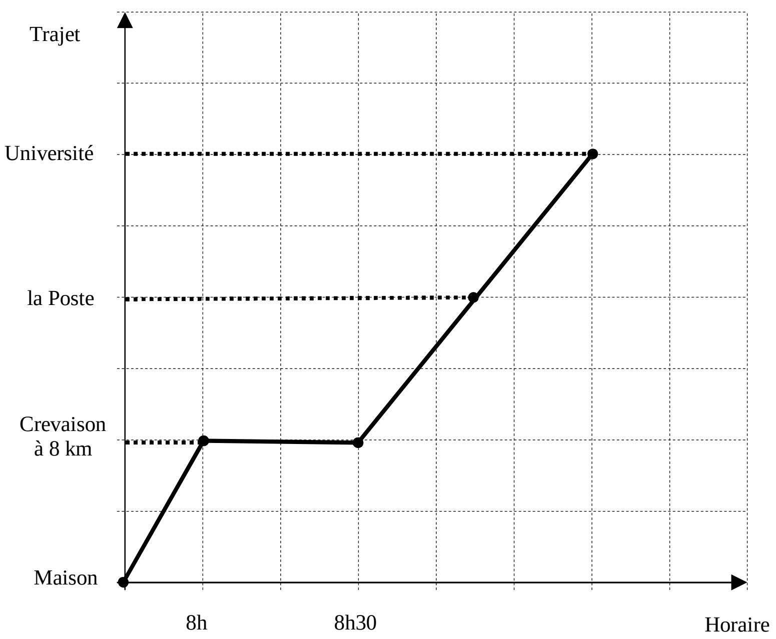
Qui détient ce record du monde ?

Un postillon peut être projeté (involontairement) à la vitesse incroyable de 160 km h^{-1} ! Convertir en m s^{-1}.

D. Exercices sur vitesse moyenne, distance et durée :

➢ Exercice ① :

Un train part d'une ville A vers une ville B à 10 h 30. Il roule à la vitesse moyenne de 150 km/h. Un autre train part de B vers A à 11 h 15. Il circule à la vitesse moyenne de 120 km/h. Les 2 trains se croisent à midi. Quelle est la distance séparant les villes A et B ? (le trajet [AB] est rectiligne) (Schéma conseillé)



➢ Exercice ② (Contrôle 2004) : Graphique, vitesse et proportionnalité.

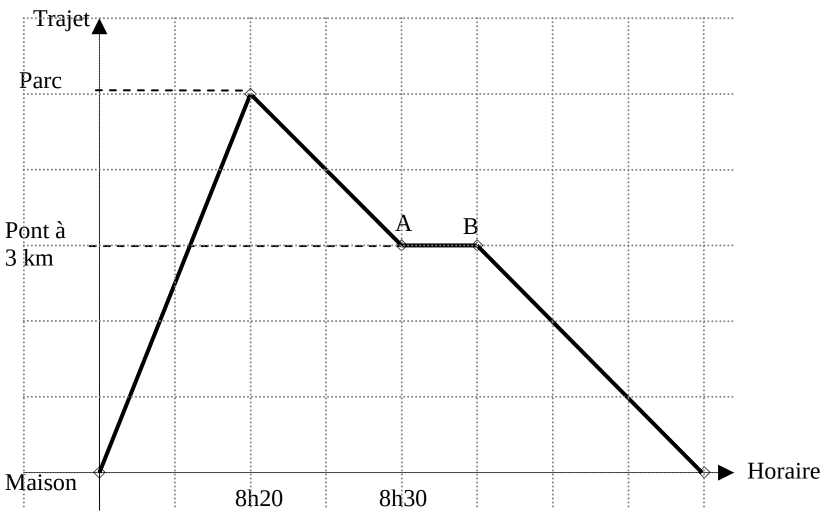
Paul Igone, un jeune mathématicien, a obtenu (à l'arraché) un premier rendez vous avec une charmante demoiselle.

Le rendez vous est fixé à 9h ***précises*** à l'Université.

Le graphique ci contre **symbolise** son trajet à mobylette, de chez lui jusqu'à l'Université. (Attention, ce n'est pas la route !)

1) Quelle distance a-t-il parcourue de la maison à la Poste ?
   Quelle heure à peu prés est-il alors quand il arrive à la Poste ?
   A quelle heure est il parti de chez lui ?
   Les choses se présentent-elles bien pour notre jeune mathématicien ? (justifier)
2) Calculer la vitesse moyenne en km/h sur la première partie du trajet (avant la crevaison).
   Calculer la vitesse moyenne en km/h sur la deuxième partie du trajet (après la crevaison).
   Calculer la vitesse moyenne en km/h sur l'ensemble du trajet (**crevaison exclue**).
   Convertissez cette dernière vitesse en m/s.

➢ Exercice ③ : Graphique, vitesse et proportionnalité (le retour). Test 2005.



Le graphe ci contre **symbolise** le trajet *aller retour* à moto d'Ahmed Alapoubeyl entre chez lui et un parc.

Au retour, il reprend la même route qu'à l'aller.

1. A quelle heure part-il de chez lui ?
2. A quelle heure à peu prés passe-t-il pour la première fois devant le pont ?
3. Quelle distance totale a-t-il parcourue ?
4. Expliquez la partie [AB] du graphe.
5. Calculer la vitesse moyenne en **km/minutes** à l'aller.
   Convertissez cette vitesse en **m/s**.
6. Calculer la vitesse moyenne au retour (pause incluse) en **km/h.**

➢ Exercice ④ :

Un automobiliste a effectué sur l'autoroute le trajet suivant :

- Il a roulé pendant 1 h 30 min à 120 km/h de moyenne.
- Il s'est arrêté déjeuner pendant 1h.
- Puis il a repris la route pour faire 250 km en roulant à 100 km/h de moyenne.

1. Calculer la distance parcourue (en km) sur la première partie du trajet.
2. Calculer la durée (en heures) sur la deuxième partie du trajet.
3. Quelle est la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet (pause non comprise) ?
4. Représenter graphiquement la distance parcourue en fonction de la durée.
   Unités : 2 cm pour 1 h sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 km sur l'axe des ordonnées.

➢ Exercice ⑤ : Sécurité routière.

Combien de temps « gagne-t-on » pour un trajet de 100 km, quand on roule sur une autoroute à 140 km/h au lieu des 130 km/h autorisés par temps sec ?

VII. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

A. Je dois savoir :

- Remplissez ce tableau :

	A refaire	A revoir	Maîtrisé
Définitions de la proportionnalité (formule ou tableau).			
Prouver qu'un tableau est de proportionnalité ou de non proportionnalité.			
Remplir un tableau de proportionnalité à partir d'une situation donnée.			
Coefficient et égalité de fractions.			
Trouver une $4^{ème}$ proportionnelle par égalité de fractions et résolution d'une équation de type $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.			
Résoudre un problème en appliquant rigoureusement la méthode en 2 étapes.			
Problème de pourcentages simples.			
Problème de hausse ou baisse en pourcentage.			
Problème d'échelle.			
Conversions horaires.			
Calcul de vitesse moyenne.			
Conversion de vitesse moyenne.			
Problème de mouvement uniforme.			
Représentation graphique de la proportionnalité.			
Aimer la proportionnalité.			

Pour préparer le test et le contrôle : Livre (Diabolo Maths $4^{ème}$ Hachette 2006) p.118 et 138.

B. Conseils :

- Prouver qu'on a un tableau de pplté : Utilisez la méthode par fractions à simplifier, c'est la plus simple !
  Ne pas oublier d'écrire le coefficient de proportionnalité.
  Quand il y a la colonne 0/0, il faut obligatoirement utiliser soit la multiplication par le coefficient, soit les produits en croix.
- Tableaux : Faites les assez grands. Soyez précis dans les intitulés. N'oubliez pas les unités !
  Il est préférable que toutes les quantités soient exprimées **dans la même unité.**
  On ne met jamais une date ou une année dans une case numérique d'un tableau !
  On doit forcément avoir une colonne complète (donnée par exemple par une proportion ou par un pourcentage ou par 2 informations numériques liées etc.).
- Coefficient : Attention au sens de la fraction (colonne inversée). Entier ou fraction irréductible !
- Calcul des 4èmes pptielles : Par égalité de fractions et en reprenant la colonne complète du tableau.
  Attention à mettre les fractions dans le bon sens.
  On met l'inconnue **au numérateur !**
- Pourcentage : On place forcément le nombre 100 dans le tableau, pas n'importe où !
- Echelle : Attention toutes longueurs doivent être **dans la même unité** !
- Vitesse moyenne : Appliquez rigoureusement la formule $V_{moy}(\ldots) = \frac{D(\ldots)}{T(\ldots)}$ en inscrivant bien les unités demandées.
  Attention à la cohérence des unités.
  La durée T doit être écrite dans le système décimal et non dans le système h min s.
- Problème de mouvement uniforme : Attention à ne pas se tromper dans les formules de distance ou de durée.
  Attention à la cohérence des unités.

C. Erreurs à ne pas faire :

- Prouver qu'on a un tableau de proportionnalité : Oublier des produits en croix quand on choisit cette méthode (déconseillée).
- Tableaux : Mal remplir le tableau : Les nombres ne correspondent pas aux intitulés.
  Ne pas avoir une colonne complète donnée par l'énoncé.
  Oubli des unités ou intitulés imprécis.
- Calcul du Coefficient : Oublier d'inverser la colonne complète !
- Calcul des 4èmes proportionnelles : Erreurs dans l'écriture de l'égalité de fractions.
  Erreurs dans la résolution d'équations de type $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.
- Pourcentages : • Confusion entre problème de pourcentage et problème d'augmentation ou baisse en pourcentage.
  • Mal placer le nombre 100 dans le tableau.
- Problème d'échelle : Oublier de convertir **toutes les longueurs dans la même unité.**
- Vitesse : Se tromper dans une conversion horaire. Ex : 30 minutes = 0,3h !!! Faux ! Corrigez !
- Problème de mouvement uniforme : Confondre horaire et durée.
  Lecture graphique : la courbe n'est pas une route !
- Représentation graphique : Oublier le titre ou les intitulés des axes.

D. Fiche de révision à faire :

Quel est l'intitulé de la deuxième partie de ce contrat 7 double ? ……………………………………………….