Corrigé Contrôle C8 COSINUS ; BISSECTRICES (1h05)

Compte rendu :

- *Activités numériques :* *Assez bien réussi ! Pensez à relire.*
  Soyez précis dans les intitulés du tableau.
- *Cosinus :*
  - *Il faut écrire* ***l'hypothèse essentielle du triangle rectangle.***
  - *Beaucoup trop inversent côté adjacent et hypoténuse dans la relation du cosinus ! La calculette indique alors Math Error !*
  - *Quelques fautes dans la méthode cos ❷ (équation de type cos (30°) = $\frac{5}{x}$).*
  - *Signification du cosinus à revoir : le cosinus dit combien de % le côté adjacent mesure par rapport à l'hypoténuse*
- *Bissectrices :*
  - ***Un point n'est pas une droite, attention aux notations !***
  - *Construction du centre du cercle inscrit à revoir. Laissez les arcs de construction.*
  - *Construction du cercle inscrit : il faut projeter le centre du cercle inscrit sur l'un des côtés pour avoir son rayon.*
  - *Revoyez l'exercice fondamental sur les bissectrices dans le cours : deux bissectrices sont données plus ou moins directement, puis on exploite la $3^{ème}$.*
- *Pythagore :* *A réviser absolument ;* ***Ne pas oublier l'hypothèse essentielle du triangle rectangle****.*
- *TRCC :* *A réviser absolument.*

Plus généralement : *Ce ne sont pas les cosinus qui posent des problèmes mais les autres parties du programme (quadrilatères, TRCC, Pythagore, justifier qu'un triangle est rectangle etc.)*

Marquez les étapes de vos raisonnements ; numérotez vos réponses ; faites des phrases réponses.

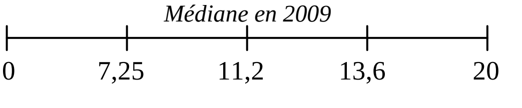
Pas d'abréviations !

Manque général de rigueur dans l'application des propriétés*. Propriétés inventées, incomplètes, imprécises.*

Manque général de précision : *valeur exacte (v.e) ? valeur approchée (v.a), à quelle précision demandée ?*

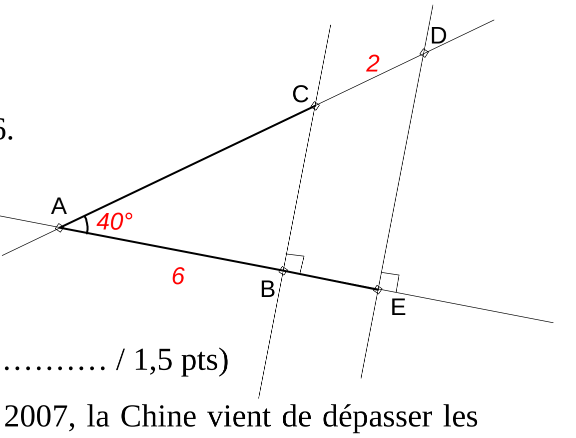
Faites l'effort de lire les énoncés.

Médiane = 12,4 sur 20 en 2008.



- Exercice n° 1 (……….……..… / 4,5 points) : Au choix.

• *Choix 1 : Géométrie.*



Sur la figure codée ci-contre, on sait que $\widehat{BAC}$ = 40°, CD = 2 et AB = 6.

Calculer au dixième près les longueurs suivantes :

1) AC (1,5 pts) 2) AD (1 pt) 3) DE (2 pts)

• *Choix 2 : Activités numériques.*

1) Résoudre l'équation : $5 - 2\,(3t - 4) - 2t = -2t - (-5 + t)$ (…………… / 1,5 pts)

2) Alors qu'elle ne comptait que 162 millions d'internautes en juillet 2007, la Chine vient de dépasser les USA fin avril 2008 avec 221 millions d'internautes (contre environ 215 millions pour les Etats Unis et 34 millions pour la France).

Quel est le pourcentage d'augmentation (arrondi au $1/10^{ème}$) du nombre d'internautes en Chine entre juillet 2007 et avril 2008 ? (………………..…. / 3 pts)

• Choix n°1 : Géométrie choisie par 10 élèves sur 24 soit à peu près 42% des élèves.

Avant tout, reporter les mesures et/ou le codage sur la figure !

1. Puisque ABC rectangle en B, alors :

$\text{Cos}\,(\widehat{CAB}) = \dfrac{AB}{AC}$

$\text{Cos}\,(40°) = \dfrac{6}{AC}$

Donc $AC = \dfrac{6}{\cos(40°)}$ valeur exacte

$\approx 7{,}8$ unités de longueur (u.l)

2. Puisque $C \in [AD]$, alors $AD = AC + CD$

$\approx 7{,}8 + 2$

$\approx 9{,}8$ u.l

3. On trouve facilement, par la somme des angles dans un triangle que $\widehat{ADE} = 50°$ (à faire).

Puisque ABC rectangle en C,

alors $\text{Cos}\,(\widehat{ADE}) = \dfrac{DE}{DA}$

$\text{Cos}\,(50°) \approx \dfrac{DE}{9{,}8}$

Donc $DE \approx 9{,}8 \times \cos(50°)$

$DE \approx 6{,}3$ u.l valeur approchée au dixième.

La longueur DE est d'à peu près 6,3 unités de longueur.

Autres méthodes :

- On peut d'abord trouver CB par Pythagore puis on calcule DE par Thalès. Mais c'est bien plus long !
- On peut d'abord trouver AE par cos $(\widehat{DAE})$ puis on calcule DE par Pythagore dans ADE. Mais c'est bien plus long !

• Choix 2 : Activités numériques choisies par 14 élèves sur 24 soit à peu près 58% des élèves.

1.

$5 - 2\,(3t - 4) - 2t = -2t - (-5 + t)$

$5 - 6t + 8 - 2t = -2t + 5 - t$ On a développé.

$-8t + 13 = -3t + 5$ On a réduit.

$13 - 5 = 8t - 3t$ On a rassemblé.

$8 = 5t$ On a reréduit.

$\dfrac{8}{5} = t$ On a donné la solution.

2. Etape ❶ Tableau (précis au niveau des intitulés + unités) :

$\times\dfrac{162}{221}$	Nb d'internautes chinois en juillet 2007 (en millions).	162	100
	Nb d'internautes chinois fin avril 2008 (en millions).	221	N

$\times\dfrac{221}{162}$

Etape ❷ Coefficient + Formule :

• Coeff $= \dfrac{221}{162}$ F.I ?

• Formule : Nb d'internautes chinois en juillet 2007 (en millions) $= \dfrac{221}{162} \times$ Nb d'internautes chinois fin avril 2008 (en millions)

Etape ❸ Calcul de la $4^{ème}$ proportionnelle + Phrase Réponse :

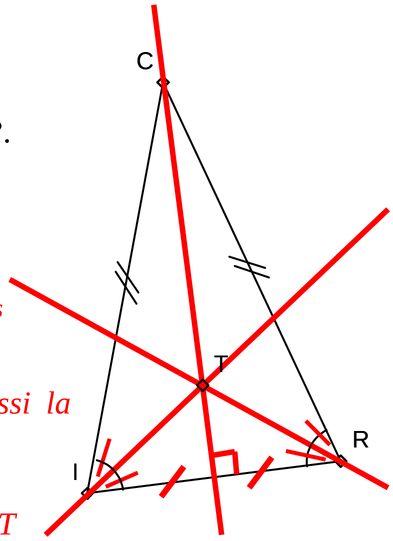
$$\frac{N}{100} = \frac{221}{162}$$

$$N = \frac{221}{162} \times 100 \approx 136{,}4$$

Le nombre d'internautes chinois a augmenté d'à peu près 36,4 % (= 163,4 – 100) entre juillet 2007 et fin avril 2008.

Beaucoup de fautes ici dans la phrase réponse.

➢ Exercice n° 2 (……………..……… / 0,5 + 1 + 1 + 1 points) :



Sur la figure non à l'échelle ci-contre, le triangle CRI est isocèle en C et $\widehat{CRI} = 70°$.

La médiatrice issue de C et la bissectrice de $\widehat{CRI}$ se coupent en T.

Montrer que $\widehat{TIR} = 35°$.

Cette exercice fondamental sur les bissectrices exploite la situation suivante : deux droites remarquables sont données plus ou moins directement, puis on exploite la $3^{ème}$.

- *Puisque CRI isocèle en C, alors la médiatrice issue du sommet C est aussi la bissectrice de $\widehat{ICR}$.*
- *Puisque les deux bissectrices des angles $\widehat{ICR}$ et $\widehat{CRI}$ se coupent en T, alors T est le centre du cercle inscrit au triangle CRI.*
- *Puisque la droite (IT) passe* $\left\{\begin{array}{l}\text{par le troisième sommet I}\\ \text{et par le centre T du cercle inscrit}\end{array}\right\}$, *alors (IT) est la $3^{ème}$ bissectrice du triangle CRI.*
- *Puisque CRI est isocèle en C, alors les angles à la base $\widehat{CIR}$ et $\widehat{CRI}$ sont de même mesure.*

  Donc $\widehat{CIR} = \widehat{CRI} = 70°$.

  Puisque (IT) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CIR}$, alors $\widehat{TIR} = \widehat{CIT} = \dfrac{\widehat{CIR}}{2} = \dfrac{70°}{2} = 35°$.

<u>Remarque :</u> On pouvait trouver ce résultat par des calculs d'angles dans le triangle TIR.

ou bien en montrant que TIR est isocèle en T.

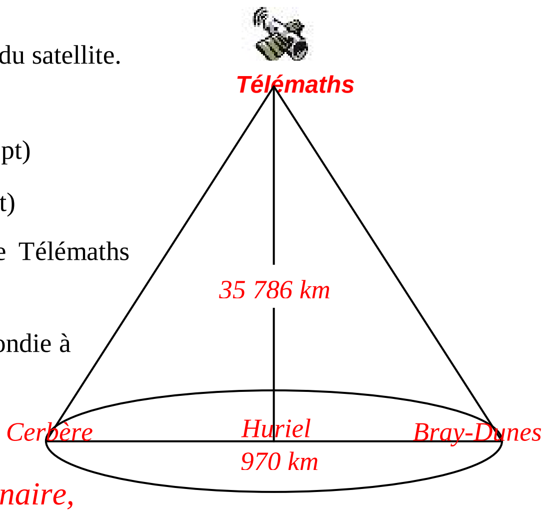
➢ Exercice n° 3 (………………………..… / 3 pts + Bonus 1,5 points) :

Les satellites de télédiffusion sont dits « géostationnaires ». En effet, un satellite géostationnaire, en tournant à la même vitesse que la Terre, reste à la verticale d'un point donné de la surface terrestre et paraît ainsi immobile (stationnaire) par rapport à ce point donné.

Le nouveau satellite Télémaths doit arroser toute la France. On le place donc en orbite géostationnaire à 35 786 km d'altitude, à la verticale de la ville de Huriel (en Auvergne) qui est supposée être le centre de la France.

Ainsi placé, le satellite émet un faisceau d'ondes qui recouvre tout le pays jusque dans sa plus grande longueur (environ 970 km) entre les villes de Bray-Dunes (dans le Nord Pas de Calais) et de Cerbère (dans les Pyrénées Orientales).

Ci dessous le schéma correspondant à cette situation.



1. Reporter sur ce schéma les données numériques ainsi que les noms des villes et du satellite.
2. Justifier rapidement que (TH) ⊥ (CB). (……………..….. / 0,5 pts)
3. Calculer la longueur TC, arrondie au dixième de kilomètre. (………………. / 1 pt)
4. Calculer la mesure de $\widehat{CTH}$ arrondie au centième de degré. (……………..…. / 1 pt)

   En déduire l'angle d'ouverture (arrondi au centième) qui permet au satellite Télémaths d'arroser toute la France. (……..………….….. / 0,5 pts)
5. Bonus : Calculer la vitesse moyenne en km/h d'un satellite géostationnaire, arrondie à l'unité. (……………..…… / Bonus 1,5 pts)

2. Puisque le satellite Télémaths est en orbite géostationnaire, exactement à la verticale de la ville de Huriel, alors (TH) est perpendiculaire au plan de base du cône. Donc (TH) ⊥ (CB).

3. Puisque Huriel est supposée être le centre de la France, alors $CH = \frac{CB}{2} = \frac{970}{2} = 485$ *km.*

Puisque HTC rectangle en C, alors, d'après le théorème de Pythagore, $CT^2 = HC^2 + HT^2$

$$CT^2 = 485^2 + 35\,786^2$$

$$CT^2 = 1\,280\,873\,021$$

$$\text{donc } CT = +\sqrt{1\,280\,873\,021} \text{ car } CT > 0$$

$$CT \approx 35\,789{,}3 \text{ km} \quad \text{v.a au km}$$

La distance entre la ville de Cerbère et le satellite Télémaths est d'à peu près 35 789,3 km.

4. • Puisque TCH rectangle en H, alors $\text{Cos}\,(\widehat{CTH}) = \frac{TH}{TC}$

$$\text{Cos}\,(\widehat{CTH}) \approx \frac{35\,786}{35\,789}$$

$$\text{Donc } \widehat{CTH} \approx \cos^{-1}\left(\frac{35\,786}{35\,789{,}3}\right)$$

$$\text{D'où } \widehat{CTH} \approx 0{,}78° \quad \text{valeur approchée au } 1/100^{\text{ème}}.$$

• Puisque H milieu de [CB] et (TH) ⊥ [CB], alors (HT) est la médiatrice de [CB].

Puisque T est sur (TH) la médiatrice de [CB], T équidistant de C et B donc le triangle CTB est isocèle en T.

Puisque CTB est isocèle en T, alors la médiatrice (HT) issue de T est aussi la bissectrice de $\widehat{CTB}$.

Puisque (TH) est la bissectrice de $\widehat{CTB}$, *alors* $\widehat{CTB} = 2 \times \widehat{CTH} \approx 2 \times 0{,}78 \approx 1{,}56°$.

Pour que le satellite couvre toute la France, il faut que l'angle d'ouverture soit à peu près 1,56° seulement !

5. Puisque le satellite est en orbite géostationnaire, il accomplit un tour complet en 24 heures. Calculons la longueur d'un tour de 35 786 km de rayon.

$\mathcal{L}$ *(cercle de 35 786 km de rayon)* $= 2 \times \pi \times \text{rayon}$

$$= 2 \times \pi \times 35\,786$$

$$= 71\,572\,\pi \text{ km} \quad \text{Valeur exacte}$$

$$V_{moy}\,(\text{km/h}) = \frac{\text{Distance (km)}}{\text{Durée (h)}} = \frac{71\,572\,\pi}{24} \approx 9\,369 \text{ km/h}.$$

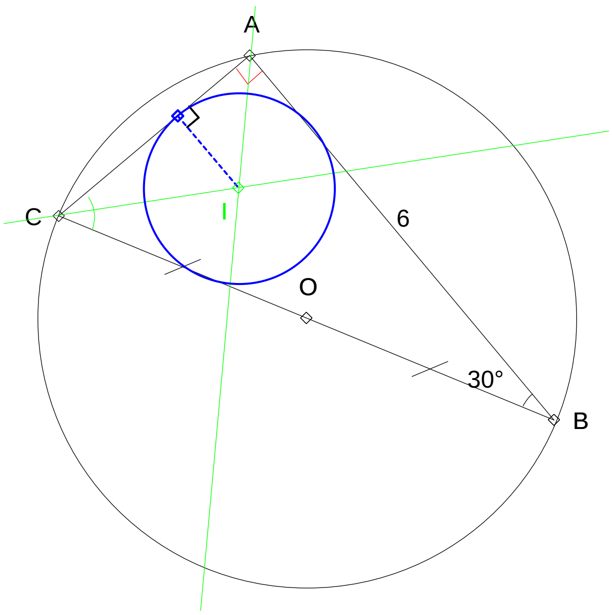
La vitesse moyenne en km/h d'un satellite géostationnaire est d'environ 9 369 km/h.

➢ Exercice n° 4 (……………….… / 3,5 points) :

Sur la figure ci contre, on sait que :

- A appartient au cercle de centre O.
- B et C sont diamétralement opposés.
- $\widehat{ABC} = 30°$ et AB = 6.

1. Trouver la longueur du diamètre (valeur exacte puis valeur approchée au centième). (……….…………….. / 2 points)
2. Construire au compas, en vert en laissant visibles les traits de construction en pointillés, le cercle *inscrit* à ABC (on appellera I son centre et on n'oubliera pas le codage). (…………….………. / 1 point) Précisez la position du point I par rapport au triangle ABC. (………………...… / 0,5 pts)



1. • Puisque $\left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{C}_{[CB]} \\ A \text{ distinct de C et de B} \end{array}\right\}$*, alors, d'après TRCC réciproque, ABC triangle rectangle en A.*

• Puisque ABC rectangle en A, alors $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA}{BC}$

$$\cos(30°) = \frac{6}{BC}$$

$$\text{Donc } BC = \frac{6}{\cos(30°)} \qquad \textit{valeur exacte}$$

$$\left(\text{Donc } BC = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3} \text{ u.l} \quad \textit{valeur exacte niveau } 3^{\text{ème}}\right)$$

$$BC \approx 6{,}93 \text{ u.l} \qquad \textit{valeur approchée au centième}$$

La longueur BC du diamètre du cercle est d'à peu près 6,9 unités de longueur.

2. Le centre I du cercle inscrit au triangle ABC est le point de concours des 3 bissectrices.

Il suffit donc de construire deux bissectrices. Leur intersection sera le centre I du cercle inscrit.

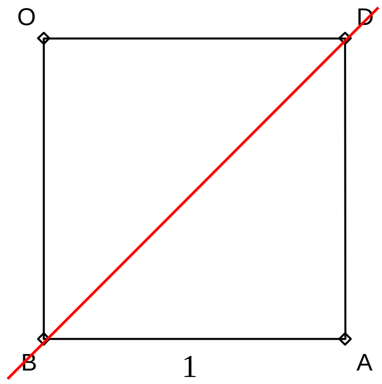
Puis on projette I orthogonalement sur l'un des côtés du triangle ABC (sur [AC] par exemple) pour avoir le rayon du cercle inscrit.

Puisque le centre I du cercle inscrit est à l'intersection des 3 bissectrices, alors I est équidistant des 3 côtés du triangle ABC.

- <u>Exercice n° 5 (……………………… / 5,5 points)</u> : Valeur exacte du cos (45°).

Le but de l'exercice est de trouver la valeur exacte du cosinus d'un demi angle droit (c-à-d Cos(………°)).

Les questions sont indépendantes et le résultat de chacune peut être admis pour résoudre les questions suivantes.



Soit le carré ADOB de longueur 1 (figure non à l'échelle).

1. Construire au compas la bissectrice de l'angle $\widehat{ABO}$. (………….. / 0,5 pts)

   Que représente cette bissectrice pour le carré ADOB ? (……..….. / 0,25 pts)
2. Montrer que $\widehat{ABD} = 45°$. (…………….. / 1 pt)
3. Montrer que le triangle BAD est isocèle rectangle. (……….….. / 1 pt)
4. En utilisant le Théorème de Pythagore, calculer la valeur exacte de la longueur BD. (……………. / 1 pt)
5. En considérant l'angle $\widehat{ABD}$, calculer la valeur exacte de Cos (45°). (…..………. / 1 pt)
6. En utilisant la calculette, donner une valeur approchée au centième de ce Cos (45°). (……….. / 0,25 pts)

   Puis donner la signification de cette valeur par rapport aux longueurs du côté adjacent [AD] et de la diagonale [BD]. (…………..…. / 0,5 pts)

1. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABO}$ est en fait la diagonale (BD) du carré.

2. Puisque (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABO}$, alors $\widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{ABO}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$.

3. Puisque ADOB est un carré, alors AB = AD.

Puisque $\left\{\begin{array}{l} AB = AD \\ \widehat{BAD} = 90° \end{array}\right\}$ alors le triangle BAD est isocèle rectangle en A.

4. Puisque BAD rectangle en A, alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$
$$BD^2 = 1^2 + 1^2$$
$$BD^2 = 2$$

donc $BD = +\sqrt{2}$ *u.l car BD > 0*

La longueur BD de la diagonale d'un carré de longueur 1 est exactement de $\sqrt{2}$ u.l.

5. Puisque BAD est rectangle en A, alors : $\cos(\widehat{ABD}) = \dfrac{BA}{BD}$

D'où $\cos(45°) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *valeur exacte.*

6. En utilisant la calculatrice (en mode degré) $\cos(45°) \approx 0{,}71$ *(sans unite !)*

Cos (45°) ≈ 0,71 signifie que dans un triangle rectangle où l'un des deux angles aigus mesure 45°, le côté adjacent à cet angle aigu mesure environ 71% de la longueur de l'hypoténuse.

Deux remarques :

① On peut prouver le résultat de la question 1 à savoir que la bissectrice de l'angle $\widehat{ABO}$ est aussi une diagonale du carré. Pour cela, montrons que cette bissectrice passe par B et D. Pour B, cela sera facile et pour D, on montrera que D est équidistant des deux côtés [BO) et [BA) de l'angle $\widehat{ABO}$.

• Puisque B est le sommet de l'angle donc forcément B est sur la bissectrice de $\widehat{ABO}$.

• La distance d(D ; [BO)) du point D au côté [BO) est la longueur DO.

De même, La distance d(D ; [BA)) du point D au côté [BA) est la longueur DA.

Puisque ADOB est un carré, alors DO = DA.

Donc le point D est équidistant des deux côtés [BO) et [BA) de l'angle $\widehat{ABO}$.

Donc D est sur la bissectrice de $\widehat{ABO}$.

Donc la bissectrice de $\widehat{ABO}$ est la diagonale (BD) du carré ADOB.

② On pouvait montrer le résultat de cet exercice sans passer par la bissectrice mais en utilisant la diagonale du carré. Les questions seraient alors les suivantes :

1. *Montrer que ADB est isocèle rectangle. (……….. / 1 pt)*
2. *Calculer la mesure de $\widehat{ABD}$. (……….. / 1 pt)*
3. *En utilisant le Théorème de Pythagore, calculer la valeur exacte de la longueur BD. (…………… / 1 pt)*
4. *En considérant l'angle $\widehat{ABD}$, calculer la valeur exacte de Cos (45°). (…………. / 1 pt)*
5. *En utilisant la calculette, donner une valeur approchée au centième de ce Cos (45°). (………. / 0,5 pts)*
6. *Puis donner la signification de cette valeur par rapport aux longueurs du côté adjacent [AD] et de la diagonale [BD]. (…………. / 0,5 pts)*

En fait, j'ai choisi de passer par la bissectrice pour vérifier les acquisitions suivantes :

- *Construction de la bissectrice au compas.*
- *Propriété angulaire de la bissectrice.*