ROTATIONS ET POLYGONES REGULIERS

Objectifs du cours :

I : Définissons la Rotation

- Savoir définir une rotation
- Etre capable d'en repérer une et d'en effectuer une

II :

-
-

III :

-
-

IV :

-
-

V :

-
-

VI :

-
-

VII :

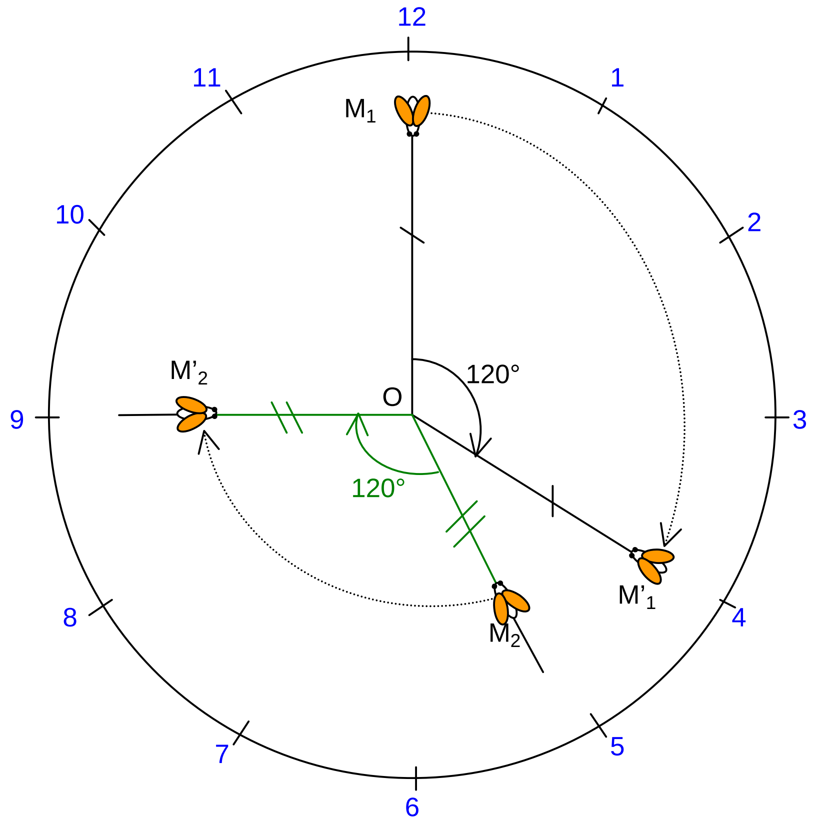
-
-

Planning :

Date	En Classe	Date	A préparer ou à rendre
9 mars 2007	Distribution Polycopié	13 mars 2007	Préparer I
13 mars 2007	I , II , III et IV	14 mars 2007	Finir IV
14 mars 2007	Exercices IV	16 mars 2007	Finir Exercices IV
16 mars 2007	V, VI, VII	20 mars 2007	Finir Exercices VII
20 mars 2007	Correction Exercices VII	21 mars 2007	Devoir maison P19
21 mars 2007	Fin des Corrections	23 mars 2007	Révisions Contrôle
23 mars 2007	Contrôle		

I. Définissons la rotation

Exemple d'introduction :



Une mouche se pose sur l'aiguille des heures d'une horloge.

$1^{\text{ère}}$ situation :
Il est midi, la mouche se trouve sur l'extrémité de l'aiguille en M_1.
4 heures plus tard, la mouche se trouve en M'_1 tel que :

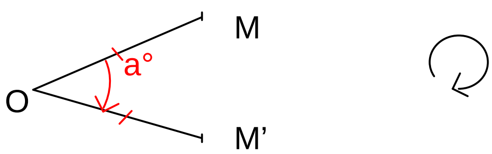
$OM'_1 = OM_1$ et $\widehat{M_1OM'_1} = 120°$

$2^{\text{ème}}$ situation :
Il est 5h, la mouche s'est déplacée sur l'aiguille en M_2 .
4 heures plus tard, la mouche se trouve en M'_2 tel que :

$OM'_2 = OM_2$ et $\widehat{M_2OM'_2} = 120°$

La mouche a subi deux fois le même déplacement :
la rotation de centre O et d'angle 120° (= 4h)

Définition : Lorsque OM' = OM et $\widehat{MOM'} = a$,
on dit que M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle a.
Le sens de rotation est indiqué par la flèche.

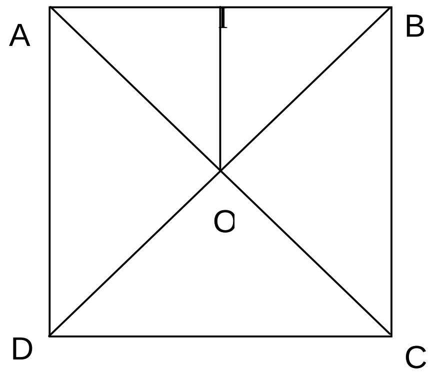


Une rotation est donc définie par son centre et son angle (dans un sens donné).

Activité :

Lecture puis constructions de difficulté progressive (avec et sans instruments).

Partie A :

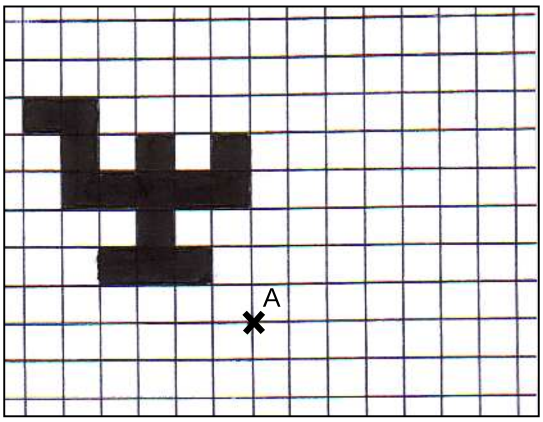


Compléter en observant le carré ci-dessus :

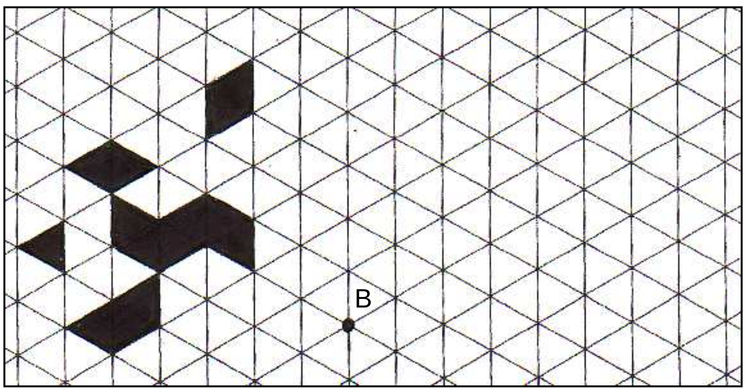
1) L'image du point A par la rotation de centre B et d'angle 90° ( ) est le point ....
2) L'image du point .... par la rotation de centre D et d'angle 90° ( ) est le point C.
3) L'image du point B par la rotation de centre .... et d'angle 90° ( ) est le point D.
4) L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle 90° ( ) est le point ....
5) L'image du point .... par la rotation de centre O et d'angle 90° ( ) est le point B.
6) L'image du point D par la rotation de centre O et d'angle ...... ( ) est le point B.
7) L'image du triangle OAB par la rotation de centre O et d'angle 90° ( ) est le triangle ....
8) L'image du triangle .... par la rotation de centre O et d'angle 180° ( ) est le triangle BCD.
9) L'image du triangle AIO par la rotation de centre .... et d'angle .... ( ) est le triangle OIB.

Partie B :

1) Construire l'image de la figure ci-contre par la rotation de centre A et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

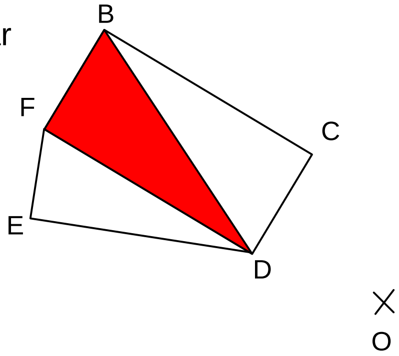


2) Construire l'image de la figure ci-contre par la rotation de centre B et d'angle 120° dans le sens des aiguilles d'une montre.

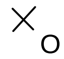


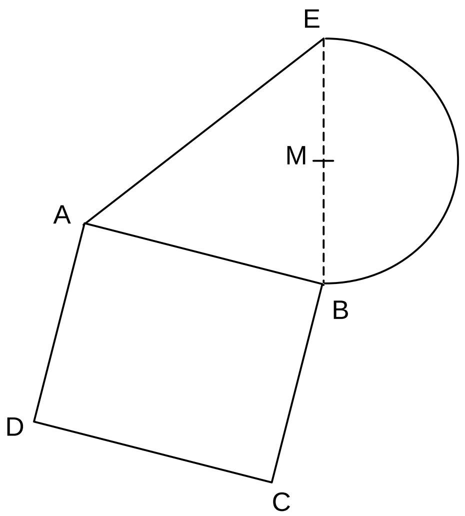
Partie C :

1) Construire l'image de la figure ci-contre par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.



2) Construire l'image de la figure ci-contre par la rotation de centre O et d'angle 50° dans le sens ***inverse*** des aiguilles d'une montre.



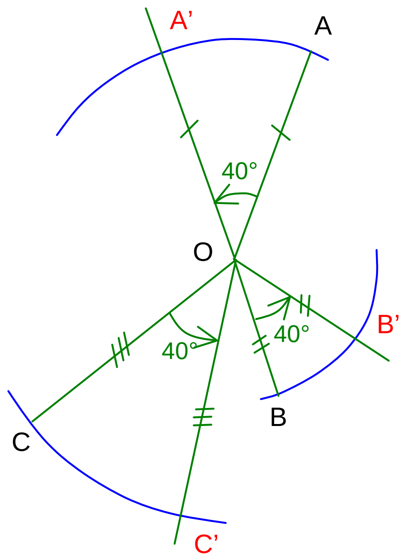


II. Images de figures par une rotation

1) Images de points

Méthode:

Construire les images A’, B’ et C’ des points A, B et C par la rotation de centre O et d’angle 40° dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.

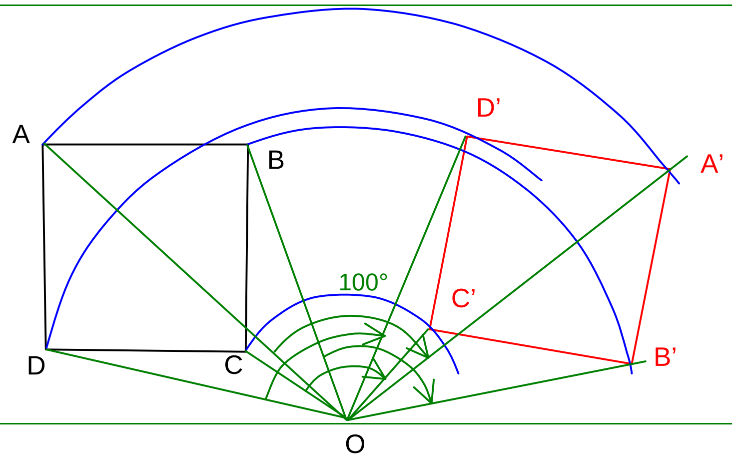


Remarque :

Quel est l’autre nom de la rotation de centre O et d’angle 180° ? *« La symétrie de centre O. »*

2) Image d'une figure

Méthode:
Construire l'image A'B'C'D' du carré ABCD par la rotation de centre O et d'angle 100° dans le sens des aiguilles d'une montre.



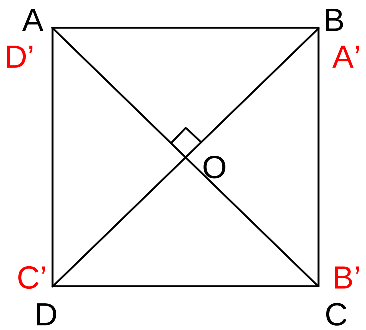
3) Propriétés de conservation

L'image d'une figure par une rotation est superposable à la figure de départ. On en déduit :

Propriétés :
La rotation conserve les longueurs, l'alignement, les milieux, les angles, …
Par une rotation, l'image d'une droite est une droite.
L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

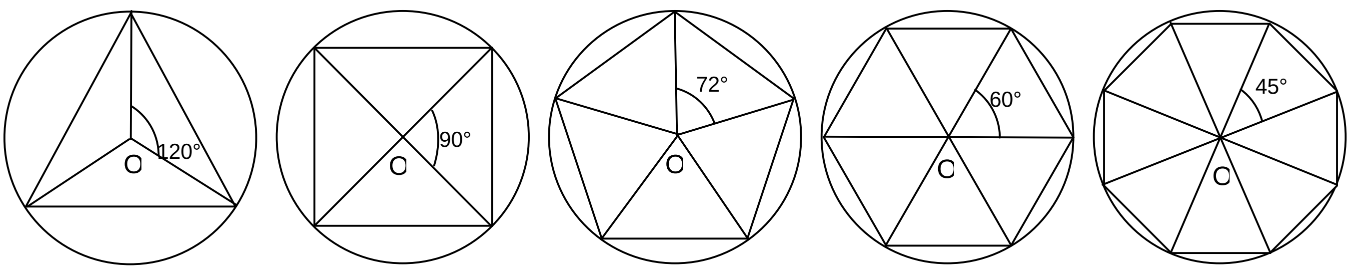
III. Figures invariantes par une rotation

L'image du carré ABCD par la rotation de centre O est d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre est le carré A'B'C'D', soit BCDA soit ABCD lui-même.
On dit que ABCD est invariant par cette rotation.



IV. Polygones réguliers

Définition : Un polygone régulier est un polygone inscrit dans un cercle dont tous les côtés ont la même longueur.

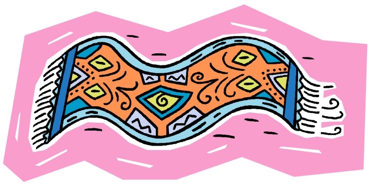


Triangle équilatéral · Carré · Pentagone régulier · Hexagone régulier · Octogone régulier

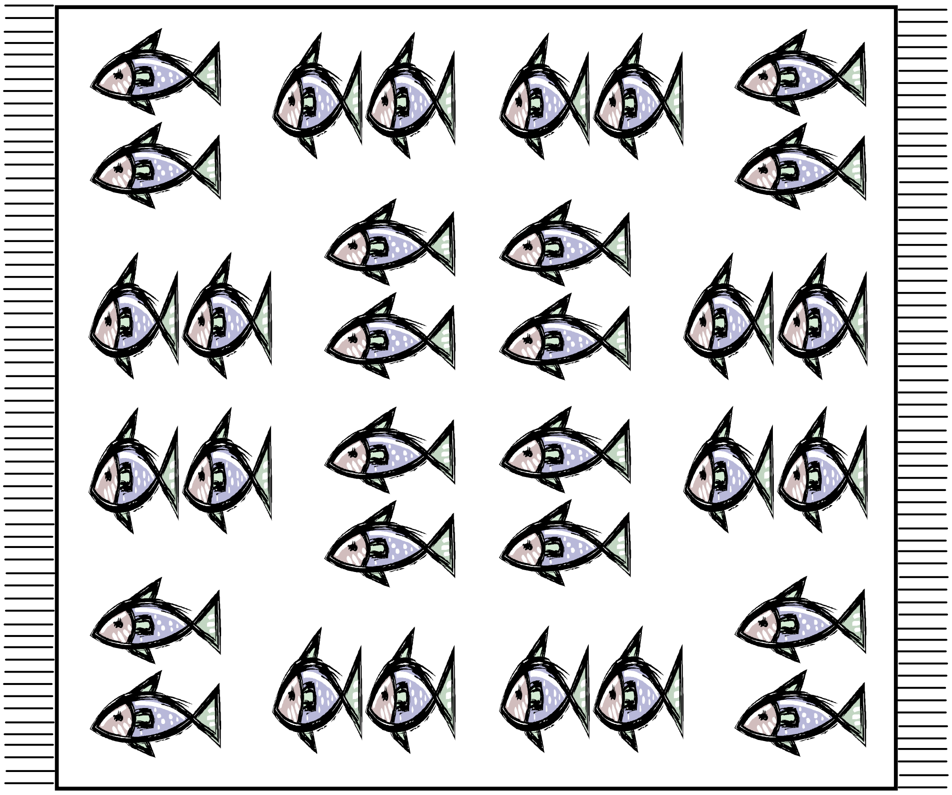
Propriété : Il existe toujours une rotation laissant invariante un polygone régulier.

Activité :

LE TAPIS

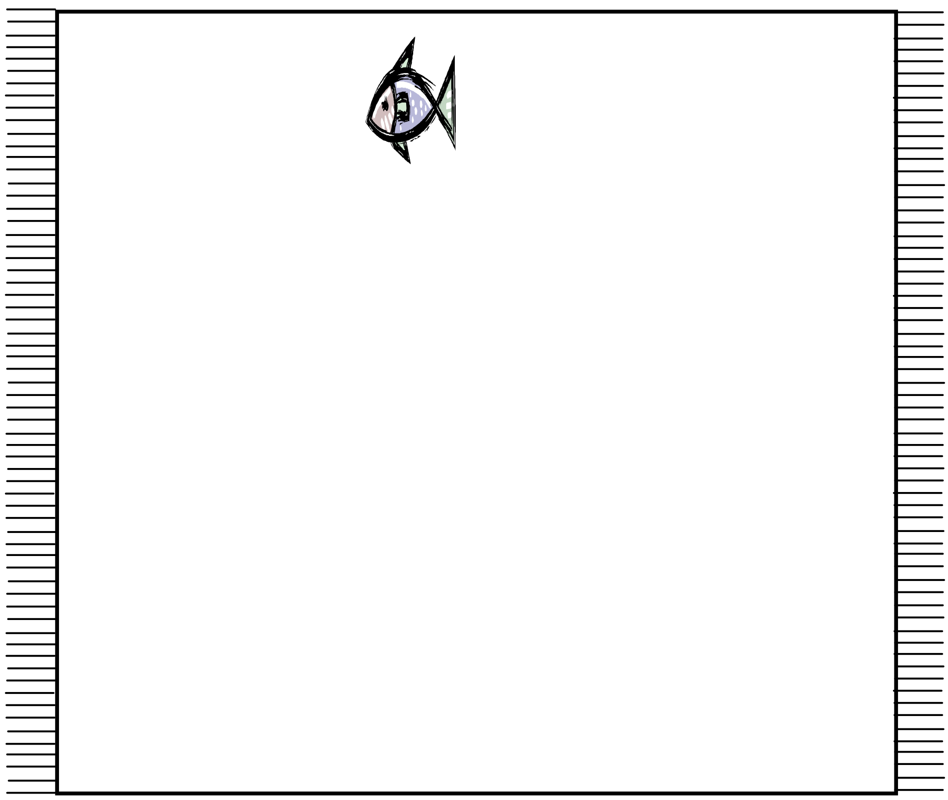


Voici un tapis recouvert de motifs identiques.
Sur la fiche réponse, un autre élève devra le reproduire sans l'avoir vu.
Il faudra donc décrire le plus simplement possible votre tapis.
Tout texte est autorisé. Sur le tapis à compléter de la fiche réponse, il est autorisé de marquer **au plus** trois points et deux droites.



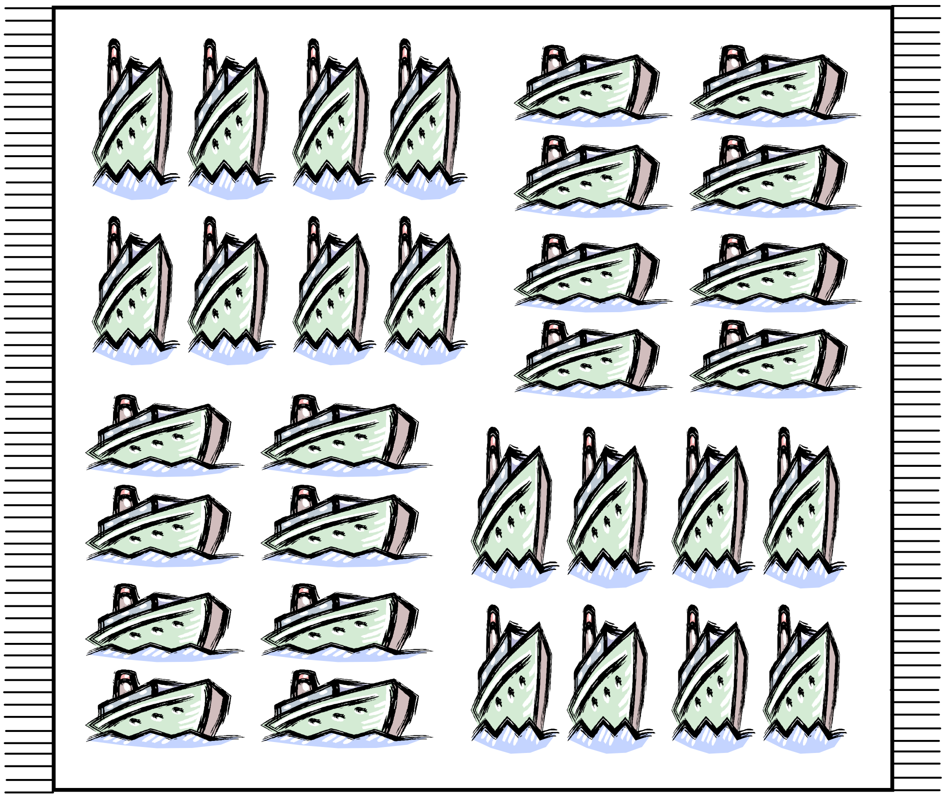
Fiche réponse :

Description à l'aide d'un texte :



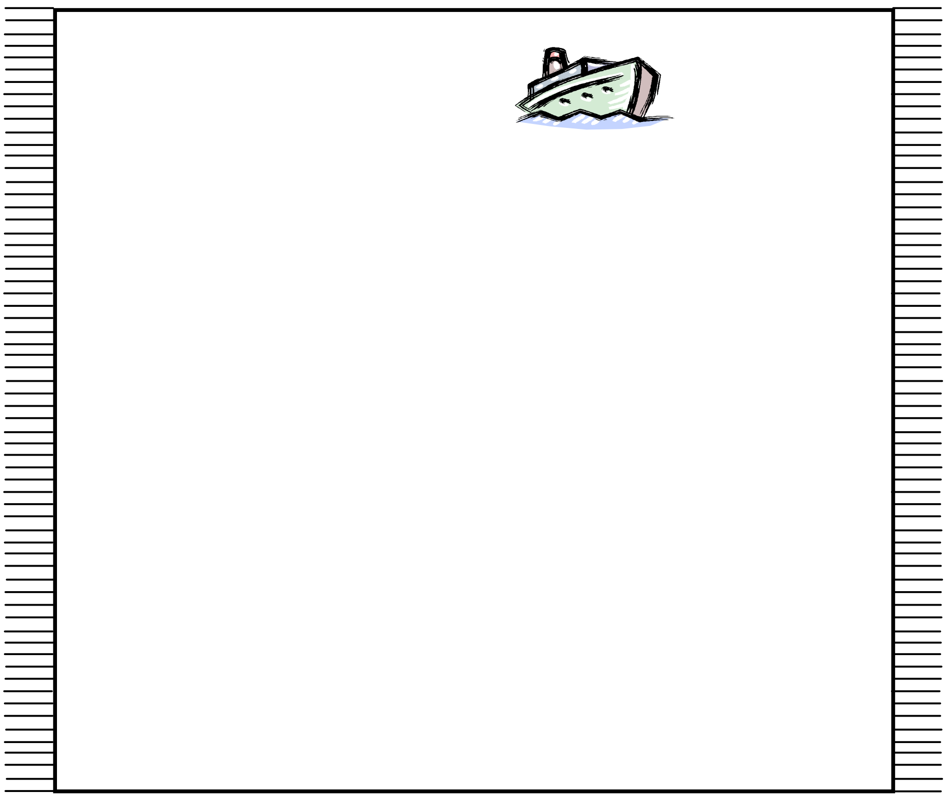
LE TAPIS

Voici un tapis recouvert de motifs identiques.
Sur la fiche réponse, un autre groupe devra le reproduire sans l'avoir vu.
Il faudra donc décrire le plus simplement possible votre tapis.
Tout texte est autorisé.
Sur le tapis à compléter de la fiche réponse, il est autorisé de marquer **au plus** trois points et deux droites.



Fiche réponse :

Description à l'aide d'un texte :

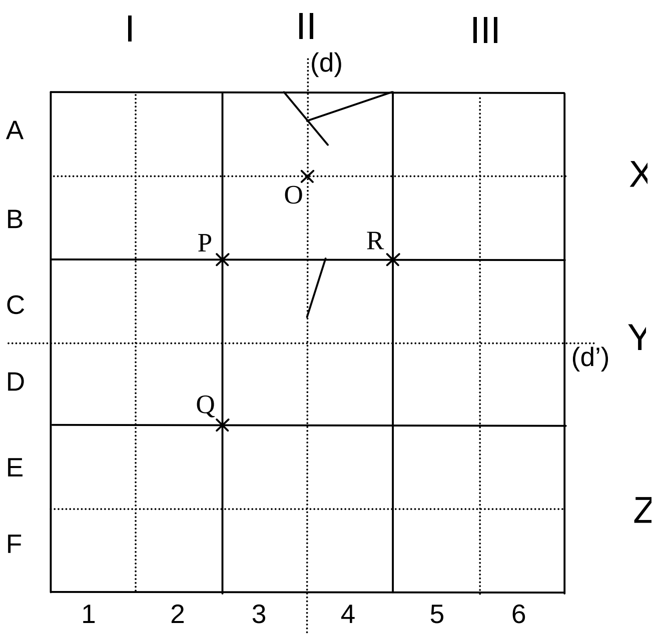


Activité :

LES PAPILLONS

Commentaire :
Construction d'un pavage formé de papillons et défini par les transformations vues au collège.

1) Construis l'image de la case A4 par la symétrie d'axe (d).
2) Construis l'image de la case A3 par la symétrie de centre O.
3) Construis l'image de la case A4 par la symétrie de centre O.
4) Construis l'image de la case C4 par la rotation de centre P et d'angle 90° (↺).
5) Construis l'image du tout par la symétrie d'axe (d').
6) Construis l'image de la case D4 par la rotation de centre P et d'angle 90° (↺).
7) Construis l'image de la case C4 par la rotation de centre Q et d'angle 90° (↻).
8) Construis l'image de la case ZII par la translation de vecteur $2\overrightarrow{PO}$.
9) Construis l'image de la case XII par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OP}$.
10) Construis l'image de la case YIII par la rotation de centre R et d'angle 90° (↺).
11) Construis l'image de la case XIII par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OP}$.
12) Construis l'image de la case YII par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OP}$.
13) Construis l'image de la case XIII par la symétrie d'axe (d).
14) Construis l'image de la case ZI par la symétrie d'axe (d).

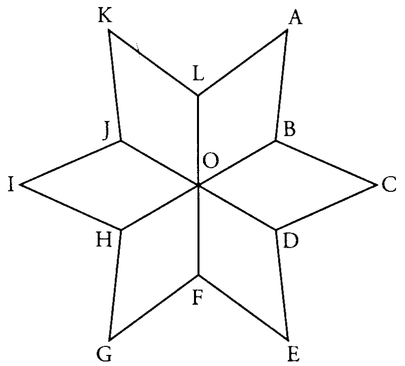


D'après M.C.Escher, Symmetry drawing, 1937/38

Exercices d'application :

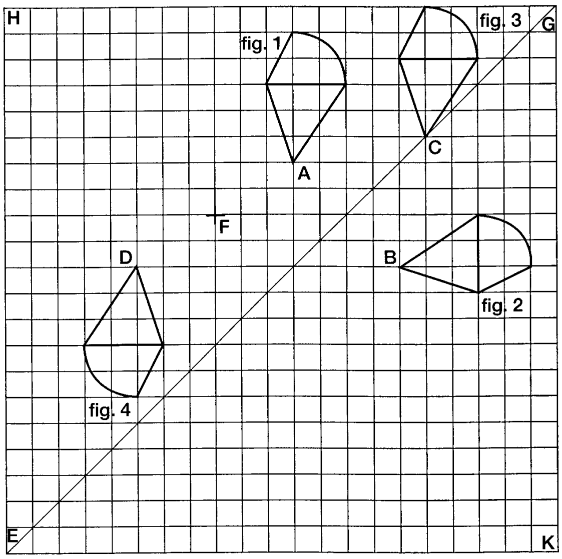
Exercice 1 : Transformations.

La figure ci-contre est constituée de 6 losanges superposables.
Recopier et compléter, sans démonstration, chacune des phrases suivantes.



1) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, l'image du losange ALOB est le losange ...
2) Par la symétrie orthogonale d'axe (HB), l'image du losange ALOB est le losange ...
3) Par la rotation de centre O et d'angle 120° dans le sens des aiguilles d'une montre, l'image du losange ALOB est le losange ...

Exercice 2 : Déplacements.

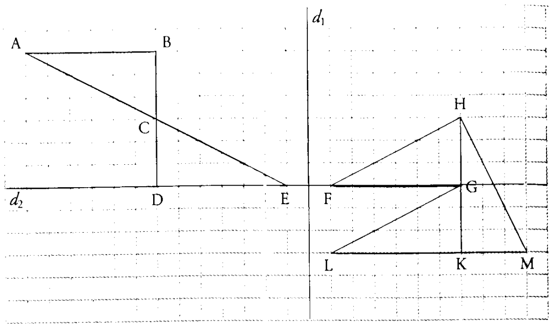


On a reproduit plusieurs fois une figure à l'intérieur du carré HGKE dont [EG] est une diagonale.

1) Compléter les phrases suivantes en utilisant les numéros des figures et les points déjà nommés :
La figure ... est l'image de la figure 1 par la symétrie de centre ...
La figure ... est l'image de la figure 1 par la translation de vecteur ...
La figure 2 est l'image de la figure 1 par la ...
2) Tracer l'image de la figure 1 par la rotation de centre A, d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 3 : Déplacements.

On a représenté sur un quadrillage cinq triangles rectangles de mêmes dimensions.

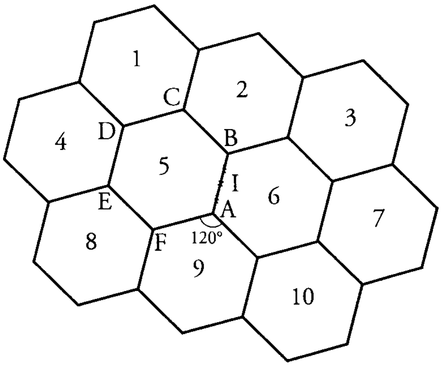


Sans justification, répondre aux questions suivantes :
1) Quelle est l'image du triangle FGH par la symétrie d'axe d_1 ?
2) Quelle est l'image du triangle GKL par la rotation de centre K, d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre ?
3) Quelle est la transformation par laquelle on passe du triangle ABC au triangle EDC ?
4) Quelle est la transformation par laquelle on passe du triangle GKL au triangle HGF ?

Exercice 4 : Déplacements (Pavages)

La figure suivante est constituée de dix hexagones réguliers numérotés de 1 à 10.

L'hexagone 5 est noté ABCDEF. Le point I est le milieu du segment [AB].



Sans justification, répondre aux questions suivantes :

1) Quelle est l'image de l'hexagone 2 par la symétrie de centre 1 ?

2) Quelle est l'image de l'hexagone 4 par là symétrie d'axe la droite (AB) ?

3) Quelle est l'image de l'hexagone 3 par la translation de vecteur $\overrightarrow{CE}$ *?*

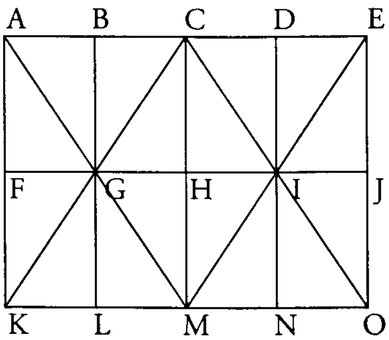
4) Quelle est l'image de l'hexagone 8 par la rotation de centre A et d'angle 120° ? Tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exercice 5 : Déplacements (Pavages)

La figure ci-contre est un assemblage de huit rectangles de mêmes dimensions que ABGF.

Par observation de la figure, répondre aux questions suivantes.

(Il n'est demandé aucune justification et il n'est pas demandé de reproduire la figure.)



Quelle est l'image du triangle AFG par :

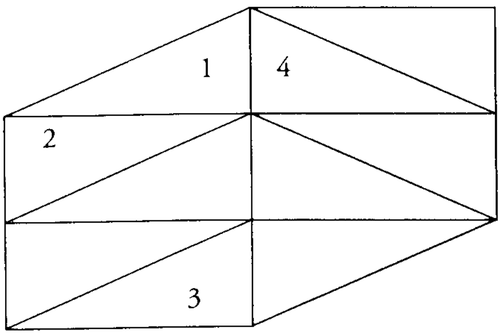
1) La symétrie orthogonale d'axe (CM) ?

2) La symétrie de centre H ?

3) La translation de vecteur $\overrightarrow{LN}$ *?*

Exercice 6 : Déplacements et pavages.

La figure ci-dessous est formée de triangles rectangles superposables.



Recopier et compléter les phrases suivantes en complétant chacune d'elles par l'une des expressions :

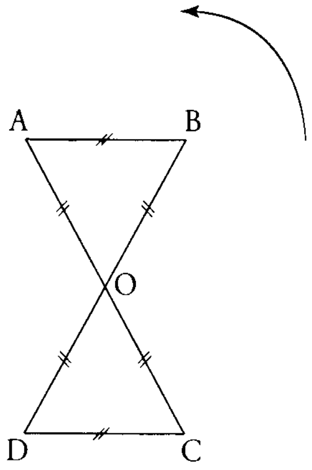
- *translation ;*
- *rotation ;*
- *symétrie centrale ;*
- *symétrie orthogonale.*

Phrase 1 : Le triangle 2 est le transformé du triangle 1 par une ...

Phrase 2 : Le triangle 3 est le transformé du triangle 1 par une ...

Phrase 3 : Le triangle 4 est le transformé du triangle 1 par une ...

Exercice 7 : Rotation, translation.



1) Reproduire ce dessin en vraie grandeur sachant que OA = 3 cm et que les points A, O et C, d'une part, et les points B, O et D, d'autre part, sont alignés.

2) Démontrer que ABCD est un rectangle.
3) Placer, sur le dessin, le point E image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
4) Placer le point F image du point C par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens de la flèche.
5) Montrer que les points A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle que l'on précisera.
6) Écrire un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 8 : Transformations *(Utiliser une feuille de papier quadrillé.)*
Construire un triangle EFG, rectangle en F tel que EF = FG = 4 cm.
1) Placer le point K image de E par la symétrie de centre F.
2) Placer le point L image de F par la symétrie orthogonale d'axe (EG).
3) Placer le point J image de G par la translation de $\overrightarrow{EF}$.
4) Placer le point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{FG}$.
Quelle est l'image de H par la rotation de centre F qui transforme E en G ? Justifier ce résultat.

Exercice 9 : Constructions et transformations.

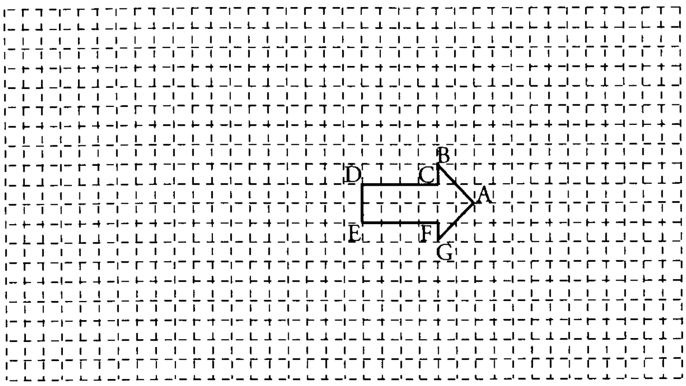
Tracer un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côté et faire les trois constructions demandées à partir de ce triangle, sans les justifier.

1) Construire l'image du triangle ABC dans la symétrie de centre C et hachurer au crayon de papier l'intérieur de cette image.

2) Construire l'image du triangle ABC dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC) ; la hachurer en rouge.

3) Construire l'image du triangle ABC dans la rotation de centre C, d'angle 120° et de sens, le sens inverse des aiguilles d'une montre ; la hachurer en bleu ou noir.

Exercice 10 : Constructions



On appelle T la figure représentée par le polygone ABCDEFG.

1) Construire sur le quadrillage :

a) l'image T_1 de T par la symétrie centrale de centre B ;

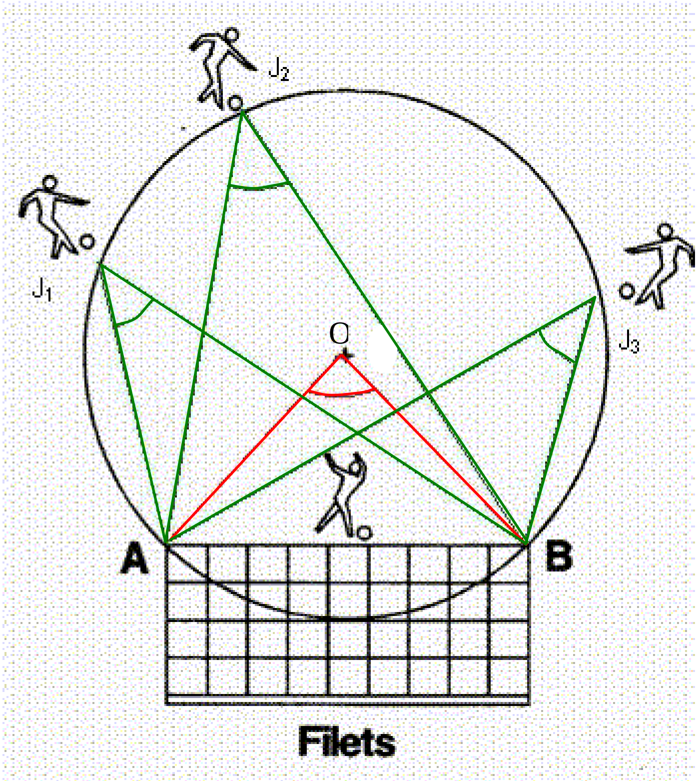
b) l'image T_2 de T par la rotation de centre E, d'angle 90°, dans le sens des aiguilles d'une montre;

c) l'image T_3 de T par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

2) Placer le point O tel que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$. (On écrira les lettres T_1, T_2, T_3 et O sur le dessin.)

V. Définitions des angles inscrits

1) Exemple d'introduction

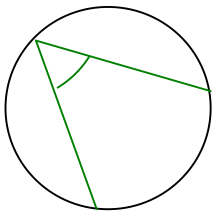


En mesurant, on constate que : $\widehat{AJ_1B} = \widehat{AJ_2B} = \widehat{AJ_3B} = 46°$ et $\widehat{AOB} = 92°$

2) Angle inscrit et angle au centre

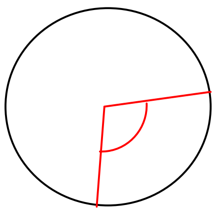
a) $\widehat{AJ_1B}$, $\widehat{AJ_2B}$ et $\widehat{AJ_3B}$ sont des angles inscrits.

Un angle inscrit est formé par deux cordes issues d'un même point du cercle



b) $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.

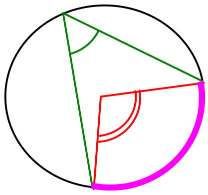
Un angle au centre est un angle dont le sommet est au centre du cercle.



VI. Propriétés des angles

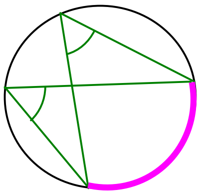
Propriété 1:

La mesure d'un angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.



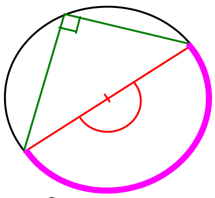
Propriété 2

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



VII. Rappel d'un cas particulier

Si l'angle au centre est plat (180°),
alors un angle inscrit interceptant le même arc
mesure 180 : 2 = 90°



On retrouve le théorème du triangle rectangle inscrit vu en 4[e].

Exercices d'application :

Exercice 1 : Nancy 00

1. Construire un cercle de centre O et de rayon 3cm.

   Placer sur ce cercle trois points A, B, C de telle façon que BC = 4 cm et $B\hat{C}A = 65°$.

   Construire le point F diamétralement opposé au point B sur ce cercle.
2. Démontrer que le triangle BFC est un triangle rectangle.
3. Calculer le sinus de l'angle $B\hat{F}C$ et en déduire la mesure de cet angle arrondie à un degré près.
4. Déterminer, au degré près, les mesures des angles du triangle BOC.

Exercice 2 : Orléans 00

Construire un cercle de centre O et de rayon 5 cm.

Soit [MN] un diamètre et K un point du cercle distinct de M et N.

$\boxed{1)}$ Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MKN}$? Justifier.

$\boxed{2)}$ Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{MKN}$. Elle recoupe le cercle en P.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MOP}$.

3) Construire le point L, image du point M par la translation qui transforme O en P.

Quelle est la nature du quadrilatère OMLP ? Justifier.

Exercice 3 : Paris 01

1) Tracer un segment [AB] tel que AB = 7 cm

Placer un point C tel que $\widehat{BAC} = 70°$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

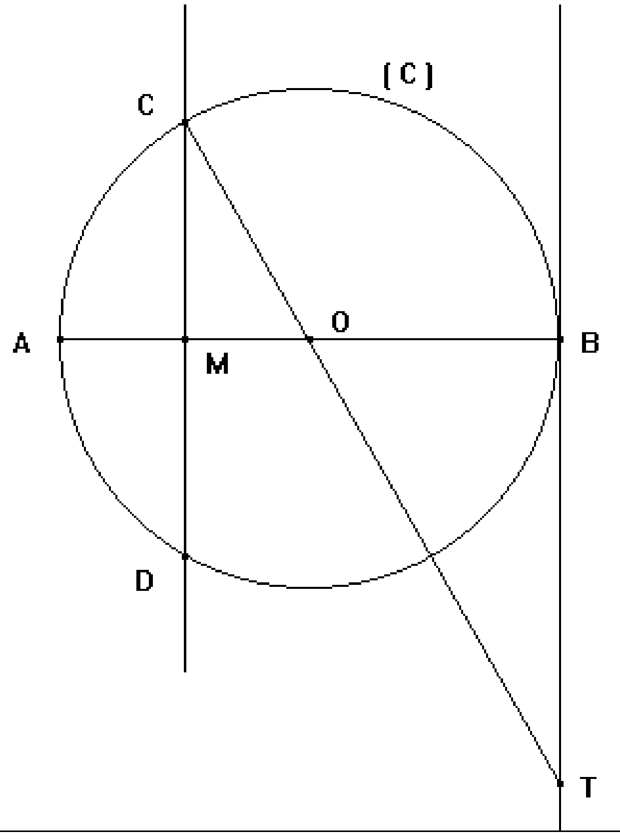
2) Construire le cercle circonscrit au triangle ABC, et appeler O son centre.

On laissera les traits de construction.

3) Donner la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$ en justifiant la réponse.

Exercice 4 : Lyon 01

La figure ci-contre n'est pas à refaire sur la copie. Elle n'est pas donnée en vraie grandeur.



Le rayon du cercle (C) de centre O est égal à 3 cm. [AB] est un diamètre de ce cercle.

Les points C et D appartiennent au cercle et la droite (CD) est la médiatrice du rayon [OA].

La droite (OC) coupe en T la tangente au cercle (C) au point B.

1) Montrer que (CM) et (BT) sont parallèles.

2) Calculer, en utilisant la propriété de Thalès, la longueur OT.

3) a) Démontrer que le triangle COA est équilatéral.

b) En déduire une mesure (en degrés) de l'angle $\widehat{MCO}$ puis une mesure (en degrés) de l'angle $\widehat{DOT}$.

Devoir Maison :

CONSTRUCTION GEOMETRIQUE

Pour tracer la sphère centrale, construisez un cercle de diamètre [AB] et de centre O tel que AB = 6 cm.
Tracez un diamètre [CD] perpendiculaire à (AB).
Placez sur (AB) deux points I et J tels que OI = OJ = 1 cm et deux points K et L tels que OK = OL = 8 cm.
Tracez les arcs de cercles de centres respectifs I, J, K, L passant par C et D.
Tracez trois cercles (C_1), (C_2) et (C_3) de même centre O et de rayons respectifs 3,5 cm, 5 cm et 8 cm.
Le rayon [OL] du cercle (C_3) coupe les deux autres cercles (C_1) et (C_2) respectivement en E et F.
Tracez le rayon [OL_2] tel que $\widehat{LOL_2} = 30°$, qui coupera les deux cercles (C_1) et (C_2) respectivement en E_2 et F_2 et tracez la bissectrice de cet angle qui coupera les cercles (C_3), (C_2) et (C_1) respectivement en L_1, F_1 et E_1.
Tracez [L_1F] et [L_1F_2] puis tracez ensuite la partie des segments [L_1E] et [L_1E_2] comprise entre les cercles (C_2) et (C_3). Ils coupent (C_2) en G et H.
Tracez la partie des rayons [OH] et [OG] comprise entre les cercles (C_1) et (C_2).
Tracez [L_2H] et [LG].
Continuez en faisant des rotations de 30°, 60°, 90° , 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300° et 330°.
Pour construire les petites sphères, prolongez par exemple le rayon [OL_2] et placez le point O' tel que L_2O' = 1 cm.
Tracez le cercle de centre O' et de rayon 1 cm puis tracez un rayon [O'S] perpendiculaire à ($O'L_2$).
Tracez l'arc de cercle de centre S passant par L_2.
Faites la même construction sur chacun des rayons faisant entre eux un angle de 30°.