corrigé ECRITURES FRACTIONNAIRES ; FRACTIONS.

« Hélas le monde préfère trop souvent un mensonge simple à une vérité complexe. »

« Trois études pour autoportrait »
Francis Bacon, Paris 1975

« Les mathématiques devraient être regardées comme l'alphabet de toute philosophie. »

Francis Bacon[1], Peintre.

- Pré requis pour prendre un bon départ :

	A refaire	*A revoir*	*Maîtrisé*
Nombres relatifs : les 4 opérations ; priorités des opérations.			
Tables de multiplication parfaitement sues dans les 2 sens !			
Quotient ; Ecritures fractionnaires.			
Fractions : définition, simplification.			
Fractions : addition et soustraction (dénominateur multiple l'un de l'autre).			

« Correction en rouge et italique. »

[1] Francis Bacon (1909-1992) : Grand artiste peintre d'origine irlandaise, autodidacte. Ses œuvres torturées sont une vision noire de notre monde. Elles invitent chacun de nous à s'interroger sur la violence qui peut nous habiter.

NOM et prénom : ……………………………………………………. *Classe : 4ème ….*

I. RAPPELS DE SIXIEME :

A. Quotient, écritures fractionnaires :

Définition : On appelle « **quotient** » le résultat d'une *division* par un nombre **non nul (** $\neq 0$ **).**

Remarque : Le ***diviseur doit être différent de 0*** car partager en 0 partie (en aucune partie) n'a aucun sens !

- Exemples : ❶ Un quotient peut être un nombre entier relatif :

93 ÷ (-3) = *- 31* -144 ÷ (-12) = *12* *99* ÷ 9 = 11 2,5 ÷ *2,5* = 1

-8 ÷ 1 = -8 ou *16 ÷ (-2)* = -8 ou … *32* ÷ (-4) = -8 (-64) ÷ *8* = -8

❷ Un quotient peut être un nombre décimal relatif :

10 ÷ 4 = *2,5* 2,7 ÷ 10 = *0,27* 25,8 ÷ (-100) = *-0,258* *-5,5* ÷ (-5) = 1,1

2,5 ÷ 1 = 2,5 ou *-10 ÷ (-4)* = 2,5 ou … *-10* ÷ (-4) = 2,5 -100 ÷ *(-40)* = 2,5

❸ Hélas, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux !

- Je pense par exemple à 2 ÷ 7 ou à π ÷ 1,1 : quand on pose ces divisions, elles ne se « terminent » jamais. ☹ $\frac{2}{7} = 0,28571...$ $\frac{\pi}{1,1} = 2,8559\ ...$

- Autre « problème » : ces écritures en ligne sont **source d'erreurs de priorité** par les élèves !

Par exemple : Dans l'écriture 5 – 5 ÷ 5, on peut faire l'erreur de priorité de faire le calcul 5 – 5 !

Dans l'écriture $5 - \frac{5}{5}$, impossible de faire cette erreur de calcul !

D'où l'introduction d'une écriture plus simple du quotient : ***l'écriture fractionnaire*** !

A. Ecritures fractionnaires ; vocabulaire :

❶ **L'écriture fractionnaire** du quotient n ÷ d est de la forme $\mathbf{\frac{n}{d}}$ et se lit « n sur d ».

❷ Le nombre « d » en dessous la barre de fraction, (d ≠ …...), « dénomine » l'écriture fractionnaire. Ainsi, il indique le nom de famille de l'écriture fractionnaire.

Ce nombre « d » s'appelle le *dénominateur.*

Ex : $\frac{2}{5}$ fait partie de la famille des « cinquièmes ». $\frac{7}{8}$ fait partie de la famille des « *huitièmes* ».

❸ Le nombre « n » au dessus de la barre de fraction « numérote » l'écriture fractionnaire dans sa famille.

Ce nombre « n » s'appelle le *numérateur.*

Ex : Dans $\frac{7}{3}$, le numérateur 7 indique que $\frac{7}{3}$ est le septième dans la famille des « tiers ».

Dividende *Numérateur*

$n \div d = \frac{n}{d}$

Diviseur ≠ *0* *Dénominateur* $\neq 0$

Dorénavant, **on utilisera TOUJOURS l'écriture fractionnaire** !

- <u>Exercice 1</u> : Ecrivez sous forme fractionnaire **sans rien calculer** :

<u>Ex</u> : $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ **❶ On écrit d'abord la BARRE DE FRACTION EN PREMIER !**

❷ Cette barre de fraction doit être mise EXACTEMENT AU MILIEU DU SIGNE =.

neuf quarts = $\frac{9}{4}$ deux demis = $\frac{2}{2}$ un tiers = $\frac{1}{3}$ la moitié de k = $\frac{k}{2}$ une demi pomme = $\frac{pomme}{2}$

$\pi \div 2,3 = \frac{\pi}{2,3}$ $(2,5 - 1) \div (x - 4) = \frac{2,5 - 1}{x - 4}$ vitesse moyenne = distance ÷ temps = $\frac{distance}{temps}$

Ecrivez sous forme fractionnaire un quotient non décimal dont le dénominateur est le triple du numérateur.

- <u>Exercice 2 :</u> Ecrire sous forme fractionnaire ***sans rien calculer*** : <u>**ATTENTION AUX PRIORITES !**</u>

On applique les simplifications sur les additions et soustractions et attention aux priorités !

$(+3) - (-5) \div (+7) = 3 + \frac{5}{7}$ $(\pi - (-8,78)) \div 2 - (-6) = \frac{\pi + 8,78}{2} + 6$

$a - b \div c = a - \frac{b}{c}$ $(a - 2 \times b) \div c - 1 = \frac{a - 2b}{c} - 1$ $\pi \div (\pi \times 5 + 2) = \frac{\pi}{5\pi + 2}$

<u>Quatre cas particuliers importants à retenir</u> : Quelles que soient les valeurs de n et de d ($d \neq 0$), on a :

❶ $\frac{0}{d} = 0$ 0 divisé par n'importe quel nombre (sauf 0) donne tjs *0.* ex : $\frac{0}{2,257} = 0$

❷ $\frac{n}{1} = n$ Tout nombre divisé par 1 donne *lui même.* ex : $\frac{-8,8}{1} = -8,8$

❸ $\frac{d}{d} = 1$ Tout nombre non nul divisé par *lui même* donne *1.* ex : $\frac{\pi}{\pi} = 1$

❹ Un pourcentage est une écriture fractionnaire dont le *dénominateur* vaut *100* c-à-d $k\ \% = \frac{k}{100}$

$7\% = \frac{7}{100}$ $\frac{0,10}{100} = 0,1\ \%$ $\frac{100}{100} = 100\ \%$ $\frac{0,05}{100} = 0,05\ \%$ $\frac{2\,500}{100} = 2\,500\ \%$

B. Fractions :

1. Définition des fractions :

<u>Définition :</u> **Lorsque le numérateur n et le dénominateur d (*$d \neq 0$*)** d'une écriture fractionnaire $\frac{n}{d}$ sont ***des NOMBRES ENTIERS RELATIFS***, alors $\frac{n}{d}$ s'appelle *une fraction*. <u>Ex</u> : $\frac{2}{7}$ mais non $\frac{7}{1,2}$

.<u>Contre exemples :</u> Ecrire deux écritures fractionnaires qui ne sont pas des fractions : $\frac{8,3}{5}$ ou $\frac{2}{\pi}$

- A retenir : <u>**❶ Tout nombre entier peut s'écrire sous forme de fraction**</u> **:**

$18695 = \frac{18695}{1}$ $11 = \frac{11}{1} = \frac{-22}{-2} = \ldots$ $4 = \frac{4}{1} = \frac{20}{5} = \frac{40}{10}$ $-5 = \frac{-5}{1} = \frac{20}{-4} = -\frac{30}{6}$

❷ Tout nombre décimal relatif peut s'écrire sous forme de fraction :

$1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{150}{100} = \ldots$ $-0{,}7 = \frac{-7}{10} = -\frac{7}{10}$ $5{,}78 = \frac{578}{100} = \frac{578000}{100000} = \frac{-578}{-100}$ $-0{,}00412 = \frac{-412}{100000}$

Dorénavant, on remplacera TOUJOURS les nombres décimaux par des fractions dans les calculs !

2. Comparaisons de deux fractions :

On peut comparer facilement 2 fractions lorsqu'elles appartiennent ***à la même famille*** **!**

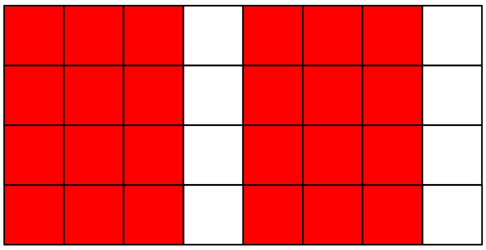
> Pour comparer 2 fractions (ou deux écritures fractionnaires), il suffit qu'elles aient **le même *dénominateur*.**
> La plus grande fraction sera celle qui aura le plus *grand* numérateur.

Comparez $\frac{5}{4} > \frac{4}{4}$ $\frac{1587}{35} < \frac{1587{,}1}{35}$ $\frac{1}{33} = \frac{1 \times 2}{33 \times 2} = \frac{2}{66} < \frac{5}{66}$

3. Exercices :

① Ecrire le quotient de l'opposé de a par la somme des opposés de b et ($-\pi$) : $\frac{-a}{-b + \pi}$

② Voici un rectangle de 8 cm sur 4 cm. Colorier en rose fuschia trois quarts de la surface.



Colorier les ¾ de la surface veut dire colorier 3 carreaux sur 4 ce qui revient au même que 3 lignes sur 4 ou bien que 3 colonnes sur 4.

On colorie 24 carreaux

Combien de carreaux avez vous coloriés ? 18 ? *Non 24*.

Ceux qui ont colorié 18 carreaux ont fait ¾ de la longueur 8 = 6 et ¾ de la largeur 4 = 3 puis 6 × 3 = 18. Ce qui est faux : prendre ¾ de la surface ***ne veut pas dire*** *prendre ¾ de la longueur × ¾ de la largeur.*

Calculer les $\frac{3}{4}$ de la surface. *Surface à colorier* $= \frac{3}{4}$ *de la surface totale (encore la Méthode FRCP !)*

$= \frac{3}{4} \times$ *32 carreaux*

$= 3 \times \frac{32}{4}$

$= 3 \times 8 =$ *24 carreaux*

On retrouve les 24 carreaux par le calcul.

Votre résultat devrait-il correspondre au nombre de carreaux coloriés ? *Oui !*

③ Donnez les abscisses des points A, B, C et D ; Placer E ($x_E = \frac{2}{3}$) et F ($x_F = -\frac{1}{3}$).

<u>Méthode pour placer un point ou bien trouver son abscisse fractionnaire</u> :

① On compte le nombre de parties dans un segment unité de longueur 1 (ici 6) pour avoir le dénominateur.

<u>Exemple :</u> Sur la figure plus bas, l'abscisse d'un point est donc représentée par une fraction sur 6.

② Le numérateur sera le nombre de graduations à partir du point Origine.

③ Puis on simplifie la fraction si nécessaire.

<u>Exemple</u> : Sur la figure ci dessous, le point A est à 3 graduations du point origine O donc $x_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemple : A est à 3 graduations de l'origine donc $x_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

.	F	C	O	.	B	A	E	.	.	.	D	.	.	.
.	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	.	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	.	1	.	$\frac{4}{3}$	.	.	.

$x_E = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ *donc E est à 4 graduations à droite de O.* $x_F = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$ *donc F est 2 graduations à gauche de O.*

④ Grâce à une calculatrice, on obtient une écriture décimale approchée de $\frac{2500}{137}$ c-à-d $\frac{2500}{137} \approx 18{,}248175$.

On utilise la valeur approchée de $\frac{2500}{137}$ *donnée par la calculatrice pour répondre aux questions.*

Grâce au résultat donné par la calculette, encadrez au $\frac{1}{100}$ème ce quotient : $18{,}24 < \frac{2500}{137} < 18{,}25$

Donnez la troncature à la dizaine de $\frac{2500}{137}$: *10* *on « coupe » le nombre après le chiffre des dizaines et on rajoute des 0.*

Donnez l'arrondi au centième de $\frac{2500}{137}$: *18,25* *18,248175 est plus proche de 18,25 que de 18,24.*

Donnez une valeur approchée à la dizaine par excès de $\frac{2500}{137}$: *20*

Donnez une valeur approchée au $\frac{1}{1000}$ème par défaut de $\frac{2500}{137}$: *18,248* *c'est la troncature au* $\frac{1}{1000}$*ème.*

II. QUOTIENTS EGAUX ; SIMPLIFICATION DES FRACTIONS. (6EME)

A. Quotients égaux et produits « en croix » :

➢ Propriété des quotients égaux :

	(…… donnée ou hypothèse)		(…….. résultat ou conclusion)
Quand	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$)	alors	$a \times d = b \times c$

Autrement dit : Quand deux écritures fractionnaires sont égales. alors leurs produits « en croix » sont égaux [2].

La réciproque de la propriété ci-dessus est vraie aussi.

	(…… donnée ou hypothèse)		(…….. résultat ou conclusion)
Quand	$a \times d = b \times c$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$)	alors	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Autrement dit : Quand leurs produits « en croix » sont égaux alors les écritures fractionnaires sont égales.

Utilité : Cette réciproque sert à montrer que deux écritures fractionnaires sont égales.

➢ Application : En utilisant la propriété réciproque, montrer que les fractions $\frac{15}{-21}$ et $\frac{-35}{49}$ sont égales :

(On veut vérifier une égalité entre deux quantités : on applique donc la méthode « d'une part, d'autre part ….)

D'une part, $15 \times 49 = 735$

D'autre part, $-21 \times (-35) = 735$

Puisque les produits « en croix sont égaux » : $15 \times 49 = -21 \times (-35)$ alors $\frac{15}{-21}$ et $\frac{-35}{49}$. CQFD

➢ Exercice : De la même manière, montrer que $\frac{27}{81}$ et $\frac{675}{2025}$ sont égales.

D'une part, $27 \times 2025 = 54675$

D'autre part, $81 \times 675 = 54675$

Puisque les produits « en croix sont égaux » : $27 \times 2025 = 81 \times 675$ *alors* $\frac{27}{81} = \frac{675}{2025}$. *CQFD*

➢ Cette propriété très importante va nous servir à écrire 3 égalités sur les fractions qui seront à la base de la simplification des fractions. Elle servira aussi pour le contrat sur la proportionnalité.

B. Règle des quotients égaux :

Soient $k \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{n}{d}$ et $\frac{n \times k}{d \times k}$ sont 2 écritures fractionnaires du **même quotient** c-à-d :

$$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{k}}{\mathbf{d} \times \boldsymbol{k}} \quad \textbf{(avec } \mathbf{k \neq 0} \textbf{ et } \mathbf{d \neq 0}\textbf{)}$$

Autrement dit : On ne change pas une écriture fractionnaire lorsqu'on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

[2] On retrouve en fait une des méthodes permettant de montrer que deux grandeurs sont proportionnelles.

Preuve : A l'aide de la propriété des quotients égaux du IIA], montrons par exemple que $\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k}$:

D'une part, $n \times (d \times k) = n \times d \times k$

D'autre part, $d \times (n \times k) = d \times n \times k$

Puisque *les produits « en croix » sont égaux :* $n \times (d \times k) = d \times (n \times k)$ *alors* $\frac{n}{d} = \frac{n \times k}{d \times k}$ *CQFD*

- L'égalité $\frac{n \times \mathbf{k}}{d \times \mathbf{k}} = \frac{n}{d}$ va permettre de simplifier les fractions en « réduisant » le numérateur et le dénominateur de départ, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs entre eux (autre que 1).
- Exemple : $\frac{78}{48} = \frac{39 \times \mathbf{2}}{24 \times \mathbf{2}} = \frac{39}{24} = \frac{\mathbf{3} \times 13}{\mathbf{3} \times 8} = \frac{13}{8}$

Dans 13/8, il n'y a plus de facteurs *communs* (autre que 1) entre numérateur et dénominateur.

On essayera toujours de simplifier en seulement une fois (rarement deux) : $\frac{78}{48} = \frac{13 \times \mathbf{6}}{8 \times \mathbf{6}} = \frac{13}{8}$

C. Fractions irréductibles :

Ainsi donc, un quotient a plusieurs écritures fractionnaires. Une est meilleure que toutes les autres :

> Définition :
>
> **La meilleure écriture fractionnaire d'un quotient**, c-à-d la plus simple, s'appelle ***fraction irréductible***[3].
>
> Cette écriture vérifie les 2 conditions suivantes :
>
> Le numérateur et le dénominateur sont : ***① entiers.***
>
> ***② et sans facteurs communs entre eux[4] (autres que 1).***

- Méthode :A partir d'une écriture fractionnaire, on obtient donc une fraction irréductible :

❶ en faisant « disparaître les virgules » si il y en a, ❷ puis en simplifiant « au maximum ».

- Exercice : Ces écritures fractionnaires sont-elles irréductibles (justifier) ? Si non, les simplifier.

Commentaire [m1]: Faire marquer F.I à côté de chaque fraction irréductible.

$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\frac{4}{9}$ *irréductible* $\frac{0,4}{0,9} = \frac{4}{9}$ $-\frac{20}{30} = -\frac{2}{3}$ $-\frac{13}{17}$ *irréductible*

D. Deux conseils importants :

Je ne me fais pas beaucoup d'illusions mais je vous les donne quand même :

> ❶ **Avant** de commencer les calculs, **toujours simplifier si possible** les écritures fractionnaires.
>
> ❷ Pour cela, bien connaître *ses tables de multiplication !*

[3] Irréductible : qu'on ne peut plus réduire. « Dans un coin reculé de la Gaule se dressait un petit village d'irréductibles gaulois. »

[4] Le numérateur et le dénominateur ne sont pas dans une table de multiplication commune. Ex : 7 et 2 ou bien 13 et 19.

E. Exercices sur la simplification :

Remarque : On simplifie toujours par paire(s) de facteurs identiques, au numérateur et au dénominateur.

① Simplifier sous forme de fraction irréductible ou d'un entier :

•Ex : $\frac{-45}{27} = \frac{\mathbf{9} \times (-5)}{\mathbf{9} \times 3} = \frac{-5}{3}$ $\frac{42}{-48} = \frac{\mathbf{6} \times 7}{\mathbf{6} \times (-8)} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8} = \frac{-7}{8}$ $-\frac{26}{39} = -\frac{\mathbf{13} \times 2}{\mathbf{13} \times 3} = -\frac{2}{3}$

$\frac{8}{64} = \frac{1 \times \mathbf{8}}{8 \times \mathbf{8}} = \frac{1}{8}$ $\frac{21}{-49} = \frac{\mathbf{7} \times 3}{\mathbf{7} \times (-7)} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$

•Ex : $\frac{0,24}{0,8} = \frac{0,24 \times \mathbf{100}}{0,8 \times \mathbf{100}} = \frac{24}{80} = \frac{3 \times \mathbf{8}}{10 \times \mathbf{8}} = \frac{3}{10}$ $\frac{1,5}{4,5} = \frac{1,5 \times \mathbf{10}}{4,5 \times \mathbf{10}} = \frac{15}{45} = \frac{1 \times \mathbf{15}}{3 \times \mathbf{15}} = \frac{1}{3}$

$\frac{-0,8}{2} = \frac{-0,8 \times \mathbf{10}}{2 \times \mathbf{10}} = \frac{-8}{20} = \frac{-2}{5}$ $\frac{9}{0,01} = \frac{9 \times \mathbf{100}}{0,01 \times \mathbf{100}} = \frac{900}{1} = 900$ *!*

② A quelles fractions irréductibles sont égales les pourcentages suivants :

Ex : $50\ \% = \frac{50}{100} = \frac{\mathbf{50} \times 1}{\mathbf{50} \times 2} = \frac{1}{2}$ *50% représente la moitié.*

$25\ \% = \frac{25}{100} = \frac{1 \times \mathbf{25}}{4 \times \mathbf{25}} = \frac{1}{4}$ *25% représente le quart.*

$20\ \% = \frac{20}{100} = \frac{1 \times \mathbf{20}}{5 \times \mathbf{20}} = \frac{1}{5}$ *20% représente le cinquième.*

$10\ \% = \frac{10}{100} = \frac{1 \times \mathbf{10}}{10 \times \mathbf{10}} = \frac{1}{10}$ *10 % représente le dixième.*

③ Simplifier en colonnes sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'un entier :

•Ex : $\frac{6a}{-9a} = \frac{2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{a}}{-3 \times \mathbf{3} \times \mathbf{a}} = \frac{2}{-3}$ F.I. $= \frac{-2}{3}$ F.I $\frac{-2z}{4z} = \frac{-1 \times \mathbf{2} \times \mathbf{z}}{2 \times \mathbf{2} \times \mathbf{z}} = \frac{-1}{2}$ *F.I.*

$\frac{18n}{24d} = \frac{\mathbf{6} \times 3n}{\mathbf{6} \times 4d} = \frac{3n}{4d}$ *F.I.* $\frac{-56xy}{35xt} = \frac{-\mathbf{7} \times 8 \times \mathbf{x} \times y}{\mathbf{7} \times 5 \times \mathbf{x} \times t} = \frac{-8y}{5t}$ *F.I.*

F. Critères de divisibilité ; Application à la simplification :

Est-il facile de simplifier $\frac{126}{342}$? *Dur pour l'instant !*

Effectivement non. Toute la difficulté est de décomposer 126 et 342 en faisant apparaître des facteurs communs. Comment trouver ces facteurs communs ? C'est là qu'interviennent les critères de divisibilité :

❶ Un entier est **divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est** *pair.*

❷ Un entier est **divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.**

❸ Un entier est **divisible par 5 lorsque son dernier chiffre est** *0* **ou** *5.*

❹ Un entier est **divisible par 10 ou 100 ou 1000 etc. lorsqu'il se termine par 0 ou** *00* **ou** *000* **etc.**

- Application : Simplifier en colonnes sous forme de fraction irréductible ou d'un entier :

On essaye toujours de débuter la simplification par le plus grand nombre possible.

96 et 84 sont div. par 2 et 3 donc par 6.

$$\frac{96}{84} = \frac{\mathbf{6} \times 16}{14 \times \mathbf{6}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

125 et 75 sont div. par 5 et encore par 5 donc par 25.

$$\frac{125}{75} = \frac{\mathbf{25} \times 5}{\mathbf{25} \times 3} = \frac{5}{3}$$

330 et 285 sont divisibles par 3 et 5 donc par 15

$$\frac{330}{285} = \frac{\mathbf{3} \times 110}{\mathbf{3} \times 95} = \frac{110}{95} = \frac{\mathbf{5} \times 22}{\mathbf{5} \times 19} = \frac{22}{19}$$

460 et 380 se terminent par 0 donc sont divisibles par 10.

$$\frac{460}{380} = \frac{46 \times \mathbf{10}}{38 \times \mathbf{10}} = \frac{46}{38} = \frac{\mathbf{2} \times 23}{\mathbf{2} \times 19} = \frac{23}{19}$$

Ensuite, vérifiez vos calculs avec votre calculatrice en utilisant les touches / (Texas) ou d/c (Casio) qui permettent de simplifier automatiquement les fractions.

III. ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS D'ECRITURES FRAC (5EME).

Hier, j'avais très faim et cette belle tarte me tentait diaboliquement !

J'en ai mangé un quart. Mais le soir, avant de me coucher, repensant à ce moment de délice, je n'ai pu résister et j'en ai remangé un tiers.

Pour savoir quelle fraction il me reste de la tarte, j'ai besoin de savoir additionner des fractions. Je me faisais deux réflexions :

① On a toujours besoin des maths dans la vie. ② Il faut savoir résister à la tentation !

A. Sévère mise en garde !

Calculer la somme ou la différence de fractions (ou d'écritures fractionnaires) est **source de nombreuses erreurs** de la part des élèves à cause de la condition nécessaire suivante :

> Pour additionner (soustraire) des écritures fractionnaires, il faut qu'elles appartiennent **à la même famille !**
> Autrement dit, **il faut que les dénominateurs soient *égaux* !**

Mais comment fait-on alors pour additionner ou soustraire des écritures fractionnaires ?!

B. Lorsque les dénominateurs sont égaux :

Quand les dénominateurs sont égaux, les écritures sont *de la même famille* donc la règle est simple :

2 Règles	$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{n + m}}{\mathbf{d}}$ (avec $d \neq 0$)	$\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{n - m}}{\mathbf{d}}$ (avec $d \neq 0$)

Ex : $\frac{5}{9} + \frac{13}{9} = \frac{18}{9} = 2$ On n'oublie jamais de simplifier la fraction quand on peut !

$\frac{1}{6} - \frac{4}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

➢ Calculer en colonnes *sans oublier de simplifier le résultat final* quand c'est possible :

$\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$	$\frac{16}{15} + \frac{-11}{15}$	$\frac{1,2\,\pi}{3} - \frac{0,2\,\pi}{3}$	$\frac{2a}{7} + \frac{5a}{7}$	$\frac{2k}{9} + \frac{4k}{9}$
$= \frac{16}{6}$	$= \frac{5}{15}$	$= \frac{1,2\,\pi - 0,2\,\pi}{3}$	$= \frac{7a}{7}$	$= \frac{6k}{9}$
$= \frac{8}{3}$ F.I.	$= \frac{1}{3}$ F.I.	$= \frac{\pi}{3}$ F.I.	$= a$	$= \frac{2k}{3}$

C. Les dénominateurs sont différents :

Attention ! Avant d'additionner ou de soustraire des écritures fractionnaires qui ne sont pas « de la même famille » (*à dénominateurs différents*), il faut **absolument les mettre au même dénominateur** !

Toute la difficulté va être de **trouver un dénominateur commun**.

1. Comment trouver un dénominateur commun à plusieurs fractions ?

➢ Exemple : $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ sont-elles de la même famille ? *Oui car les dénominateurs 6 et 8 sont égaux.*

On doit donc trouver un dénominateur commun à ces deux fractions (avant de pouvoir les additionner).

Cela revient à **chercher un nombre entier qui est à la fois dans les tables** de 6 et de 8, dit autrement, un multiple commun à 6 et à 8.

Le plus petit multiple commun à 2 et 8 est évidemment *24* !

Explication : *24* (= 6 × 4) est dans la table de 6. Et *24* (= 8 × 3) est aussi dans la table de 8 !

➢ Exercice : Trouver « le Plus Petit Multiple Commun (noté ppmc) » des couples d'entiers suivants :

Trois remarques : **Ce plus petit multiple commun est supérieur ou égal au plus grand des 2 nombres.**

Ce plus petit multiple commun est inférieur ou égal au produit des 2 nombres.

Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».

	5 et 10	4 et 6	5 et 6	6 et 9	8 et 9	10 et 15	3 et 33
Plus petit multiple commun (ppmc)	*10*	*12*	*30*	*18*	*72*	*30*	*33*

Maintenant qu'on sait trouver un multiple commun (le plus petit si possible !), on va pouvoir additionner des fractions n'appartenant pas à la même famille.

2. Comment additionner 2 écritures frac. à dénominateurs différents ?

Exemple	**Méthode : Additionner (soustraire) 2 écritures fract. à dénominateurs différents.**	A vous maintenant !
$\frac{3}{5} + \frac{9}{10}$	Ces 2 fractions n'ont pas le même *dénominateur.* **On ne peut pas les additionner telles quelles !**	$\frac{3}{14} - \frac{12}{7}$
$= \frac{3 \times \mathbf{2}}{5 \times \mathbf{2}} + \frac{9}{10}$	• 10 est le dénominateur commun d'après l'exercice plus haut. **On met donc 3/5 sur 10 en n'oubliant surtout pas de multiplier le numérateur 3 aussi par 2.** 9/10 est déjà sur 10 donc rien à faire ! • **Cette étape peut être sous entendue et faite de tête sans problème.**	$= \frac{3}{14} - \frac{12 \times 2}{7 \times 2}$
$= \frac{6}{10} + \frac{9}{10}$	Maintenant que les fractions sont sur le même dénominateur (même famille), on peut les additionner.	$= \frac{3}{14} - \frac{24}{14}$

$= \dfrac{15}{10}$	**On n'oublie pas de vérifier si cette fraction ne peut pas être simplifiée.**	$= \dfrac{-21}{14}$
$= \dfrac{3}{2}$ F.I.	**Le résultat final est sous forme de fraction irréductible ou d'entier !**	$= \dfrac{-3}{2}$

➢ En utilisant la méthode, calculer les sommes et différences suivantes :

$\dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{6}$	$\dfrac{-1}{4} - \dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{33}$	$\dfrac{1}{8} - \dfrac{-1}{9}$	$\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15}$
$= \dfrac{1\times 6}{5\times 6} - \dfrac{7\times 5}{6\times 5}$	$= \dfrac{-1\times 3}{4\times 3} - \dfrac{1\times 2}{6\times 2}$	$= \dfrac{2\times 11}{3\times 11} + \dfrac{2}{33}$	$= \dfrac{1\times 9}{8\times 9} + \dfrac{1\times 8}{9\times 8}$	$= \dfrac{1\times 3}{10\times 3} + \dfrac{1\times 2}{15\times 2}$
$= \dfrac{6}{30} - \dfrac{35}{30}$	$= \dfrac{-3}{12} - \dfrac{2}{12}$	$= \dfrac{22}{33} + \dfrac{2}{33}$	$= \dfrac{9}{72} + \dfrac{8}{72}$	$= \dfrac{3}{30} + \dfrac{2}{30}$
$= \dfrac{-29}{30}$ *F.I.*	$= \dfrac{-5}{12}$ *F.I.*	$= \dfrac{24}{33}$	$= \dfrac{17}{72}$ *F.I.*	$= \dfrac{5}{30}$
		$= \dfrac{8}{11}$ *F.I.*		$= \dfrac{1}{6}$

➢ Quatre remarques :

Je me répète, la seule petite difficulté est de trouver un dénominateur commun avant d'additionner !

L'exercice précédent nous permet d'énoncer quelques généralités sur ce dénominateur commun :

❶ Le dénominateur commun doit être si possible le plus petit des multiples communs (ppmc), sinon on obtient des fractions à grands nombres qui sont difficiles à simplifier !

❷ Le dénominateur commun est, **au minimum, le plus grand des dénominateurs** des fractions de départ.

❸ Le dénominateur commun est, **au maximum le produit des dénominateurs** des fractions de départ.

❹ **Ne pas confondre « multiple commun » et « facteur commun ».**

3. Exercice : calculs de sommes et de différences de fractions.

Méthode : 1) **Simplifier d'abord chaque fraction** (quand c'est possible).

2) Puis calculer en colonnes. Résultat sous forme de Fraction Irréductible (F.I.) ou d'entier.

$M = \dfrac{20}{25} - \dfrac{9}{30}$	$= \dfrac{8}{10} - \dfrac{3}{10}$	$= \dfrac{1}{2}$ *F.I.*	On simplifie d'abord les signes et écritures !
On simplifie d'abord !	$= \dfrac{5}{10}$		$= -2 + \dfrac{12}{28}$
$= \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{10}$		Ex : $-2 - \dfrac{12}{-28}$	

$$= -2 + \frac{3}{7}$$
$$= \frac{-2}{1} + \frac{3}{7}$$
$$= \frac{-14}{7} + \frac{3}{7}$$
$$= \frac{-11}{7} \text{ F.I ?}$$

$$E = \frac{21k}{63} + \frac{21k}{18}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{k}{3} + \frac{7k}{6}$$
$$= \frac{2k}{6} + \frac{7k}{6}$$
$$= \frac{9k}{6}$$
$$= \frac{3k}{2} \text{ F.I.}$$

$$A = \frac{-5}{3} + \frac{-56}{35}$$

On simplifie d'abord les écritures !

$$= \frac{-5}{3} - \frac{8}{5}$$
$$= \frac{-25}{15} - \frac{24}{15}$$
$$= \frac{-49}{15} \text{ F.I}$$

$$F = 5 - \frac{9}{-12}$$

On simplifie d'abord les écritures !

$$= 5 + \frac{9}{12}$$
$$= 5 + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{5}{1} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{20}{4} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{23}{4} \text{ F.I.}$$

$$V = \frac{27b}{24} + \frac{-70b}{100}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{9b}{8} - \frac{7b}{10}$$
$$= \frac{9b \times 5}{8 \times 5} - \frac{7b \times 4}{10 \times 4}$$
$$= \frac{45b}{40} - \frac{28b}{40}$$
$$= \frac{17b}{40} \text{ F.I.}$$

$$H = \frac{-18}{15} - \frac{-3}{10}$$

On simplifie d'abord les écritures !

$$= \frac{-6}{5} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{-12}{10} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{-9}{10} \text{ F.I.}$$

$$O = \frac{-33}{18} + \frac{24}{-64}$$

On simplifie d'abord les écritures !

$$= \frac{-11}{6} - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{-11 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 3}{8 \times 3}$$
$$= \frac{-44}{24} - \frac{9}{24}$$
$$= \frac{-53}{24} \text{ F.I.}$$

$$E = \frac{8}{12} - \frac{1}{-18}$$

On simplifie d'abord les écritures !

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{18}$$
$$= \frac{12}{18} + \frac{1}{18}$$
$$= \frac{13}{18} \text{ F.I.}$$

$$E = \frac{49}{42} - \frac{50}{40}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{7}{6} - \frac{5}{4}$$
$$= \frac{7 \times 2}{6 \times 2} - \frac{5 \times 3}{4 \times 3}$$
$$= \frac{14}{12} - \frac{15}{12}$$
$$= \frac{-1}{12} \text{ F.I.}$$

$$R = \frac{-27}{-72} + 3$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{27}{72} + 3$$
$$= \frac{3}{8} + 3$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{1}$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{24}{8}$$
$$= \frac{27}{8} \text{ F.I.}$$

$$R = \frac{-\pi}{24} - \frac{-\pi}{32}$$
$$= \frac{-\pi}{8 \times 3} + \frac{\pi}{8 \times 4}$$
$$= \frac{-\pi \times \mathbf{4}}{8 \times 3 \times \mathbf{4}} + \frac{\pi \times \mathbf{3}}{8 \times 4 \times \mathbf{3}}$$
$$= \frac{-4\pi}{96} + \frac{3\pi}{96}$$
$$= \frac{-\pi}{96} \text{ F.I.}$$

Quand il y a plus de 2 écritures fractionnaires, on peut faire les additions soustractions 2 par 2 (après avoir simplifié bien entendu !).

$$\frac{-2\pi}{-11} - \frac{-7\pi}{33} + \frac{5\pi}{55}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{2\pi}{11} + \frac{7\pi}{33} + \frac{\pi}{11}$$

$$= \frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{33}$$

$$= \frac{9\pi}{33} + \frac{7\pi}{33}$$

$$= \frac{16\pi}{33}$$

$$\frac{-4}{7} - \frac{3}{6} + \frac{25}{15}$$

On simplifie d'abord !

$$= \frac{-4}{7} - \frac{1}{2} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-8}{14} - \frac{7}{14} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-15}{14} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{-15 \times 3}{14 \times 3} + \frac{5 \times 14}{3 \times 14}$$

$$= \frac{-45}{42} + \frac{70}{42}$$

$$= \frac{25}{42} \quad \text{F.I.}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{5 \times \pi}{5 \times 12} + \frac{12 \times \pi}{5 \times 12}$$

$$= \frac{5\pi}{60} + \frac{12\pi}{60}$$

$$= \frac{17\pi}{60}$$

- En guise de conclusion, En guise de conclusion, on voit que l'addition et donc la soustraction s'accordent très mal avec les fractions. Et finalement on le comprend assez bien : lorsque les dénominateurs ne sont pas égaux, les fractions ne sont pas du même genre (des quarts ne sont pas de la même famille que des demis par exemple) et on ne peut additionner ou soustraire que des choses du même genre !
- On verra plus tard que ce « problème » de l'addition ou de la soustraction réapparaîtra avec les puissances (contrat 4) et les racines carrées en classe de $3^{\text{ème}}$.
- Après l'addition et la soustraction, passons à la *multiplication.*

IV. MULTIPLICATION D'ECRITURES FRACTIONNAIRES (5EME).

A. Formule :

Contrairement à l'addition et la soustraction, **la règle est très simple car intuitive** pour la multiplication. ☺

Règle :	$\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \dfrac{\mathbf{a \times c}}{\mathbf{b \times d}}$ (avec b ≠ ….. et d ≠ ……)

$\dfrac{-15}{63} \times \dfrac{35}{-12}$	**Méthode pour la multiplication de fractions**	$\dfrac{-12}{-35} \times \dfrac{63}{-27}$
$= + \dfrac{15 \times 35}{63 \times 12}$	• **On s'est d'abord occupé du signe final** (« + » ici car il y a un nombre pair (2) de facteurs négatifs). • Puis on a appliqué la règle intuitive ci-dessus pour la multiplication des fractions. **On ne s'amuse surtout pas à faire ces multiplications !** Cette étape est facultative et on passera directement aux décompositions en produits de facteurs.	$= - \dfrac{12 \times 63}{35 \times 27}$
$= \dfrac{\mathbf{3} \times 5 \times \mathbf{7} \times 5}{9 \times \mathbf{7} \times 4 \times \mathbf{3}}$	On décompose en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier.	$= - \dfrac{\mathbf{3} \times 4 \times \mathbf{9} \times \mathbf{7}}{\mathbf{7} \times 5 \times \mathbf{9} \times \mathbf{3}}$
$= \dfrac{5 \times 5}{9 \times 4}$	On a simplifié tous les facteurs communs (ici 3 × 7). (ligne facultative)	$= -\dfrac{4}{5}$
$= \dfrac{25}{36}$ F.I.	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier relatif.	

A retenir : On s'occupe du signe final d'abord.

On ne met **JAMAIS AU MEME DENOMINATEUR POUR LA MULTIPLICATION.**

- Exercices : Calculer en colonnes et mettre le résultat sous forme irréductible ou sous forme d'entier :

① $\dfrac{11}{25} \times \dfrac{-55}{121} = - \dfrac{1 \times \mathbf{11} \times \mathbf{5} \times \mathbf{11}}{5 \times \mathbf{5} \times \mathbf{11} \times \mathbf{11}} = - \dfrac{1}{5}$ *F.I.*

$\dfrac{-3}{16} \times \dfrac{24}{-12} = + \dfrac{\mathbf{3} \times 1 \times \mathbf{8} \times 3}{\mathbf{8} \times 2 \times \mathbf{3} \times 4} = \dfrac{3}{8}$ *F.I.*

$\dfrac{17}{-19} \times \dfrac{-19}{17} = + \dfrac{1 \times \mathbf{17} \times \mathbf{19}}{1 \times \mathbf{19} \times \mathbf{17}} = 1\ !$

$\dfrac{-24}{-56} \times \dfrac{64}{-60} \times \dfrac{-7}{-8} = - \dfrac{\mathbf{6} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{8} \times 2 \times \mathbf{4} \times \mathbf{7}}{\mathbf{7} \times \mathbf{8} \times \mathbf{6} \times \mathbf{2} \times 5 \times \mathbf{4} \times \mathbf{2}} = -\dfrac{2}{5}$ *F.I.*

② Ex : $25 \times \dfrac{3}{55} = \dfrac{25}{1} \times \dfrac{3}{55} = \dfrac{5 \times \mathbf{5} \times 3}{1 \times 11 \times \mathbf{5}} = \dfrac{15}{11}$ $\dfrac{17}{36} \times (-12) = - \dfrac{17}{36} \times \dfrac{12}{1} = - \dfrac{17 \times \mathbf{12}}{3 \times \mathbf{12}} = \dfrac{-17}{3}$

$37 \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{37}{1} \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{37}{37} = 1\ !$ $\dfrac{1}{-13} \times (-13) = \dfrac{1}{13} \times \dfrac{13}{1} = 1\ !$

③ <u>Méthode</u> :

$$\frac{0{,}25}{-4{,}9} \times \frac{-7}{-5} = -\underbrace{\frac{0{,}25 \times 100}{4{,}9 \times 100}}_{\text{on se débarrasse des nb décimaux}} \times \frac{7}{5} = -\frac{25}{490} \times \frac{7}{5} = -\frac{5 \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}}{\mathbf{7} \times 70 \times \mathbf{5}} = -\frac{5}{70} = -\frac{1 \times \mathbf{5}}{14 \times \mathbf{5}} = -\frac{1}{14} = \frac{-1}{14}$$

$$\frac{2{,}1}{3} \times \frac{9}{-7} = -\frac{21}{30} \times \frac{9}{7} = -\frac{7 \times \mathbf{3} \times 3 \times 3}{10 \times \mathbf{3} \times 7} = -\frac{9}{10} = \frac{-9}{10}$$

$$\frac{50}{11} \times 1{,}1 = \frac{50}{11} \times \frac{11}{10} = \frac{50}{10} = 5\ !$$

B. Fraction d'une quantité :

Prendre une fraction d'une certaine quantité revient à *multiplier* cette quantité par la fraction.

<u>Conséquence</u> : Dans les problèmes, les mots « de », « du » ou « des » se traduisent par le signe ×.

Les 2 neuvièmes de (-15)	<u>Méthode</u> : **Calculer la fraction d'une certaine quantité.**	Les 4 tiers de 9/4
$= \frac{2}{9} \times (-15)$	On a traduit ici le mot « de » par une multiplication.	$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{4}$
$= \frac{2}{9} \times \frac{-15}{1}$	On a écrit sous forme de fractions les nombres entiers ou décimaux s'il y en a.	
$= \frac{2 \times (-15)}{9 \times 1}$	On a appliqué la formule intuitive pour la multiplication des fractions. *Etape facultative.*	$= \frac{4 \times 9}{3 \times 4}$
$= \frac{2 \times (-5) \times \mathbf{3}}{3 \times \mathbf{3} \times 1}$	On a décomposé en produits de facteurs (grâce aux tables de multiplication parfaitement maîtrisées !), en vue de simplifier tous les facteurs communs (à gauche la paire de 3 ; à droite la paire 4 × 3).	$= \frac{\mathbf{4} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times \mathbf{4}}$
$= \frac{-10}{3}$ F.I	On obtient soit une fraction irréductible, soit un entier relatif.	= 3 !

➢ <u>Exercices :</u> Calculer en colonnes (résultat : F.I. ou entier !)

Cinq quarts de -16	Sept tiers de 9/14	25 % de (-40)	20 % de 30 %	56 % de 25/8.
$= \frac{5}{4} \times (-16)$	$= \frac{7}{3} \times \frac{9}{14}$	$= \frac{25}{100} \times (-40)$	$= \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}}$	$= \frac{56}{100} \times \frac{25}{8}$
$= -\frac{5 \times 16}{4}$	$= \frac{\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times 2 \times \mathbf{7}}$	$= -\frac{25 \times \cancel{4}0}{1\cancel{0}0}$	$= \frac{6}{100}$ (= 6 %)	$= \frac{\mathbf{8} \times 7 \times \mathbf{25}}{\mathbf{25} \times 4 \times \mathbf{8}}$
$= -\frac{5 \times \mathbf{4} \times 4}{\mathbf{4}}$	$= \frac{3}{2}$ F.I.	$= -\frac{100}{10}$	$= \frac{3}{50}$ F.I.	$= \frac{7}{4}$ F.I.
$= -20$		$= -10$		

V. NOMBRES INVERSES ; DIVISION DE 2 ECRITURES FRAC.

Avez vous remarqué que dans les exos ① et ② ci dessus, certains produits valent 1 ? *Bien sûr !*

On a donné un joli nom à **deux nombres non nuls dont le produit vaut 1**.

A. Nombres inverses :

• Définition : Deux nombres non nuls sont dits **inverses l'un de l'autre** quand leur **produit est égal à** *1*.

• Exemples ① : Puisque $2 \times \frac{1}{2} = 1$, alors l'inverse de 2 est $\frac{1}{\ldots\ldots}$.

L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$. L'inverse de 21 est $\frac{1}{21}$. L'inverse de t est $\frac{1}{t}$ (avec $t \neq 0$).

• Exemples ② : Puisque $\frac{7}{9} \times \frac{9}{7} = 1$, alors l'inverse de $\frac{7}{9}$ est $\frac{9}{7}$.

L'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{3}{5}$. L'inverse de $\frac{1}{8}$ est $\frac{8}{1}$ *c-à-d 8 !* L'inverse de $\frac{j}{4}$ est $\frac{4}{j}$ (avec $j \neq 0$).

• Notation : **L'inverse $\frac{1}{k}$ (d'un nombre non nul k)** peut être noté $\mathbf{k^{-1}}$. Ex : $\frac{1}{9}$ peut se noter $\mathbf{9^{-1}}$.

➢ 2 Remarques :

① **Ne pas confondre l'opposé et l'inverse !** Exemples :

② L'opposé de $\frac{-1}{7}$ est $-\left(\frac{-1}{7}\right)$ c-à-d $\frac{1}{7}$ alors que l'inverse de $\frac{-1}{7}$ est $\frac{7}{-1}$ c-à-d -7.

Le mot inverse veut bien dire ce qu'il veut dire : on inverse le nombre, on le « retourne » !

➢ Exercice :

Nombre	*0*	*1*	*-5*	*1,7*	$-\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{-3}$	$\frac{a}{3}$
Opposé	*0*	*-1*	*5*	*-1,7*	π	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{a}{3}$
Inverse	***n'existe pas !***	*1*	$\frac{1}{-5}$	$\frac{1}{1,7}$	$\frac{1}{-\pi}$	*2*	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{a}$ *si* $a \neq 0$

A. Division par un nombre non nul :

De même que la notion d'opposé reliait la soustraction à l'addition (soustraire un nombre revient à additionner son opposé), la notion d'inverse va permettre de relier la division à la *multiplication*.

❶ Règle : **Diviser par un nombre** (non *nul*) revient à **multiplier par son inverse.**

❷ Deux formules : $\mathbf{a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$ et $\mathbf{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$ (b et c et d $\neq 0$)

➢ 4 exemples : $\frac{9}{5} \div \frac{18}{15} = \frac{9}{5} \times \frac{15}{18} = \frac{\mathbf{9} \times \mathbf{5} \times 3}{\mathbf{5} \times \mathbf{9} \times 2} = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \times \frac{25}{9} = \frac{\mathbf{3} \times \mathbf{5} \times 5}{\mathbf{5} \times \mathbf{3} \times 3} = \frac{5}{3}$

$\frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$ $\qquad \frac{\frac{2}{1}}{3} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Remarque : On ne trouve pas le même résultat pour les 2 derniers calculs ! Evidemment ! Le trait de la barre principale de fraction n'est pas placé au même endroit ! Ces 2 derniers exemples nous disent donc de ***faire très attention à la place de la barre principale de fraction*** *: elle doit être rigoureusement* ***en face du signe = !***

➢ Applications : Calculer en colonnes (résultat : F.I. ou entier !).

$M = \frac{5}{\frac{1}{5}}$

$= 5 \times \frac{5}{1}$

$= 25$!

$A = \frac{-8}{\frac{4}{3}}$

$= -8 \times \frac{3}{4}$

$= -\frac{8}{4} \times 3$

$= -2 \times 3$

$= -6$

$H = \frac{-6}{51} \div \frac{18}{-17}$

$= \frac{-6}{51} \times \frac{-17}{18}$

$= \frac{-1 \times \mathbf{6} \times (-1) \times \mathbf{17}}{3 \times \mathbf{17} \times \mathbf{6} \times 3}$

$= \frac{1}{9}$ F.I.

$E = \frac{\frac{48}{15}}{\frac{64}{20}}$

$= \frac{48}{15} \times \frac{20}{64}$

$= \frac{6 \times \mathbf{8} \times \mathbf{5} \times 4}{3 \times \mathbf{5} \times 8 \times \mathbf{8}}$

$= \frac{24}{24}$

$= 1$!

VI. WHAT'S THE PROBLEM ?

① A la loterie « Entub » vous avez 48 chances sur 180 de gagner. A la loterie « Arnaq », vous avez 15 chances de gagner sur 75. A quelle loterie jouez vous ? Justifiez évidemment !

On applique la méthode FRCP pour mettre sous forme irréductible les fractions, puis on comparera :

• *Proportion de chances de gagner à la loterie « Entub »* $= \frac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}} = \frac{48}{180} = \frac{\mathbf{6} \times 8}{\mathbf{6} \times 30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

• *Proportion de chances de gagner à la loterie « Arnaq »* $= \frac{\text{nb de chances}}{\text{nb total}} = \frac{15}{75} = \frac{3 \times \mathbf{5}}{\mathbf{5} \times 15} = \frac{3}{15}$

• On voit qu'il y a plus de chance à jouer à la loterie « Entub », mais bon je ne vous conseille pas de jouer, à moins que vous ayez de l'argent à perdre !

② Dans une famille un peu compliquée, on partage un gâteau :

Le grand père donne $\frac{3}{13}$ du gâteau à la belle fille qui en a déjà pris $\frac{2}{13}$. Celle ci donne $\frac{3}{13}$ du gâteau à sa fille qui n'aime pas trop et remet $\frac{2}{13}$ dans la boîte. La grand mère en profite et prend $\frac{5}{13}$ mais elle a les yeux plus gros que le ventre la grand mère (!) et elle laisse $\frac{3}{13}$ pour le lendemain. C'était compter sans le chien, qui se sert royalement $\frac{2}{13}$. Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour les souris qui se lèchent déjà les babines ?

Méthode FRCP !

Fraction finale de gâteau = fraction totale – fraction donnée par le gd père – fraction belle fille – fraction donnée à sa fille + fraction remise – fraction gd mère + fraction laissée par gd mère – fraction du chien. (ouf)

$$= \frac{13}{13} - \frac{3}{13} - \frac{2}{13} - \frac{3}{13} + \frac{2}{13} - \frac{5}{13} + \frac{3}{13} - \frac{2}{13} = \frac{3}{13}$$

Il ne reste que $\frac{3}{13}$ du gâteau pour les pauvres souris toutes mimi qui vont se faire manger par ouf le chien.

Remarque : la fraction totale était $\frac{13}{13}$ car $\frac{13}{13} = 1$ qui représente toujours le total en fraction ($1 = 100\% = \frac{13}{13}$)

③ Un prof a ramassé 60 copies. Il perd les $\frac{4}{5}$ le soir même dans le métro !

Combien d'élèves auront leurs copies le lendemain ? (attention à la qualité de la rédaction)

- *On applique la méthode FRCP :*

Nombre de copies perdues = $\frac{4}{5}$ du nombre total de copies

$$= \frac{4}{5} \times 60$$

$$= 4 \times \frac{60}{5}$$

$$= 4 \times 12 = 48$$

D'où Nombre de copies rendues = nb total de copies – nb de copies perdues

$$= 60 - 48$$

$$= 12.$$

12 élèves auront leur copie le lendemain.

Remarque : On pouvait trouver plus vite la solution en utilisant le fait que $\frac{1}{5}$ (= $\frac{5}{5} - \frac{4}{5}$) est la proportion de copies restantes puis on applique la méthode FRCP pour calculer directement le nombre de copies non perdues.

④ Ecouter attentivement en classe diminue le temps de travail à la maison de 40% ! Sans écouter, un chapitre demande 15 heures de travail à la maison. Combien de temps travaillerez vous en écoutant ? *FRCP*

On applique la méthode FRCP :

On va d'abord calculer combien de temps de travail on gagne en écoutant :

Réduction de la durée de travail en écoutant (en heures) = 40% de la durée normale de travail

$$= \frac{4\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 15$$

$$= \frac{\mathbf{2} \times 2 \times 3 \times \mathbf{5}}{\mathbf{5} \times \mathbf{2}}$$

$$= 6\ h$$

Quand on écoute en classe, on travaille 6 heures de moins sur 15h de travail normal.

Durée de travail en écoutant = Durée totale de travail – réduction de durée en écoutant.

$$= 15 - 6$$

$$= 9h.$$

Lorsqu'on écoute en classe, un chapitre qui demandait 15h de travail, ne demande plus que 6h de travail.

Morale de l'histoire : il vaut mieux écouter en classe, on bosse moins à la maison !

Autre méthode : *Puisque écouter en classe réduit de 40% la quantité de travail, alors il ne restera plus que 60 % (=100 – 40) du travail à effectuer.*

Puis on applique la formule : Durée de travail en écoutant = 60 % de la Durée totale de travail.

$$= \frac{60}{100} \times 15$$

⑤ La facture de novembre de téléphone de Mélusine (66 €) se décompose de la manière suivante :

$\frac{1}{6}$ en appels locaux ; $\frac{1}{12}$ en appels de voisinage ; et $\frac{1}{4}$ en appels vers les mobiles. La fraction restante étant constituée des appels internationaux pour son chéri qui étudie les maths à Guadalcanal.

1. Quelle est la fraction dévolue aux communications vers l'international ?
2. Ne dépense-t-elle pas un peu trop pour son amoureux ? Justifiez !

Méthode FRCP !

1. Fraction pour l'international = frac. totale – frac. appels locaux – frac. voisinage – frac. mobile

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12}{12} - \frac{2}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3}{12}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

La moitié de la facture de Mélusine est engloutie dans les appels vers Guadalcanal !

2. Prix payé vers l'international $= \frac{1}{2}$ *du montant total de la facture*

$$= \frac{1}{2} \times 66$$

$$= \frac{66}{2} = 33$$

Mélusine dépense 33 € pour dire à son chéri qu'elle l'aime. C'est beau l'Amour…

⑥ On se partage encore un gâteau ! Un quart pour moi, un tiers pour lui, un cinquième pour elle. Quelle fraction du gâteau reste-t-il pour les autres ?

Devinez quoi : Méthode FRCP !

Fraction restante de gâteau = fraction totale – fraction pour moi – fraction pour lui – fraction pour elle

$$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{60}{60} - \frac{15}{60} - \frac{20}{60} - \frac{12}{60}$$

$$= \frac{13}{60}$$

Les autres se partageront $\frac{13}{60}$ *du gâteau soit moins que pour moi ou lui. Les absents ont toujours tord !*

⑦ Dans un cours de maths, parmi les 39 élèves, un tiers n'écoutent pas ! Parmi ces élèves qui n'écoutent pas, $\frac{9}{13}$ émes détestent les fractions ! Combien d'élèves dans cette classe détestent les fractions ?

Ont-ils raison ? *Bien sûr que non !*

Guess what ? Méthod FRCP of course !

- *Fraction d'élèves détestant les fractions* $= \frac{9}{13}$ *de la fraction d'élèves qui n'écoutent pas.*

$$= \frac{9}{13} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3 \times \mathbf{3}}{13 \times \mathbf{3}} = \frac{3}{13}$$

3 élèves sur 13 détestent les fractions.

- *Nombre d'élèves détestant les fractions* $= \frac{3}{13} \times$ *nb total d'élèves.*

$$= \frac{3}{13} \times 39$$

$$= \frac{3 \times \mathbf{13} \times 3}{1 \times \mathbf{13}} = 9$$

Il y a 9 pauvres élèves qui n'ont pas la chance d'aimer les fractions !

VII. EXERCICES RECAPITULATIFS SUR LES FRACTIONS.

Calculer en colonnes :

① $A = (\frac{2}{3} + 3) \div \frac{1}{9} = (\frac{2}{3} + \frac{9}{3}) \times \frac{9}{1}$ *j'ai mis la parenthèse au même dénominateur et transformer la ÷ en ×.*

$= \frac{11}{3} \times \frac{9}{1}$

$= \frac{11 \times 3 \times \mathbf{3}}{\mathbf{3} \times 1}$

$= 33$

$B = (\frac{5}{6} - \frac{5}{4}) \div \frac{5}{8} = (\frac{10}{12} - \frac{15}{12}) \times \frac{8}{5}$ *j'ai mis la parenthèse au même dénominateur et remplacer la ÷ en ×.*

$= \frac{-5}{12} \times \frac{8}{5}$

$= \frac{-1 \times \mathbf{5} \times 2 \times \mathbf{4}}{\mathbf{4} \times 3 \times \mathbf{5}}$

$= \frac{-2}{3}$

$C = \frac{11}{10} - \frac{3}{25} \times \frac{5}{9} = \frac{11}{10} - \frac{1 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}}{5 \times \mathbf{5} \times 3 \times \mathbf{3}}$ *priorité : attention ! On fait d'abord la × avant la – !*

$= \frac{11}{10} - \frac{1}{15}$

$= \frac{33}{30} - \frac{2}{30}$ *un nombre dans la table de 10 et 15 est 30 (= 10 × 3 = 15 × 2)*

$= \frac{31}{30}$

② Calculer $\frac{1}{a} \div (-b) + \frac{1}{c}$ avec $a = 6$ $b = -\frac{5}{12}$ et $c = \frac{10}{6}$ R = 1

Méthode :

① On vérifie d'abord que les valeurs des lettres sont simplifiées.

② On écrit l'expression de départ puis on remplace les lettres par leurs valeurs.

③ On simplifie les écritures si possible et remplace le signe ÷ par une barre de fraction.

④ On fait les calculs en colonnes en faisant très attention aux priorités, signes et règles de calcul.

Ici $c = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ *F.I.*

$\frac{1}{a} \div (-b) + \frac{1}{c}$

$= \frac{1}{6} \div \frac{5}{12} + \frac{1}{\frac{5}{3}}$ *On a remplacé.*

$= \frac{1}{6} \times \frac{12}{5} + 1 \times \frac{3}{5}$ *On a transformé* $\frac{1}{6} \div \frac{5}{12}$ *et* $\frac{1}{\frac{5}{3}}$

$= \frac{1 \times \mathbf{6} \times 2}{\mathbf{6} \times 5} + \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

$= \dfrac{5}{5} = 1\ !$

$(\dfrac{3}{9})^2 \div \dfrac{33}{27} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \div \dfrac{11}{9}$ *on a simplifié* $\dfrac{3}{9}$ *et* $\dfrac{33}{27}$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \div \dfrac{11}{9}$ *on transforme* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$= \dfrac{1}{9} \div \dfrac{11}{9}$

$= \dfrac{1}{9} \times \dfrac{9}{11}$ *on a transformé la division.*

$= \dfrac{1}{11}$ *F.I.*

③ $\dfrac{\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}}$ R = $\dfrac{5}{11}$

$= \dfrac{\dfrac{8}{12} - \dfrac{3}{12}}{\dfrac{8}{12} + \dfrac{3}{12}}$

$= \dfrac{\dfrac{5}{12}}{\dfrac{11}{12}}$

$= \dfrac{5}{12} \times \dfrac{12}{11}$

$= \dfrac{5}{11}$ *F.I.*

$\dfrac{\dfrac{-1}{3} + \dfrac{22}{33}}{\dfrac{-14}{21}}$ R = $\dfrac{-1}{2}$

$= \dfrac{\dfrac{-1}{3} + \dfrac{2}{3}}{\dfrac{-2}{3}}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{-2}{3}}$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{-2}$

$= \dfrac{-1}{2}$ *F.I.*

$5 - \dfrac{\dfrac{-24}{8}}{9}$ R = $\dfrac{16}{3}$

$= 5 - \dfrac{-3}{9}$

On a simplifié $\dfrac{-24}{8}$ *!*

$= 5 - \dfrac{-1}{3}$

$= 5 + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{15}{3} + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{16}{3}$ *F.I.*

$\dfrac{3}{18} - \dfrac{35}{18} \times \dfrac{-36}{56}$

$= \dfrac{1}{6} + \dfrac{35 \times 36}{18 \times 56}$

$= \dfrac{1}{6} + \dfrac{\mathbf{7} \times 5 \times \mathbf{18} \times \mathbf{2}}{\mathbf{18} \times \mathbf{2} \times 4 \times \mathbf{7}}$

$= \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{4}$

$= \dfrac{2}{12} + \dfrac{15}{12}$

$= \dfrac{17}{12}$ *F.I.*

④ Développer les produits suivants :

On développe en calculant directement les signes et les mini-produits (si possible).

$M = -8\ (\ -5 + 2t - \dfrac{5j}{24}\ )$

$= 40 - 16t + 8 \times \dfrac{5j}{24}$

$= 40 - 16t + \dfrac{\mathbf{8} \times 5j}{\mathbf{8} \times 3}$

$= 40 - 16t + \dfrac{5j}{3}$

$O = \dfrac{-25}{35}\ (\ \dfrac{14}{15} - 49z\ )$

$= \dfrac{-5}{7}\ (\ \dfrac{14}{15} - 49z\ )$

$= \dfrac{5}{7} \times \dfrac{14}{15} + \dfrac{5}{7} \times 49z$

$= \dfrac{\mathbf{5} \times \mathbf{7} \times 2}{\mathbf{7} \times \mathbf{5} \times 3} + \dfrac{5 \times \mathbf{7} \times 7z}{\mathbf{7}}$

$= \dfrac{2}{3} + 35z$

$U = \frac{2}{-3}\left(\frac{-9}{8} - \frac{-k}{4}\right)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{k}{4}$

$= \frac{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{3} \times 4 \times \mathbf{2}} - \frac{\mathbf{2} \times k}{3 \times 2 \times \mathbf{2}}$

$= \frac{3}{4} - \frac{k}{6}$

⑤ Le triangle ABC a pour longueurs AB = 2/3 AC = 5/6 BC = 1/2. Ce triangle est-il rectangle ?

Il faut d'abord trouver la plus grande longueur ! AB = $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ *AC =* $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ *et BC =* $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$.

Donc AC est la plus grande longueur.

D'une part, on a : $AC^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

D'autre part, on a $BA^2 + BC^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36}$

Puisque $AC^2 = BA^2 + BC^2$*, alors, d'aps la conséquence du Théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.*

⑥ Les égalités suivantes sont-elles vérifiées pour les valeurs de a et b données ci dessous ?

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ pour $a = \frac{15}{20}$ et $b = \frac{-10}{12}$

<u>On simplifie d'abord a et b !!!</u> $a = \frac{3}{4}$ *et* $b = \frac{-5}{6}$.

D'une part, on a : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3} + \frac{-6}{5}$

$= \frac{20}{15} - \frac{18}{15}$

$= \frac{2}{15}$

D'autre part, on a : $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{-5}{6}}$

$= \frac{1}{\frac{9}{12} - \frac{10}{12}}$

$= \frac{1}{\frac{-1}{12}}$

$= -12$

Puisque $\frac{2}{15} \neq -12$*, alors le couple de valeurs* $a = \frac{15}{20}$ *et* $b = \frac{-10}{12}$ *ne vérifient pas l'égalité de départ.*

<u>Remarque :</u> On retrouve le fait qu'on ne peut pas additionner $\frac{1}{a}$ *et* $\frac{1}{b}$ *directement sans les avoir mises au même dénominateur au préalable !*

Cette faute est souvent faite par les élèves.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2$ pour $a = \frac{-1}{3}$ et $b = -3$

D'une part, on a : $a^2 + b^2 = (\frac{-1}{3})^2 + (-3)^2$

$= \frac{1}{9} + 9$

$= \frac{1}{9} + \frac{81}{9}$

$= \frac{82}{9}$ *F.I.*

D'autre part, on a : $(a + b)^2 = (\frac{-1}{3} + (-3))^2$

$= (\frac{-1}{3} - \frac{9}{3})^2$

$= (\frac{-10}{3})^2$

$= \frac{100}{9}$

Puisque $\frac{82}{9} \neq \frac{100}{9}$*, alors le couple de valeurs* $a = \frac{-1}{3}$ *et* $b = -3$ *ne vérifient pas l'égalité de départ.*

Remarque : On voit donc que la somme des carrés $a^2 + b^2$ n'est pas égale au carré de la somme $(a + b)^2$. Ce que l'on reverra lors du prochain chapitre sur les puissances, contrat 4.

Cette faute est souvent faite par les élèves.

⑥ 2 hyènes sont attablées, serviettes autour du cou, autour d'un bon gigot de buffle de 120 kg que la mère a préparé. « Avant de nous goinfrer, procédons au partage : un tiers pour Robert, $\frac{3}{4}$ de ce qui reste pour Kiki, et le reste pour moi. » dit Manu qui descendait.

« C'est bien beau mais ça me fait quelle part ! » dit Kiki. « Et moi ? » soupira Robert. « Je n'en sais rien, dit Manu, c'est le prof dans la savane qui m'a suggéré de, dorénavant, partager le gigot en fractions ! »

Aider ces 3 pauvres hyènes à calculer la part de chacun !

Est il encore besoin de le préciser ? Méthode FRCP !

- *Part de Robert* $= \frac{1}{3}$ *du poids total.*

$= \frac{1}{3} \times 120$

$= \frac{120}{3} = 40$ *kg*

Robert va se délecter de 40 kg de gigot de buffle.

- *Part de Kiki* $= \frac{3}{4}$ *du poids restant.*

$$= \frac{3}{4} \times (120 - 40)$$

$$= \frac{3}{4} \times 80$$

$$= \frac{3 \times 4 \times 20}{4 \times 1}$$

$$= 60 \text{ kg}$$

Kiki va s'envoyer 60 kg de gigot de buffle dans le gosier.

- *Ma part = poids restant après que Robert et Kiki se soient servis.*

$= total - part de Robert - part de Kiki$

$= 120 - 40 - 60$

$= 20 \text{ kg}$

Il ne me reste plus qu'à m'empiffrer avec les 20 kg restants.