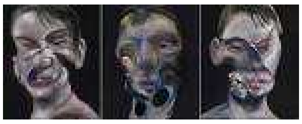
ECRITURES FRACTIONNAIRES ; FRACTIONS.

« Hélas le monde préfère trop souvent un mensonge simple à une vérité complexe. »



« Trois études pour autoportrait »
Francis Bacon, Paris 1975

« Les mathématiques devraient être regardées comme l'alphabet de toute philosophie. »

Francis Bacon[1], Peintre.

- Pré-requis pour prendre un bon départ :

	☹	😐	☺	☺☺
Nombres relatifs : les 4 opérations ; priorités des opérations.				
Décomposer un nombre en produit de facteurs ! Ex : 48 = …. × ….				
Quotient ; Ecritures fractionnaires.				
Fractions : définition, simplification.				
Fractions : addition et soustraction (dénominateur multiple l'un de l'autre).				

[1] Francis Bacon (1909-1992) : Grand artiste peintre d'origine irlandaise, autodidacte. Ses œuvres torturées sont une vision noire de notre monde. Elles invitent chacun de nous à s'interroger sur la violence qui peut nous habiter.

NOM et Prénom : ……………………………………… 4ème ……

I. RAPPELS DE SIXIEME.

A. Quotient :

Définition : On appelle « **quotient** » le résultat d'une …………………… par un nombre **non nul** (≠ ….).

Remarque : Le ***diviseur doit être différent de 0*** car partager en 0 partie (en aucune partie) n'a aucun sens !

➢ Exemples : ❶ Un quotient peut être un nombre entier relatif :

8 ÷ ……. = -8 ……. ÷ 4 = 8 64 ÷ …….. = 8

❷ Un quotient peut être un nombre décimal relatif :

10 ÷ ……… = 2,5 ……… ÷ (-4) = 2,5 -100 ÷ …….. = 2,5

❸ Hélas, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux !

- Je pense par exemple à 2 ÷ 7 ou à π ÷ 1,1 : quand on pose ces divisions, elles ne se « terminent » jamais. ☹
- Autre « problème » : ces écritures en ligne sont **source d'erreurs de priorité** par les élèves !

Par exemple : Dans l'écriture 5 – 5 ÷ 5, on peut faire l'erreur de priorité de faire le calcul 5 – 5 !

Dans l'écriture $5 - \frac{5}{5}$, impossible de faire cette erreur de calcul !

D'où l'introduction d'une écriture plus simple du quotient : ***l'écriture fractionnaire*** !

B. Vocabulaire des écritures fractionnaires :

❶ **L'écriture fractionnaire** du quotient n ÷ d est de la forme $\frac{n}{d}$ et se lit « n sur d ».

❷ Le nombre « d » sous la barre de fraction, (d ≠ …...), « **dénomine** » l'unité de l'écriture fractionnaire.

Autrement dit, ce nombre « d » indique en quelle « unité » est exprimée l'écriture fractionnaire.

Ce nombre « d » s'appelle le ……………………..…………

❸ Le nombre « n » au dessus de la barre de fraction indique combien de fois on prend cette « unité ».

Ce nombre « n » s'appelle le ………………………………

Ex : Dans $\frac{2}{5}$, le dénominateur 5 indique qu'il s'agit de « cinquièmes » et le numérateur 2 indique qu'on en prend 2 pour obtenir « 2 cinquièmes ».

Dans $\frac{7}{3}$, le dénominateur 3 indique qu'il s'agit de « .... » et le numérateur 7 indique qu'on en prend .... pour obtenir « .... ».

Dividende ……………………………

$\boxed{n \div d = \frac{n}{d}}$

Diviseur ≠ …… ………………………………... ≠ ……

➢ Application 1 : Ecrire sous forme fractionnaire ***sans rien calculer*** :

Ex : $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ **❶ On écrit d'abord LA BARRE DE FRACTION EN PREMIER !**

❷ Cette barre de fraction doit être mise à hauteur du milieu du signe = .

un tiers = neuf quarts = la moitié de k = une demi-pomme =

$\pi \div 2{,}3$ = $(2{,}5 - 1) \div (x - 4) = \frac{\quad}{\quad}$ vitesse moyenne = distance ÷ durée = $\frac{\quad}{\quad}$

➢ Application 2 : Ecrire sous forme fractionnaire ***sans rien calculer*** : **ATTENTION AUX PRIORITES !**

$3 - 5 \div 7 =$ $(a + b) \div (c - 1) =$ $a + b \div c - 1 =$

Quatre cas particuliers importants à retenir : Quelles que soient les valeurs de n et de d ($d \neq 0$), on a :

❶ $\frac{0}{d}$ = ……. 0 divisé par n'importe quel nombre (sauf 0) donne tjs …….. ex : $\frac{0}{-2{,}257}$ = …..

❷ $\frac{n}{1}$ = …….. Tout nombre divisé par 1 redonne …………………….. ex : $\frac{-8{,}8}{1}$ = …….

❸ $\frac{d}{d}$ = …… Tout nb non nul divisé par ……………………… donne …… ex : $\frac{-\pi}{-\pi}$ = ……..

❹ Un pourcentage est une écriture fractionnaire dont le dénominateur vaut ……… c-à-d $k\ \% = \frac{k}{100}$

$7\ \% = \frac{….}{….}$ $\frac{0{,}10}{100}$ = ………% $100\ \% = \frac{……..}{100}$ $\frac{0{,}05}{100}$ = ……… % $2\ 500\ \% = \frac{………}{100}$

C. Fractions :

1. Définition des fractions :

Définition : **Lorsque le numérateur n et le dénominateur d** ($d \neq$ ….) sont **des NOMBRES ENTIERS**,

alors $\frac{n}{d}$ s'appelle une ……………….…………….. Ex : $\frac{2}{7}$ est une fractions mais pas $\frac{7}{1{,}2}$.

Contre-exemples : Donner deux écritures fractionnaires qui ne sont pas des fractions : ……… ou ………

➢ A retenir : **❶ Tout nombre entier relatif peut s'écrire sous forme de fraction :**

$-18\ 695 = \frac{-18\ 695}{……}$ $5 = \frac{……}{……}$ $-11 = \frac{……}{9}$ $4 = \frac{……}{……} = \frac{……}{5} = \frac{40}{……}$

❷ Tout nombre décimal relatif peut s'écrire sous forme de fraction :

$1{,}5 = \frac{15}{……}$ $-0{,}7 = \frac{……}{10}$ $-5{,}78 = \frac{…….}{…….} = \frac{…………}{100\ 000}$

Dorénavant, on remplacera TOUJOURS les nombres décimaux par des fractions dans les calculs !

2. Comparaisons de deux fractions :

On peut comparer facilement 2 fractions lorsqu'elles appartiennent ***à la même famille*** **!**

Pour comparer 2 fractions (ou 2 écritures fractionnaires), il suffit qu'elles soient **au même** ………….……..
La plus grande fraction sera alors celle qui aura le plus ……………… numérateur.

Compléter par > ou < : $\frac{5}{4}$ …… $\frac{4}{4}$ $\frac{1587}{35}$ ……… $\frac{-1\,600}{35}$ $\frac{1}{33}$ ……. $\frac{5}{66}$

II. QUOTIENTS EGAUX ; SIMPLIFICATION (6EME).

A. Quotients égaux et produits « en croix »[2] :

➢ Propriété des quotients égaux :

	(…… donnée ou hypothèse)		(…….. résultat ou conclusion)
Quand	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$)	alors	$a \times d = b \times c$

Autrement dit : Quand deux écritures fractionnaires sont égales. alors leurs produits « en croix » sont égaux.

La réciproque de la propriété ci-dessus est vraie aussi.

	(…… donnée ou hypothèse)		(…….. résultat ou conclusion)
Quand		alors	

Autrement dit : Quand leurs produits « en croix » sont ………………. alors les …………………………………………………

Utilité : Cette réciproque sert à montrer que deux ………………………………………………………………….. sont égales.

➢ Application : En utilisant la propriété réciproque, montrer que les fractions $\frac{15}{-21}$ et $\frac{-35}{49}$ sont égales :

D'une part, $15 \times 49 =$ ……….. (à la calculette)

D'autre part, $-21 \times (-35) =$ ……….. (à la calculette)

Puisque ……………..……….. = ………………………. alors ……………………. CQFD

➢ Exercice : De la même manière, montrer que $\frac{27}{81}$ et $\frac{675}{2025}$ sont égales.

➢ Cette propriété fondamentale va nous servir page suivante à prouver l'égalité qui est à la base de la simplification des fractions. Elle servira aussi pour le contrat sur la proportionnalité.

[2] La propriété ci-dessous qui est une propriété fondamentale des proportions a été démontrée par le grand mathématicien grec Euclide dans le Livre VII des Eléments d'Euclide au 3ème siècle avant Jésus Christ.

B. Règle des quotients égaux :

Soient $k \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{n}{d}$ et $\frac{n \times k}{d \times k}$ sont deux écritures fractionnaires du même quotient c-à-d :

$$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{k}}{\mathbf{d} \times \boldsymbol{k}} \quad \textbf{(avec } \mathbf{k \neq 0} \textbf{ et } \mathbf{d \neq 0)}$$

Autrement dit : On ne change pas une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

Preuve : Montrer que $\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k}$ revient à montrer que $n \times (d \times k) = d \times (n \times k)$.

D'une part, on a $n \times (d \times k) = n \times d \times k$

D'autre part, on a $d \times (n \times k) = d \times n \times k$

Puisque …..……….. = ………………. alors, d'après la réciproque A] p.4, $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ CQFD

- L'égalité dans le sens $\frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{k}}{\mathbf{d} \times \boldsymbol{k}} = \frac{n}{d}$ va permettre de simplifier les fractions en « réduisant » le numérateur

et le dénominateur de départ, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs entre eux (autre que 1).

- Exemple : $\frac{78}{48} = \frac{39 \times \ldots}{24 \times \ldots} = \frac{39}{24} = \frac{3 \times \ldots}{3 \times \ldots} = \frac{13}{8}$

Dans 13/8 , il n'y a plus de facteurs ……………………….. (autre que 1) entre numérateur et dénominateur.

C. Fractions irréductibles :

Ainsi donc, un quotient a plusieurs écritures fractionnaires. Une est meilleure que toutes les autres :

Définition : **La meilleure écriture fractionnaire d'un quotient**, c-à-d la plus simple, s'appelle la ***fraction irréductible***[3]. Cette écriture vérifie les 2 conditions suivantes : **le numérateur et le dénominateur sont**

❶ **entiers** ❷ et **sans facteurs communs entre eux**[4]**(autre que 1).**

- Méthode : A partir d'une écriture fractionnaire, on obtient donc une fraction irréductible :

  ❶ en faisant « disparaître les virgules » si il y en a, ❷ puis en simplifiant « au maximum ».

- Exercice : Ces écritures fractionnaires sont-elles irréductibles (justifier) ? Si non, les simplifier.

$\frac{12}{15}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{0,4}{0,9}$ $-\frac{20}{30}$ $-\frac{13}{17}$

D. Deux conseils importants :

Je ne me fais pas beaucoup d'illusions mais je vous les donne quand même :

❶ **Avant de commencer les calculs, toujours simplifier si possible les écritures fractionnaires.**

❷ Pour cela, bien connaître **ses tables** de ………………………………..……….. !

[3]Irréductible : Qu'on ne peut plus réduire : « Dans un coin reculé de la Gaule se dressait un petit village d'irréductibles gaulois. »

[4] Le numérateur et le dénominateur *ne sont pas* dans une même table de multiplication commune. Ex : 2 et 7 ou bien 26 et 19.

E. Exercices sur la simplification :

Remarques : • Simplifier toujours par paire(s) de facteurs identiques, au numérateur et au dénominateur.
• Simplifier par 1 ne sert strictement à rien.
• Simplifier **au maximum**.

① Simplifier **au maximum** en colonnes sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

• Ex : $\frac{-45}{27} = \frac{-5 \times 9}{9 \times 3} = \frac{-5}{3}$ F.I

$\frac{42}{-48} =$	$-\frac{26}{39} =$	$\frac{8}{64} =$	$\frac{21}{-49} =$

• Ex : $\frac{0,24}{0,8} = \frac{0,24 \times 100}{0,8 \times 100} = \frac{24}{80} = \frac{3 \times 8}{10 \times 8} = \frac{3}{10}$ F.I.

$\frac{1,5}{4,5} =$	$\frac{-0,8}{2} =$	$\frac{9}{0,01} =$

② A quelles Fractions Irréductibles (F.I.) sont égales les pourcentages suivants :

Ex : 50 % $= \frac{50}{100} = \frac{50 \times 1}{50 \times 2} = \frac{1}{2}$ F.I.

50 % représente la moitié.

25 % =	-20 % =	10 % =

③ Simplifier **au maximum** en colonnes sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

Ex : $\frac{6a}{-9a} = \frac{2 \times 3 \times a}{-3 \times 3 \times a} = \frac{2}{-3}$ F.I. $= \frac{-2}{3}$ F.I

$\frac{-2z}{4z} =$	$\frac{18n}{24d} =$	$\frac{-56ky}{35ak} =$

F. Critères de divisibilité ; Application à la simplification :

Est-il facile de simplifier $\frac{126}{342}$? ………………………………

Effectivement non. Toute la difficulté est de décomposer 126 et 342 en faisant apparaître des facteurs communs. Comment trouver ces facteurs communs ? C'est là qu'interviennent les critères de divisibilité :

❶ Un entier est **divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est …………….**

❷ Un entier est **divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.**

❸ Un entier est **divisible par 5 lorsque son dernier chiffre est …… ou …….**

❹ Un entier est **divisible par 10 ou 100 ou 1000 etc. lorsqu'il se termine par 0 ou ……. ou ……. etc.**

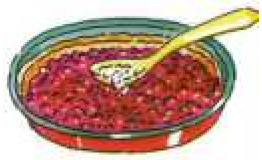
- <u>Application</u> : Simplifier <u>**au maximum**</u> en colonnes sous forme de fraction irréductible ou d'un entier :

On essaye toujours de débuter la simplification par le plus grand nombre possible.

$\frac{96}{84} =$	$\frac{125}{-75} =$	$\frac{-330}{285} =$	$\frac{460}{380} =$

Ensuite, vérifier les calculs à la calculatrice en utilisant les touches « / » (Texas) ou « d/c » (Casio) qui permettent de simplifier automatiquement les fractions.

III. ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS D'ECRITURES FRAC.(5[EME]).



Hier, j'avais très faim et cette belle tarte me tentait diaboliquement ! J'en ai mangé un quart. Mais le soir, avant de me coucher, repensant à ce moment de délice, je n'ai pu résister et j'en ai remangé un tiers. Pour savoir quelle fraction il me reste de la tourte, j'ai besoin de savoir additionner des fractions. Je me faisais deux réflexions :

① On a toujours besoin des maths dans la vie. ② Il faut savoir résister à la tentation !

A. Sévère mise en garde !

Calculer la somme ou la différence de fractions (ou d'écritures fractionnaires) est **source de nombreuses erreurs** de la part des élèves à cause de la condition nécessaire suivante :

Avant d'additionner (soustraire) des écritures fractionnaires, il faut qu'elles soient de **la même famille !**
Autrement dit, il faut que les dénominateurs soient ……..…………………… !

Mais comment fait-on alors pour additionner ou soustraire des écritures fractionnaires ?! Hein ?

B. Lorsque les dénominateurs sont égaux : c'est facile !

Quand les dénominateurs sont égaux, les écritures sont *de la même famille* donc la règle est simple :

2 règles : $\dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} + \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{n+m}}{\mathbf{d}}$ (avec $d \neq 0$) $\dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} - \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{n-m}}{\mathbf{d}}$ (avec $d \neq 0$)

Ex : $\dfrac{5}{9} + \dfrac{13}{9} = \dfrac{18}{9} = 2$! (On n'oublie jamais de simplifier la fraction finale quand on peut !)

$\dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{6} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$ F.I.

- Calculer en colonnes *sans oublier de simplifier le résultat final* quand c'est possible :

$M = \dfrac{5}{6} + \dfrac{11}{6}$	$O = \dfrac{16}{15} + \dfrac{-11}{15}$	$E = \dfrac{1{,}2\,\pi}{3} - \dfrac{0{,}2\,\pi}{3}$	$V = \dfrac{2a}{7} + \dfrac{5a}{7}$	$E = \dfrac{2k}{9} + \dfrac{4k}{9}$
=	=	=	=	=
				$R = \dfrac{2k}{3}$

C. Lorsque les dénominateurs sont différents : c'est moins facile !

Attention ! Avant d'additionner ou de soustraire des écritures fractionnaires qui ne sont pas « de la même famille » (*à dénominateurs différents*), il faut **absolument les mettre au même dénominateur** !

Toute la difficulté va être de **trouver un dénominateur commun**.

1. Comment trouver un dénominateur commun à plusieurs fractions ?

➢ Exemple : $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ sont-elles de la même famille ? …………… car …………………

On doit donc trouver un dénominateur commun à ces deux fractions (avant de pouvoir les additionner).

Cela revient à **chercher un nombre entier qui est à la fois dans les tables de 6 et de 8**, dit autrement, un multiple commun à 6 et à 8.

Le plus petit multiple commun à 6 et 8 est évidemment *24* !

Explication : 24 est dans la table de 6 ($24 = 6 \times 4$). Et 24 est aussi dans la table de 8 ($24 = 8 \times 3$) !

➢ Exercice : Trouver « le Plus Petit Multiple Commun (noté ppmc) » des couples d'entiers suivants :

Trois remarques : **Ce plus petit multiple commun est supérieur ou égal au plus grand des 2 nombres.**

Ce plus petit multiple commun est inférieur ou égal au produit des 2 nombres.

Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».

	5 et 10	*4 et 6*	*5 et 6*	*6 et 9*	*8 et 9*	*10 et 15*	*3 et 33*
Plus petit multiple commun (ppmc)							

Maintenant qu'on sait trouver un multiple commun (le plus petit si possible !), on va pouvoir additionner des fractions n'appartenant pas à la même famille.

2. Comment additionner 2 écritures frac. à dénominateurs différents ?

Exemple (en colonne)	***Méthode (en colonne) :*** *Additionner (soustraire) 2 écritures fract. à dénominateurs différents.*	*A vous maintenant ! (en colonne)*
$\frac{1}{6} - \frac{2}{9}$	Ces 2 fractions n'ont pas le même ………………………………… **On ne peut pas les soustraire ou additionner telles quelles !**	$\frac{3}{14} - \frac{12}{7}$
$\left(= \frac{1 \times 3}{6 \times 3} - \frac{2 \times 2}{9 \times 2}\right)$	• 18 est le dénominateur commun d'après l'exercice plus haut. **On met donc chaque fraction au même dénominateur 18.** **• Cette étape peut être sous entendue et faite de tête sans problème.**	=
$= \frac{3}{18} - \frac{4}{18}$	Maintenant que les fractions sont sur le même dénominateur (même famille), on peut les additionner ou soustraire.	
$= \frac{-1}{18}$ F.I.	**On n'oublie pas de vérifier si cette fraction ne peut pas être simplifiée.**	
	Le résultat final est sous forme de fraction irréductible ou d'entier !	

➢ En utilisant la méthode ci-dessus, calculer les sommes et différences suivantes :

$M = \frac{1}{5} - \frac{7}{6}$	$O = \frac{-1}{4} - \frac{1}{6}$	$E = \frac{2}{3} + \frac{2}{33}$	$V = \frac{1}{8} - \frac{-1}{9}$	$E = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$
=	=	=	=	=

➢ Trois remarques :

Je me répète, la seule petite difficulté est de trouver un dénominateur commun avant d'additionner !

L'exercice précédent nous permet d'énoncer quelques généralités sur ce dénominateur commun :

❶ Le dénominateur commun doit être si possible le plus petit des multiples communs (ppmc), sinon on obtient des fractions à grands nombres qui sont difficiles à simplifier !

❷ **maximum entre a et b $\leq$ ppmc de 2 nombres a et b $\leq$ a $\times$ b**

❸ **Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».**

3. Exercice : calculs de sommes et de différences de fractions.

Méthode : 1) ***SIMPLIFIER D'ABORD CHAQUE FRACTION*** (quand c'est possible).

2) Puis calculer en colonnes. Résultat sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'entier.

M = $\frac{20}{25} - \frac{9}{30}$	A = $\frac{-5}{3} + \frac{-56}{35}$	H = $\frac{-18}{15} - \frac{-3}{10}$	E = $\frac{49}{42} - \frac{50}{40}$
=	=	=	=
R = $\frac{1}{2}$	R = $\frac{-49}{15}$	R = $\frac{-9}{10}$	R = $\frac{-1}{12}$
Ex : $-2 - \frac{12}{-28}$	F = $5 - \frac{9}{-12}$	O = $\frac{-33}{18} + \frac{24}{-64}$	R = $\frac{-27}{-72} + 3$
On simplifie d'abord les signes et les écritures !	=	=	=
$= -2 + \frac{12}{28}$			
$= -2 + \frac{3}{7}$			
$= \frac{-2}{1} + \frac{3}{7}$			
$= \frac{\ldots\ldots}{7} + \frac{3}{7}$			
$= \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ F.I ?			
	R = $\frac{23}{4}$	R = $\frac{-53}{24}$	R = $\frac{27}{8}$

E = $\dfrac{21k}{63} + \dfrac{21k}{18}$

=

R = $\dfrac{3k}{2}$

V = $\dfrac{27b}{24} + \dfrac{-70b}{100}$

=

R = $\dfrac{17b}{40}$

E = $\dfrac{8}{12} - \dfrac{1}{-18}$

=

R = $\dfrac{13}{18}$

R = $\dfrac{-\pi}{24} - \dfrac{-\pi}{32}$

=

R = $\dfrac{-\pi}{96}$

Quand il y a plus de 2 écritures fractionnaires, on peut faire les additions soustractions 2 par 2 (après avoir simplifié bien entendu !)

B = $\dfrac{-2\pi}{-11} - \dfrac{-7\pi}{33} + \dfrac{5\pi}{55}$

=

R = $\dfrac{16\pi}{33}$

A = $\dfrac{-4}{7} - \dfrac{3}{6} + \dfrac{25}{15}$

=

R = $\dfrac{25}{42}$

C = $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{5}$

=

R = $\dfrac{17\pi}{60}$

- En guise de conclusion, on voit que l'addition et donc la soustraction s'accordent très mal avec les fractions. Et finalement on le comprend assez bien : lorsque les dénominateurs ne sont pas égaux, les fractions ne sont pas du même genre (des quarts ne sont pas de la même famille que des demis par exemple) et on ne peut additionner ou soustraire que des choses du même genre !

On verra plus tard que ce « problème » de l'addition ou de la soustraction réapparaîtra avec les puissances (contrat 4) et les racines carrées en classe de 3$^{\text{ème}}$.

- Après l'addition et la soustraction, passons à la ……………………………………….

IV. MULTIPLICATION D'ECRITURES FRACTIONNAIRES (5EME).

A. Formule :

Contrairement à l'addition et la soustraction, **la règle est très simple car intuitive** pour la multiplication. ☺

Règle :	$\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{b} \times \mathbf{d}}$ (avec b ≠ ….. et d ≠ ……)

$\dfrac{-15}{63} \times \dfrac{35}{-12}$	**Méthode pour la multiplication de fractions**	$\dfrac{-12}{-35} \times \dfrac{63}{-27}$
$\left(= +\dfrac{15 \times 35}{63 \times 12} \right)$	• **On s'est d'abord occupé du signe final** (« + » ici car il y a un nombre pair (2) de facteurs négatifs). • Puis on a appliqué la règle intuitive ci-dessus pour la multiplication des fractions. **On ne s'amuse surtout pas à faire ces multiplications !** *Cette étape est facultative* et on passera directement aux décompositions en produits de facteurs.	=
$= \dfrac{\mathbf{3} \times 5 \times \mathbf{7} \times 5}{9 \times \mathbf{7} \times 4 \times \mathbf{3}}$	On décompose en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier.	
$\left(= \dfrac{5 \times 5}{9 \times 4} \right)$	On a simplifié tous les facteurs communs (ici $\mathbf{3} \times \mathbf{7}$). *Etape facultative.*	
$= \dfrac{25}{36}$ F.I.	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier relatif.	

A retenir : On s'occupe en tout premier du signe final.

On ne met ***JAMAIS AU MEME DENOMINATEUR POUR LA MULTIPLICATION.***

➢ Exercices : Calculer en colonnes et mettre le résultat sous forme irréductible ou sous forme d'entier :

① $\dfrac{11}{25} \times \dfrac{-55}{121}$ R = $-\dfrac{1}{5}$

=

$\dfrac{-3}{16} \times \dfrac{24}{-12}$ R = $\dfrac{3}{8}$

=

$\dfrac{17}{-19} \times \dfrac{-19}{17}$

=

$\dfrac{-24}{-56} \times \dfrac{64}{-60} \times \dfrac{-4}{-8}$ R = $\dfrac{-8}{35}$

=

② Ex : $-25 \times \dfrac{3}{55}$

$= \dfrac{-25}{1} \times \dfrac{3}{55}$

$= -\dfrac{5 \times \mathbf{5} \times 3}{1 \times 11 \times \mathbf{5}}$

$= -\dfrac{15}{11}$ F.I.

$\dfrac{17}{36} \times (-12)$

=

$37 \times \dfrac{1}{37}$

=

$\dfrac{1}{-13} \times (-13)$

=

③ Ex : $\frac{0,25}{-4,9} \times \frac{-7}{-5}$

$= -\frac{0,25}{4,9} \times \frac{7}{5}$ *Signe final d'abord !*

Ensuite, on va « se débarrasser » des nombres décimaux en multipliant par 10 ou 100 ou 1 000 etc.

$\left(= -\frac{0,25 \times 100}{4,9 \times 100} \times \frac{7}{5}\right)$ *A faire de tête !*

$= -\frac{25}{490} \times \frac{7}{5}$

$= -\frac{5 \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}}{\mathbf{7} \times 70 \times \mathbf{5}}$

$= -\frac{5}{70}$ *On peut encore simplifier.*

$= -\frac{1 \times \mathbf{5}}{14 \times \mathbf{5}}$

$= -\frac{1}{14}$ F.I.

$\frac{2,1}{3} \times \frac{9}{-7}$ R $= -\frac{9}{10}$

=

$\frac{-50}{-11} \times 1,1$ R = 5

=

B. Fraction d'une quantité :

Prendre la fraction d'une certaine quantité revient à ………..………… la fraction par cette quantité.

<u>Conséquence</u> : Dans les situations, les mots « de », « du » ou « des » entre une fraction et une quantité se traduisent par le signe ……

Les 2 neuvièmes de (-15)	**<u>Méthode</u> : Calculer la fraction d'une certaine quantité.**	Les 4 tiers de 9/4
$= \frac{2}{9} \times (-15)$	On a traduit ici le mot « de » par une multiplication.	$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{4}$
$\left(= \frac{2}{9} \times \frac{-15}{1}\right)$	On a écrit sous forme de fractions les nombres entiers ou décimaux s'il y en a. *Etape facultative.*	
$\left(= \frac{2 \times (-15)}{9 \times 1}\right)$	On a appliqué la formule intuitive pour la multiplication des fractions. *Etape facultative.*	$\left(= \frac{4 \times 9}{3 \times 4}\right)$
$= \frac{2 \times (-5) \times \mathbf{3}}{3 \times \mathbf{3} \times 1}$	On a décomposé en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier tous les facteurs communs (à gauche la paire de 3 ; à droite la paire 4×3).	$= \frac{\mathbf{4} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times \mathbf{4}}$
$= \frac{-10}{3}$ F.I	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier relatif.	= 3 !

➢ <u>Application :</u> Calculer en colonnes (résultat : F.I. ou entier !).

Cinq quarts de -16.	Sept tiers de 9/14.	25 % de (-40).	20 % de 30 %.	56 % de 25/8 €.

V. NOMBRES INVERSES ; DIVISION DE 2 ECRITURES FRAC.

Avez vous remarqué que dans les exos précédents ① et ② p.12, certains produits valaient 1 ? ………..

On a donné un joli nom à **deux nombres non nuls dont le produit vaut 1**.

A. Nombres inverses :

• Définition : Deux nombres non nuls sont dits **inverses l'un de l'autre** quand leur **produit est égal à** ….

• Exemples ① : Puisque $2 \times \frac{1}{2}$ = …….. , alors l'inverse de 2 est $\frac{1}{\dots\dots}$.

L'inverse de 7 est $\frac{\dots}{\dots}$ L'inverse de 21 est ……. L'inverse de t est ……. (avec $t \neq 0$)

• Exemples ② : Puisque $\frac{7}{9} \times \frac{9}{7}$ = …….. , alors l'inverse de $\frac{7}{9}$ est $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

L'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ L'inverse de $\frac{1}{8}$ est …… L'inverse de $\frac{j}{4}$ est ……. (avec $j \neq$ …..)

• Notation : **L'inverse $\frac{1}{k}$ (d'un nombre non nul k)** peut être noté $\mathbf{k^{-1}}$. Ex : $\frac{1}{9}$ peut se noter $\mathbf{9^{-1}}$.

➢ Remarques :

① **Ne pas confondre l'inverse et l'opposé !** Par ex : l'inverse de 3 est 1/3 ! Et non -3 qui est l'opposé de 3 !

L'opposé de $\frac{-1}{7}$ est $-\left(\frac{-1}{7}\right)$ c-à-d $\frac{1}{7}$ alors que l'inverse de $\frac{-1}{7}$ est $\frac{7}{-1}$ c-à-d -7.

② Le mot inverse veut bien dire ce qu'il veut dire : on inverse la quantité, on la « retourne » !

➢ Exercice :

Nombre	*0*	*1*	*-5*	*1,7*	$-\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{a}{3}$
Opposé								
Inverse	Attention !							

B. Division par un nombre non nul :

De même que la notion d'opposé reliait la soustraction à l'addition (soustraire un nombre revient à ………………….. son opposé), la notion d'inverse va permettre de relier la division à la …………………

❶ Règle : **Diviser un nombre a par un nombre b** ($\neq 0$) revient à **multiplier a par l'inverse de b**.

❷ Deux formules : $\mathbf{a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$ **et** $\mathbf{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$ (b et c et d $\neq 0$)

➢ 4 exemples : $\frac{9}{5} \div \frac{18}{15} = \frac{9}{5} \times \frac{15}{18} = \frac{9 \times 5 \times 3}{5 \times 9 \times 2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \times \frac{25}{9} = \frac{3 \times 5 \times 5}{5 \times 3 \times 3} = \frac{5}{3}$

$\frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$ $\qquad \frac{\frac{2}{1}}{3} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Remarque : On ne trouve pas le même résultat pour les 2 derniers calculs !

*Evidemment ! Le trait de la barre principale de fraction n'est pas placé au même endroit ! Ces 2 derniers exemples nous disent donc de **faire très attention à la place de la barre principale de fraction** : elle doit être rigoureusement **en face du signe =** !*

➢ <u>Application</u> : Calculer en colonnes (résultat : F.I. ou entier !).

$M = \dfrac{5}{\dfrac{1}{5}}$ R = 25 =	$A = \dfrac{-8}{\dfrac{4}{3}}$ R = - 6 =	$H = \dfrac{-6}{51} \div \dfrac{18}{-17}$ R = $\dfrac{1}{9}$ =	$E = \dfrac{\dfrac{48}{15}}{\dfrac{64}{20}}$ R = 1 =

VI. WHAT'S THE PROBLEM ?

Situations à résoudre à gauche ou sur votre cahier d'exercices. Méthode par Analyse-Synthèse !

① Un prof a ramassé 60 copies. Il perd les $\frac{4}{5}$ le soir même dans le métro ! Combien d'élèves auront leurs copies le lendemain ?

R = 12

② Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40 % ! Sans écouter, un chapitre demande 15 heures de travail à la maison. Combien de temps travaillerez-vous en écoutant ?

R = 9 heures

③ Fralgorithmique :

```
1   VARIABLES
2     t EST_DU_TYPE NOMBRE
3     r EST_DU_TYPE NOMBRE
4     p EST_DU_TYPE NOMBRE
5   DEBUT_ALGORITHME
6     AFFICHER "Entrer le prix actuel"
7     LIRE p
8     AFFICHER "Entrer le taux en pourcentage"
9     LIRE t
10    r PREND_LA_VALEUR t/100 * p
11    p PREND_LA_VALEUR p + r
12    AFFICHERCALCUL p
13  FIN_ALGORITHME
```

1. Que représente la variable t ?

2. Que représente la variable r ?

3. Que représente la variable p ?

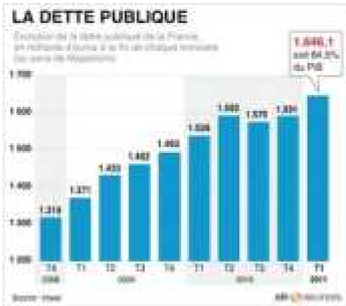
4. Que veut dire concrètement l'instruction 7 ?

5. Traduire mathématiquement l'instruction 10 :

6. A quoi sert cet algorithme ?

7. Modifier cet algorithme pour calculer un nouveau prix après une baisse en pourcentage.

④ Selon les statistiques de l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) publiées le 31/7/2011, la dette publique de la France a augmenté de 54,9 milliards d'euros entre début janvier et fin mars 2011 pour atteindre 1 646,1 milliards d'euros, soit 84,5 % du PIB (Produit Intérieur Brut ≈ richesse produite en un an en France).



1. Quelle était le montant de la dette publique française au début janvier 2011 ?
2. Quelle est l'augmentation de la dette en % arrondi au dixième durant le premier trimestre 2011 ?

R = 3,5 %

VII. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LES FRACTIONS.

Calculer en colonnes (conseil : **Simplifiez dès que possible !**) :

① $A = \left(\frac{18}{27} + 3\right) \div \frac{1}{9}$ R = 33

$B = \left(\frac{25}{30} - \frac{35}{28}\right) \div \frac{5}{8}$ R = $-\frac{2}{3}$

$C = \frac{77}{70} - \frac{3}{25} \times \frac{5}{9}$ R = $\frac{31}{30}$

② $\frac{1}{a} \div (-b) + \frac{1}{c}$ avec $a = 6$, $b = -\frac{5}{12}$ et $c = \frac{10}{6}$

=

R = 1

$\left(\frac{3}{9}\right)^2 \div \frac{33}{27}$ R = $\frac{1}{11}$

=

③ $\dfrac{\dfrac{4}{6} - \dfrac{3}{12}}{\dfrac{10}{15} + \dfrac{1}{4}}$ R = $\frac{5}{11}$

=

$\dfrac{\dfrac{-1}{3} + \dfrac{22}{33}}{\dfrac{-14}{21}}$ R = $\frac{-1}{2}$

=

$5 - \dfrac{\dfrac{-24}{8}}{9}$ R = $\frac{16}{3}$

=

$\dfrac{3}{18} - \dfrac{35}{18} \times \dfrac{-36}{56}$

=

R = $\frac{17}{12}$

④ Développer les produits suivants :

$M = -8 \left(-5 + 2t - \dfrac{5j}{24} \right)$

=

$O = \dfrac{-25}{35} \left(\dfrac{14}{15} - 49z \right)$

=

$U = \dfrac{2}{-3} \left(\dfrac{-9}{5} - \dfrac{-k}{4} \right)$

=

⑤ Le triangle ABC a pour dimensions AB = $\dfrac{10}{15}$ AC = $\dfrac{5}{6}$ BC = $\dfrac{7}{14}$. Ce triangle est-il rectangle ?

⑥ Les égalités suivantes sont-elles vérifiées pour les valeurs de a et b données ci dessous ?

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a + b}$ pour $a = \frac{15}{20}$ et $b = \frac{-10}{12}$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2$ pour $a = \frac{-1}{3}$ et $b = -3$

VIII. POUR PREPARER LE TEST ET LE CONTROLE.

- **Faire *en temps limité* les évaluations des années précédentes sur mon site (//yalamaths.free.fr, espace 4$^{\text{ème}}$, les fractions).**
- **Comparer avec les corrigés. Refaire si besoin !**

A. Conseils :

- **SIMPLIFIER avant de commencer les calculs**, je ne le répèterai jamais assez !
- **SIMPLIFIER après avoir décomposé en produits de facteurs dans une multiplication.**
- **SIMPLIFIER le résultat final si possible** : ex : $\frac{5}{1} = 5$!
- Addition et soustraction = mise au même ……………………………
- Multiplications = décomposer en produits de facteurs puis simplifier.
- Situations : méthode par Analyse-Synthèse !

B. Erreurs à ne pas faire :

- Additions et soustractions :

Oublier de mettre au même dénominateur. Ex : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cancel{=} \frac{2}{5}$ ARCHI FAUX ! Corrigez.

Mettre au même dénominateur mais oublier de multiplier les numérateurs. Ex : $\frac{1}{2} + \frac{5}{3} \cancel{=} \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$ FAUX !

- Multiplications : ON NE MET JAMAIS AU MEME DENOMINATEUR dans un produit !

- Inverse : Confondre Inverse et Opposé. Ex : l'inverse de –5 est $\frac{1}{-5}$ ou $-\frac{1}{5}$ (mais pas $\frac{1}{5}$!).

- Divisions :

Oublier d'inverser quand on transforme en multiplication. Ex : $\dfrac{\frac{1}{2}}{3} \cancel{=} \frac{1}{2} \times 3$ ARCHI FAUX ! Corrigez.

Mal inverser à cause de la barre principale de fraction mal placée. Ex : $\dfrac{1}{\frac{5}{3}} \cancel{=} \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$ ARCHI FAUX !

On inverse seulement la 2$^{\text{ème}}$ quantité et non la 1$^{\text{ère}}$: Ex : $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} \cancel{=} \frac{2}{1} \times \frac{3}{5}$ ARCHI FAUX ! Corrigez.

- Calculs complexes :

Fautes de priorité ; **Fautes de signe.**

Fautes de signe ÷ mal traduit en barre de fraction : Ex : $5 \div 1 + 2 = \frac{5}{1+2}$ FAUX ! Corrigez.

Fautes de parenthèses. Ex : $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{4}{3} \cancel{=} -(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}) + \frac{1}{5}$ FAUX ! Corrigez.

- Situations : Confondre Nombre et Fraction (proportion) : une fraction (proportion) est toujours relative à quelque chose. Ex : Mon salaire de 1 000 € a augmenté d'un tiers ne se traduit pas par $1\,000 + \frac{1}{3}$! FAUX !

C. Remplir le tableau de compétences sur la fiche de contrat :

Quel est l'intitulé du prochain contrat ? ………………………………………………………..

Perle du Bac 2011 : « Les bombes atomiques sont inoffensives quand elles servent à produire de l'électricité. »

Perle du Brevet 2012 : « La guerre de 14-18 s'est déroulée du 14$^{\text{ème}}$ au 18$^{\text{ème}}$ siècle. »

Perle du Bac 2015 : « De nombreux conflits ont éclaté dans le Sahara afin de pouvoir récupérer tout le sable qui est présent. »

Perle du Bac 2015 : « Il est vrai que la Chine et l'Inde sont deux pays avec beaucoup d'habitants, mais cela reste faible en comparaison de la France et de l'immigration. »