FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES
SYSTEMES D'EQUATIONS

Objectifs du cours :

I : Fonction affine - fonction linéaire - fonction constante

-
-

II : Déterminer une fonction linéaire à partir d'une image

-
-

III : Déterminer une fonction affine à partir de deux images

-
-

IV : Fonction affine et droite associée

-
-

V : Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

-
-

VI : Prolongement : exemple d'une fonction non affine

-
-

VII : Systèmes d'équations

-
-

Planning :

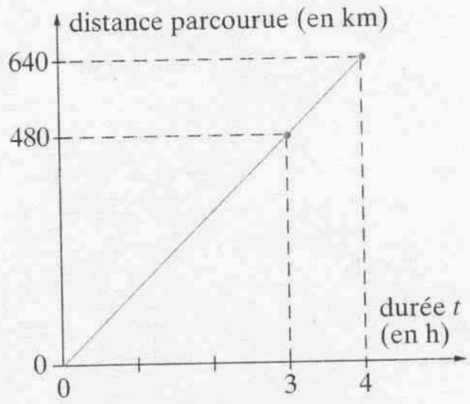
Date	En Classe	Date	A préparer ou à rendre
27 mars 2007	Activités préparatoires	**28 mars 2007**	Finir les activités préparatoires
28 mars 2007	Distribution Polycopié Correction Activité	**30 mars 2007**	Préparer I et II
30 mars 2007	Correction I et II	**03 avril 2007**	Lire III, IV et V
03 avril 2007	Cours III, IV et V	**04 avril 2007**	Préparer exos V
04 avril 2007	Corrections exos	**06 avril 2007**	Finir exos V + Test 20mn
06 avril 2007	Corrections exos	**24 avril 2007**	DM 1 : N°66 et 73 P 100 -102
24 avril 2007	Cours VI et VII	**25 avril 2007**	Finir exos VII
25 avril 2007	Corrections exos	**27 avril 2007**	Réviser Contrôle
27 avril 2007	Contrôle	**2 mai 2007**	DM 2 : P22 du polycopié

Proportionnalité et fonction linéaire

1 Des notations nouvelles

Lors du test d'une voiture roulant à vitesse constante sur un circuit, les mesures ont permis de réaliser le tableau et le graphique suivants :

durée t du parcours (en h)	$\frac{3}{4}$	2,5	4
distance parcourue (en km)	120	400	640



1° Pourquoi le tableau et le graphique traduisent-ils une situation de proportionnalité ?

2° ***a)*** Dans cet exemple, que représente le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première ligne du tableau à la seconde ?

b) t désignant la durée du parcours, que représente $160\,t$?

3° ***a)*** Recopier et compléter : « *Le graphique représente la* **...** *en fonction de* **...** ».

b) On dit que le mouvement de la voiture est associé à une **fonction linéaire de coefficient 160**. On note cette fonction : $\boldsymbol{t \mapsto 160\,t}$.

Recopier et compléter : $1 \mapsto \dots$; $3 \mapsto \dots$; $\dots \mapsto 400$; $\dots \mapsto 80$.

4° À chaque durée t correspond une distance parcourue d unique.
On dit alors que la distance d est **fonction de** $\boldsymbol{t}$. On note cette distance $d(t)$.
La phrase : « *La distance parcourue en* 2 h *est* 320 km » se note donc : $d(2) = 320$.

a) Que signifie : $d\left(\frac{3}{4}\right) = 120$ et $d(3) = 480$? ***b)*** Compléter : $d(1{,}8) = \dots$; $d(\dots) = 360$.

2 Reconnaître des fonctions linéaires

1° ***a)*** Associer chaque tableau ci-dessous à son « *procédé de fabrication* » choisi parmi :

$$x \mapsto x^2\ ; \quad x \mapsto 3x\ ; \quad x \mapsto 2x + 1.$$

tableau A

−2	1,5	3	3,5
−3	4	7	8

tableau B

−2	0,5	2,5	3
6	1,5	7,5	9

tableau C

−2	0	1	3
4	0	1	9

b) Seules les situations de proportionnalité sont « liées » à des fonctions linéaires.
Trouver la (les) fonction(s) linéaire(s) parmi les notations : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto 3x$; $x \mapsto 2x + 1$.

2° On désigne par f le procédé qui, à chaque nombre x, associe son triple. Recopier et compléter :

f est une fonction **...** *de coefficient* **...** . *L'image de* -4 *par la fonction f est* **...**, *soit* $f(-4) = \dots$.
$f(-2) = \dots$; $f(\dots) = 9$; $f(-6{,}2) = \dots$; $f(\dots) = 2{,}4$.

Commentaire !
Par la fonction f définie ci-contre, l'**image** de x est $3x$. Cette image se note $f(x)$.

Représentation graphique d'une fonction linéaire

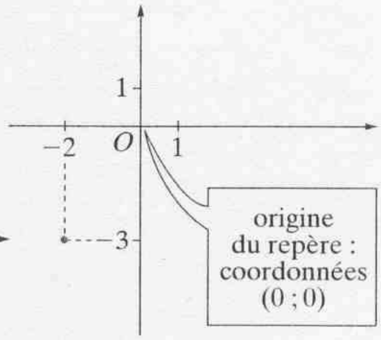
3 Alignés ou non avec l'origine du repère ?

Acte 1

1° ***a)*** Soit la fonction linéaire $f : x \mapsto 1{,}5x$.
Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

- sur l'axe des abscisses →
- sur l'axe des ordonnées →

x	-2	1	3	4
$f(x) = 1{,}5x$	-3			



b) Reproduire le repère ci-contre et marquer les quatre points de coordonnées $(x ; f(x))$.

c) Que peut-on dire de ces points et de l'origine O du repère ?

2° ***a)*** Mêmes consignes qu'au **1° *b)*** et ***c)*** en utilisant les tableaux A, B, et C de l'*Activité* 2, page 86.

b) En comparant les quatre représentations graphiques obtenues, dire quelle « loi », concernant les fonctions linéaires*, on peut admettre. (L'*acte 2* a pour but de démontrer cette loi.)

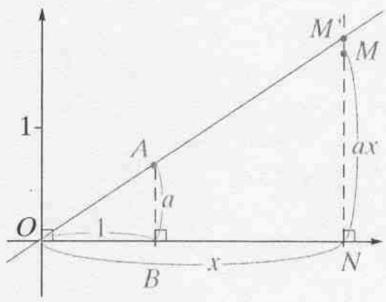
Acte 2

Dans le repère d'origine O ci-contre, on a placé :

- le point A de coordonnées $(1 ; a)$ avec $a > 0$;
- le point M de coordonnées $(x ; ax)$ avec $x > 1$.

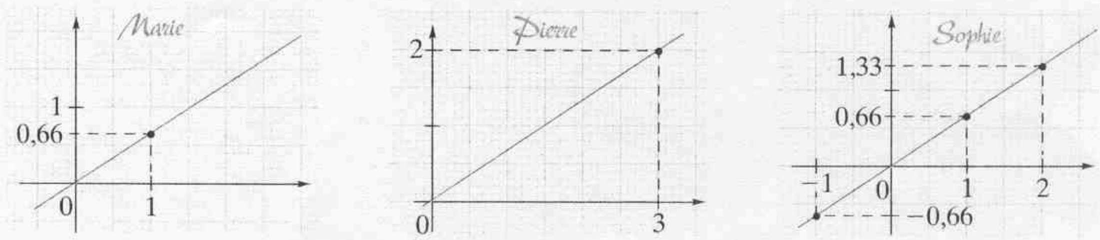
Démontrer que les points O, A et M sont alignés.

Conseil : Tracer la droite (OA) en supposant qu'elle coupe (NM) en M', puis calculer la longueur NM'. En déduire que les points M et M' sont confondus.



4 Une bonne utilisation du coefficient

À la question « *Représenter graphiquement la fonction linéaire* $x \mapsto \frac{2}{3}x$ », Marie, Pierre et Sophie ont proposé les graphiques suivants :



a) Quelle méthode semble la plus précise et la plus « économique » ?

b) Représenter graphiquement les deux fonctions linéaires $x \mapsto \frac{3}{4}x$ et $x \mapsto -\frac{4}{3}x$.

* Le mot *linéaire* vient du latin *linea* qui signifie « fait en lin ». Ce mot a évolué par la suite dans les expressions *ligne à pêche*, *ligne géométrique*, puis *ligne droite*.

I. Fonction affine - fonction linéaire - fonction constante

Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :

Tarif 1 : 8€ l'entrée
Tarif 2 : 4€ l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40€
Tarif 3 : L'abonnement pour la saison qui coûte 92€

1) Calculer pour chaque tarif, la dépense pour 6 entrées, 11 entrées puis 15 entrées.
Dans chaque cas, quel est le tarif le plus intéressant ?

2) Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x la dépense pour la saison pour chaque tarif.

3) a) Avec le tarif 2, calculer le prix dépensé pour 18 entrées.
b) Calculer de même : *f(2), h(2), g(4), g(7) et f(10)*.
c) Trouver x tel que $g(x) = 84$. Interpréter le résultat.

4) a) Pour chaque tarif, représenter sur un même graphique la dépense en fonction du nombre d'entrées.
b) Répondre en utilisant le graphique :
Dans quels cas vaut-il mieux choisir un tarif plutôt qu'un autre ?

1) Tarif le plus intéressant : en vert

x entrées	x = 6	x = 11	x = 15
Tarif 1	48€	88€	120€
Tarif 2	64€	84€	100€
Tarif 3	92€	92€	92€

2) Tarif 1 : $8x$
A chaque nombre x, on associe le nombre $8x$,
On a définit une FONCTION LINEAIRE qu'on appelle *f* et on note :

$f: x \longmapsto 8x$

ou $f(x) = 8x$

$f(x)$ se lit « f de x »
Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Tarif 2 : $4x + 40$
A chaque nombre x, on associe le nombre $4x + 40$,
On a définit une FONCTION AFFINE qu'on appelle *g* et on note :

$g: x \longmapsto 4x + 40$

ou $g(x) = 4x + 40$

Tarif 3 : 92
A chaque nombre x, on associe le nombre 92,
On a définit une FONCTION CONSTANTE qu'on appelle *h* et on note :

$h: x \longmapsto 92$

ou $h(x) = 92$

Définitions : a et b étant deux nombres fixés
$x \longmapsto ax + b$ est appelée fonction affine
$x \longmapsto ax$ est appelée fonction linéaire
$x \longmapsto b$ est appelée fonction constante.

Propriété : Une fonction linéaire est une fonction affine où b = 0.

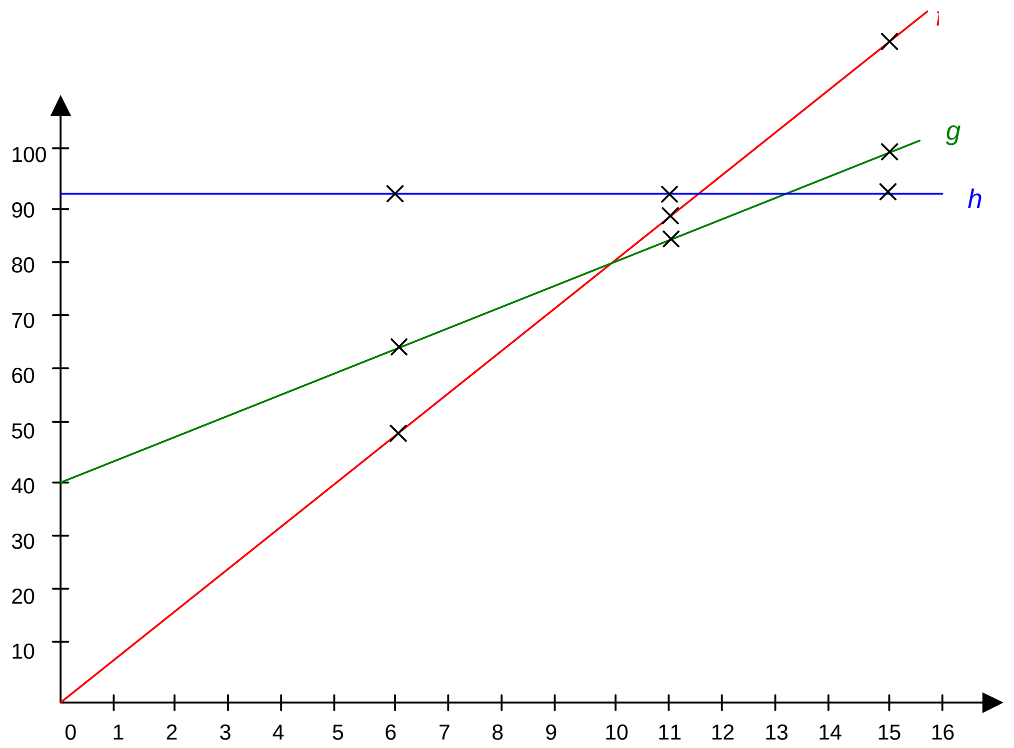
3) a) $x = 18$
Calculons $g(18) = 4 \times 18 + 40 = 112$
Avec le tarif 2 : 18 entrées coûtent 112€.

On dit que :
L'IMAGE de 18 par g est 112 et on note :
$g(18) = 112$
$g : 18 \longmapsto 112$

b) $f(2) = 16$; $h(2) = 92$; $g(4) = 56$; $g(7) = 68$; $f(10) = 80$

c) $g(x) = 84$
$4x + 40 = 84$
$4x = 44$
$x = 11$
Avec le tarif 2, 11 entrées coûtent 84€.

4) a) Pour construire les représentations graphiques, on utilise le tableau de la question 1).
Si on ne dispose pas d'un tel tableau, il faut en faire.



Les représentations graphiques sont des droites.

Propriétés :
1) Toute fonction affine est représentée par une droite.
2) Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine.
3) Une fonction constante est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

b) Entre 0 et 10 entrées : le tarif 1
Entre 10 et 13 entrées : le tarif 2
Plus de 13 entrées : le tarif 3

Exercice d'application :

Dans la liste des fonctions suivantes, donner celles qui représentent des fonctions linéaires. On précisera, dans ce cas, leur coefficient.

$f : x \mapsto 4x$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{2x}{7}$ $\quad h : x \mapsto 3x + 7$

$i : x \mapsto -7x^2$ $\quad j : x \mapsto -3\dfrac{x}{4}$ $\quad k : x \mapsto \sqrt{3x}$

$l : x \mapsto (x-1)^2 - (x^2+1)$ $\quad m : x \mapsto x^2 + 6x + 9 - x^2 - 3x + 5$ $\quad n : x \mapsto 3(x-7) - 8x - 5 - 5(x+4)$

II. Déterminer une fonction linéaire à partir d'une image

Méthode:

Déterminer la fonction linéaire *f* vérifiant : *f*(5) = 6

f est une fonction linéaire donc de la forme $f(x) = \text{a}x$

Déterminer f revient à trouver a.

f(5) = 6
donc $x = 5$ et $\text{a}x = 6$
donc a x 5 = 6
soit a = 6/5

d'où $f(x) = \dfrac{6}{5}x$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit f la fonction linéaire définie par : x $\longmapsto$ -2x.
1. Calculer f(3), f(-2), f(7).
2. Quelles sont les images par f de -1, 6, 3/2 ?
3. Trouver le nombre qui a pour image 7.

Exercice 2 :

Soit f la fonction linéaire de coefficient - 3/2
1. Calculer f(-2), f(3) et f(10).
2. Quelles sont les images par f de 2/3, 1 et 7.
3. Trouver le nombre qui a pour image -2.

Exercice 3 :

1. f est une fonction linéaire définie par : f(3) = 5.
Déterminer son coefficient.
2. Quelles sont les images par f de -1, 6, 3/5 ?
3. Représenter graphiquement dans un repère orthonormal (O, I, J) la fonction linéaire f.

Exercice n°4 :

a. Déterminer la fonction g telle que $g(6) = -12$.

………
………
………
…………………………………………

b. Quel nombre a pour image -6 par la fonction $h(x) = -3x$

………
………
………
…………………………………………

c. Quelle est l'image de 8 par la fonction $j(x) = -6x$

………
………
………
…………………………………………

d. Quel nombre a pour image -5 par la fonction $m(x) = -10x$

………
………
………
…………………………………………

e. Déterminer la fonction linéaire telle que $s(-6) = -66{,}6$.

………
………
………
…………………………………………

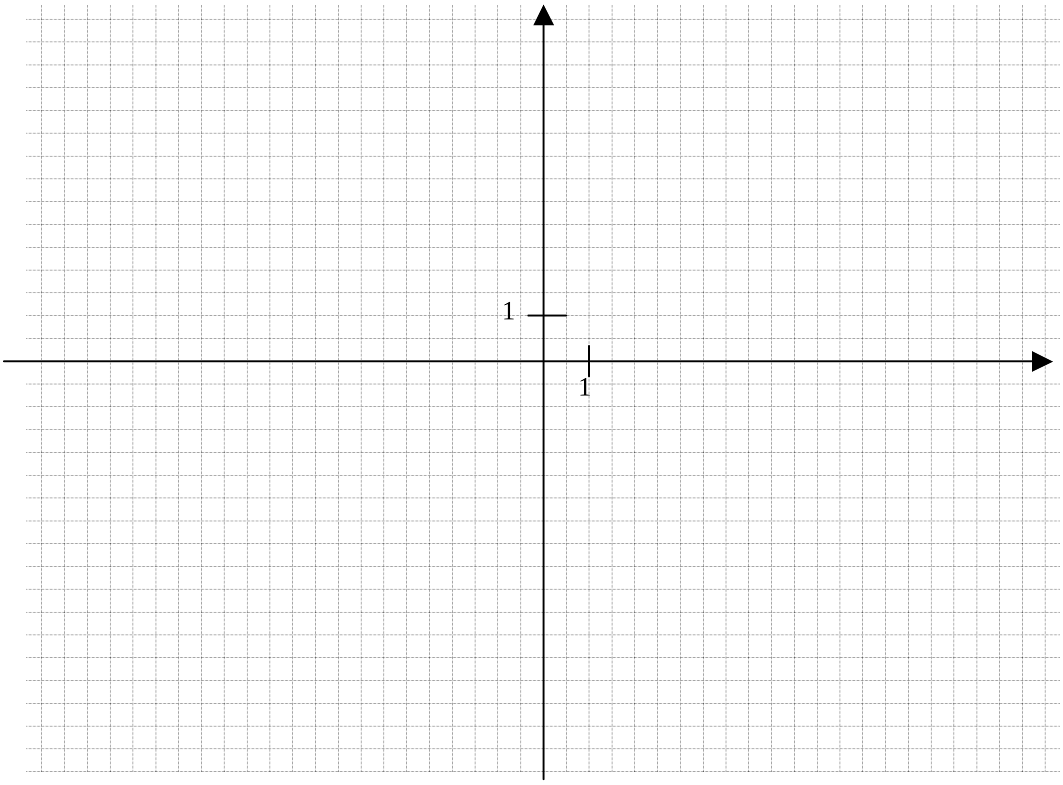
Exercice n°5 :

Voici un tableau de proportionnalité incomplet :

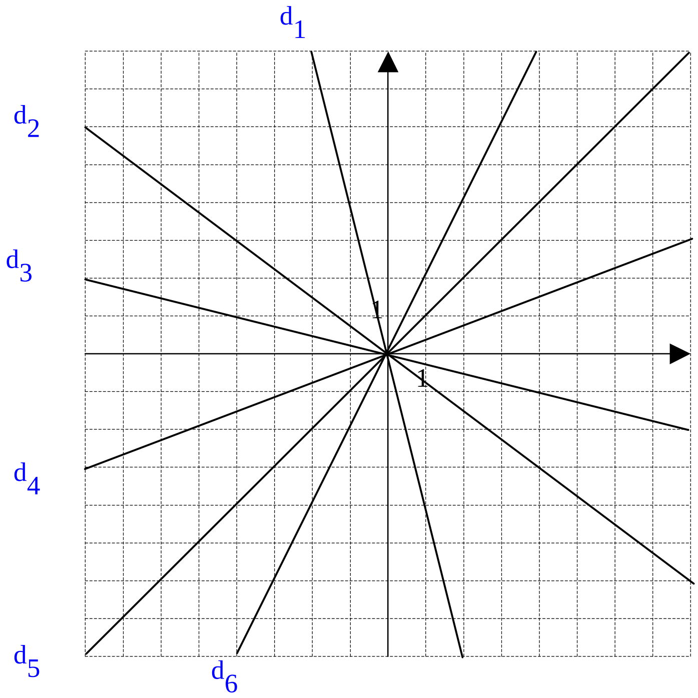
4	**7**	**−9**	**0**	**1**	**10**	
5						**25**

1. Complétez-le.
2. Quelle est la fonction linéaire associée à ce tableau ?
3. Complétez le graphique ci-dessous de la manière suivante : chaque point a pour abscisse un nombre de la première ligne du tableau de proportionnalité ci-dessus, et pour ordonnée le nombre de la deuxième ligne situé en-dessous.

Que constatez-vous sur le graphique ?



Exercice n°6 :



Sur la figure ci-contre, chaque droite est la représentation graphique d'une fonction linéaire.
Déterminer les fonctions linéaires correspondantes (on nommera g_1 la fonction linéaire dont la représentation graphique est d_1, etc.)

III. Déterminer une fonction affine à partir de deux images

Méthode:

Déterminer la fonction affine *f* vérifiant : $f(2) = 4$ et $f(5) = 1$

f est une fonction affine donc de la forme $f(x) = ax + b$

Déterminer f revient à trouver a et b.

$f(2) = 4$
donc $x = 2$ et $ax + b = 4$
donc a x 2 + b = 4
soit 2a + b = 4

$f(5) = 1$
donc $x = 5$ et $ax + b = 1$
donc a x 5 + b = 1
soit 5a + b = 1

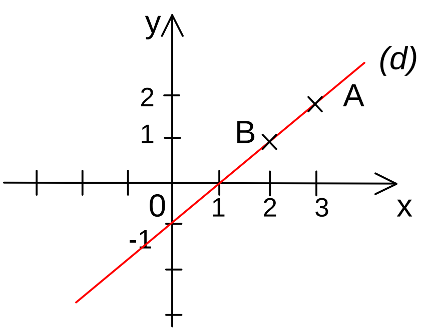
$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 5a + b = 1 \end{cases} \cdots$$

après résolution du système d'équations, on trouve :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

d'où $f(x) = -x + 6$

IV. Fonction affine et droite associée



Soit *(d)* la représentation graphique de la fonction affine *f*(x) = x – 1
On admettra que la droite *(d)* a pour équation y = x – 1.
Ce qui veut dire que tous les points de coordonnées (x ; y) appartenant à la droite *(d)* vérifient l'équation y = x – 1

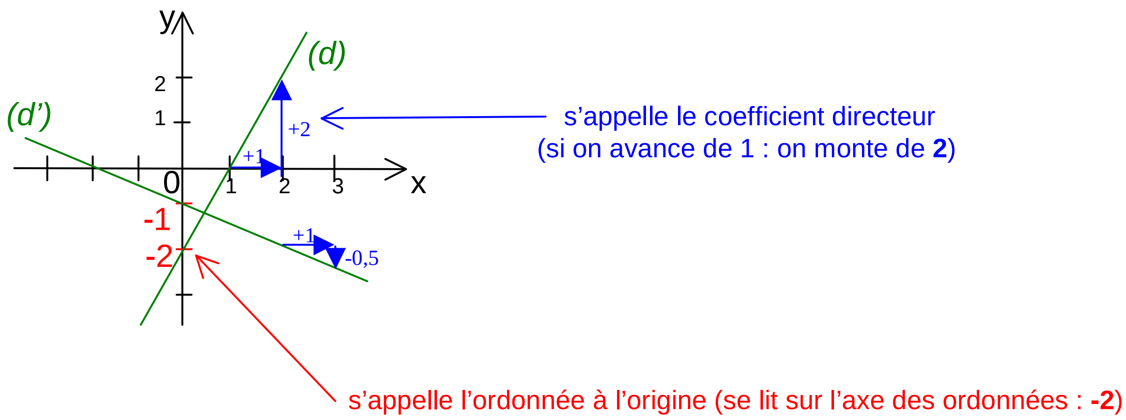
Les points A(3 ; 2), B(2 ; 1) et C($\frac{9}{2}$; 1) appartiennent-ils à la droite *(d)* ?

2 = 3 – 1 donc A $\in$ *(d)*
1 = 2 – 1 donc B $\in$ *(d)*
$1 \neq \frac{9}{2} - 1$ donc C $\notin$ *(d)*

Toute fonction affine *f* : x $\mapsto$ ax + b est représentée par une droite d'équation
y = ax + b.
Pour une fonction linéaire : b = 0.

V. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

1) Exemple



Pour *(d)* : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est -2
On retrouve ainsi l'équation de *(d)* : y = 2x - 2

Pour *(d')* : Le coefficient directeur est -0,5
L'ordonnée à l'origine est -1
On retrouve ainsi l'équation de *(d')* : y = -0,5x - 1

2) Définition

La droite *(d)* d'équation y = ax + b a pour coefficient directeur a et pour ordonnée à l'origine b.

Remarques :
- Si le coefficient directeur est ***positif*** alors la droite « ***monte*** ». On dit que la fonction affine associée est ***croissante***.
- Si le coefficient directeur est ***négatif*** alors la droite « ***descend*** ». On dit que la fonction affine associée est ***décroissante***.
- Si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points de la droite *(d)* d'équation y = ax + b alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exercices d'application :

Exercice n°1

1. Tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \longrightarrow -2x^2 + 4$
2. Lire sur le graphique l'image de -3 par f.
3. Sur le graphique, quel nombre a pour image -5 par f?

Exercice n°2

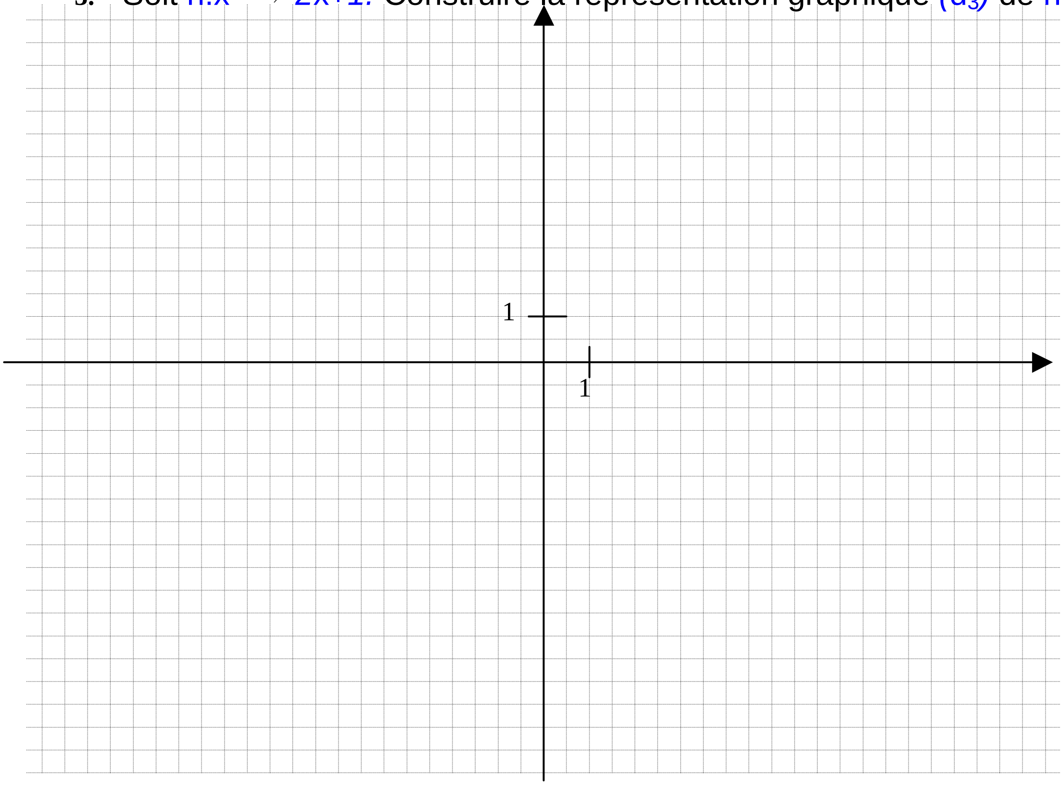
1. Tracer la représentation graphique de la fonction $g : x \longrightarrow (x + 1)(x - 2)x$
2. Sur le graphique, quels nombres ont pour image 0 par g?
3. En déduire les solutions de l'équation $(x + 1)(x - 2)x = 0$.

Sur le graphique, quelle est l'image de -2 par g ?

Exercice n°3

Sur le graphique ci–dessous :

1. Soit $f : x \longrightarrow 2x+3$.
   - **a.** Calculer $f(-1)$.
   - **b.** Calculer $f(3)$.
   - **c.** À partir des résultats précédents, construire la représentation graphique (d_1) de f.
   - **d.** Quelle est l'ordonnée à l'origine de (d_1)?
   - **e.** Quel est le coefficient directeur de (d_1)?
2. Soit $g : x \longrightarrow -3x-1$.
   - **a.** Calculer $g(0)$.
   - **b.** Calculer $g(-2)$.
   - **c.** Construire la représentation graphique (d_2) de g.
   - **f.** Quelle est l'ordonnée à l'origine de (d_2)?
   - **g.** Quel est le coefficient directeur de (d_2)?
3. Soit $h : x \longrightarrow -2x+1$. Construire la représentation graphique (d_3) de h.

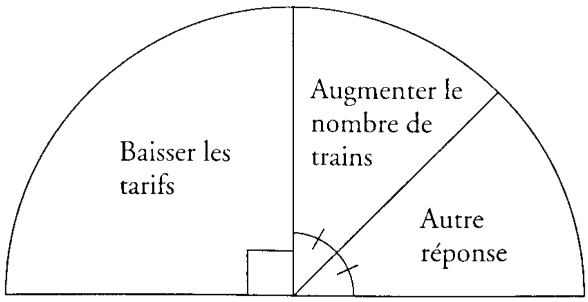


Exercice n°4

Première partie

La SNTF, Société Nationale des Trains Français, a effectué une enquête auprès des jeunes de 15 à 25 ans.
Les réponses à la question : « Que pourrait faire la SNTF pour vous permettre de voyager plus souvent par le train ?» sont représentées dans le diagramme ci-après :

1. Quel est le pourcentage de jeunes pensant qu'il faut augmenter le nombre de trains ?
2. 516 jeunes ont répondu qu'il faudrait baisser les tarifs.
Quel est le nombre total de jeunes ayant répondu à cette enquête ?



Deuxième partie

À la SNTF, le prix normal d'un billet est proportionnel au nombre de kilomètres parcourus : le prix demandé pour 1 km est de 0,80 F.
la SNTF décide de proposer un tarif réduit aux 15-25 ans, selon deux possibilités :
- tarif1 : réduction de 25 % sur tous les trajets.
- tarif2 : achat d'une carte «15-25 » au prix de 220 F valable 1 an, permettant d'obtenir une réduction de 50% sur tous les trajets.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Au tarif 1	Au tarif 2
Dépense annuelle pour 500 km		
Dépense annuelle pour 2 000 km		

2. Soit y_1 la dépense annuelle en francs pour x km au tarif1, et y_2 la dépense annuelle pour x km au tarif 2.
Montrer que $y_1 = 0{,}6x$ et $y_2 = 220 + 0{,}4x$.
3. a) Résoudre l'inéquation $200 + 0{,}4x < 0{,}6x$.
b) Quand est-il plus intéressant d'acheter la carte «15-25 » ?
4. a) Dans le plan muni d'un repère orthogonal, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes :
$(d_1)\ x \mapsto 0{,}6x$ $(d_2)\ x \mapsto 220 + 0{,}4x$
On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour représenter 200 km et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour représenter 100 F.
b) Retrouver graphiquement le résultat de la question 3. b).

Troisième partie

La SNTF décide de mettre en service un train rapide entre les villes de Cherbourg et Caen, distantes de 132 km.
1. Lorsque le train effectue le trajet direct sans arrêt, sa vitesse moyenne est de 165 km/h.
En combien de minutes effectue-t-il le trajet Caen-Cherbourg ?
2. Ce train part de Cherbourg à 6 h 15 min, effectue plusieurs arrêts et arrive à Caen à 7 h 21 min.
a) Quelle est la durée du trajet?
b) Quelle est, en km/h, sa vitesse moyenne, arrêts compris, sur le trajet Cherbourg-Caen ?

<u>Exercice n°5</u>

Remarque : les parties 1 et 2 sont indépendantes.

La société « Eau fraîche » livre à ses clients de l'eau de source contenue dans des bonbonnes consignées.

Première partie

1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+3y=6300 \\ 4x+y=3900 \end{cases}$$

2) A la première livraison, Monsieur Tétuanui reçoit 3 bonbonnes ; il paye 6 300 FCP correspondant au prix de l'eau et à la consigne des 3 bonbonnes.
A la livraison suivante, il reçoit 4 bonbonnes ; il paye 3900 FCP correspondant à la consigne de la bonbonne supplémentaire et au prix de l'eau livrée.
Quel est le prix de l'eau contenue dans une bonbonne?
Quel est le prix de la consigne d'une bonbonne?

Deuxième partie

Pour acheter de l'eau minérale, une famille a le choix entre deux possibilités.

- Possibilité 1 : Acheter l'eau dans des bouteilles de 1,5 l au prix de 90 FCP la bouteille.
- Possibilité 2 : Se faire livrer l'eau dans des bonbonnes par la société « Eau fraîche » ; les bonbonnes sont posées sur un distributeur réfrigérant.

Le prix d'un litre d'eau est de 30 FCP et la location du distributeur est de 2 000 FCP par mois.

1) Calculer le prix d'un litre d'eau dans la première possibilité.

2) Soit x le nombre de litres d'eau consommée en un mois et y le prix de revient de cette eau.

a) Exprimer y en fonction de x dans la première possibilité.

b) Exprimer y en fonction de x dans la deuxième possibilité.

3) Sur une feuille de papier millimétré, on construit un repère orthogonal ; on prendra :

- sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 unités ;
- sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 500 unités.

a) Représenter graphiquement la fonction D_1 x α 60x.

b) Représenter graphiquement la fonction D_2 x α 30x+2000.

4) En utilisant le graphique, dire à partir de quelle consommation mensuelle la deuxième possibilité est moins chère que la première possibilité ; tracer tous les pointillés utiles à la lecture.

5) a) Résoudre l'inéquation : $30x+2000<60x$

b) En déduire la valeur exacte de la consommation mensuelle pour laquelle la deuxième possibilité est moins chère que la première possibilité.

Exercice n°6

Première partie

Bruno dispose d'un plan de son studio à l'échelle $\frac{1}{100}$: c'est un rectangle de longueur 4,9 cm et de largeur 4 cm.

1) Calculer les dimensions réelles en m du studio.

2) Calculer l'aire réelle du studio en m^2.

Deuxième partie

Pour recouvrir le sol de son studio, Bruno cherche à se procurer 20 m^2 de moquette.
Il s'informe des tarifs dans deux magasins, Toumoquette et Beautapis.
Comme on est en fin de saison, chaque magasin propose des conditions exceptionnelles :

- chez Toumoquette, la pose de la moquette est gratuite ;
- chez Beautapis, on accorde un rabais de 20% sur le prix de la moquette, mais il faudra payer la pose qui coûte 520 F.

1) a) Bruno choisit chez Toumoquette une moquette qui coûte 90 F le m^2. Calculer la dépense de Bruno.

b) Bruno choisit chez Beautapis une moquette qui coûte également 90 F le m^2, mais avant rabais.
Calculer la dépense de Bruno, pose comprise.

2) Soit x le prix du m^2 de moquette, T le prix payé chez Toumoquette, B le prix payé chez Beautapis.

a) Écrire T en fonction de x.

b) Vérifier que chez Beautapis, le prix pour une moquette à x F le m^2, est égal, après la réduction de 20 %, à $16x$.

c) En conclure que B = $16x + 520$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormal.
Sur une feuille de papier millimétré, construire ce repère de manière que :

- l'origine soit placée en bas à gauche;
- en abscisse, 1 cm représente 10 F;
- en ordonnée, 1 cm représente 200 F.

Soient d_1 et d_2 les fonctions :

$x \mapsto 20x$ (d_1)

$x \mapsto 16x + 520$ (d_2)

Tracer les représentations graphiques de d_1 et d_2 dans ce repère.

4) Déterminer, par lecture graphique, le magasin le plus avantageux en fonction du prix du m^2 de moquette.

5) Retrouver, par calcul, pour quelles valeurs de x le prix T est inférieur ou égal au prix B.

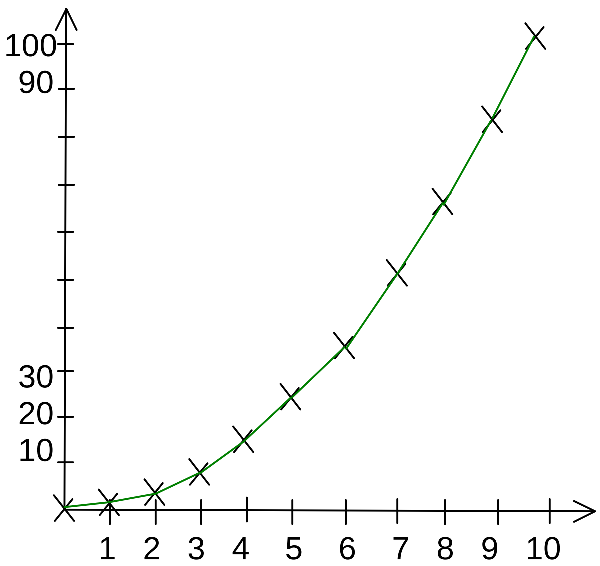
VI. Prolongement : exemple d'une fonction non affine

1) Exprimer l'aire f(x) d'un carré en fonction de la longueur x de ses côtés :

$f(x) = x^2$

2) Représenter cette fonction dans un repère orthogonal.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100



La représentation graphique n'est pas une droite. Il s'agit en fait d'une parabole.

VII. Systèmes d'équations

Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants ; il paie 2,80€.
Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants ; il paie 2,10€.
Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant.

Choix des inconnues :

x le prix d'un pain au chocolat
y le prix d'un croissant.

Mise en équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2{,}80 \\ x + 3y = 2{,}10 \end{cases}$$

Résolution du système d'équations :

Méthode 1: par substitutions

$\begin{cases} 3x + 2y = 2,80 \\ x + 3y = 2,10 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 2,80 \\ x = 2,10 - 3y \end{cases}$ On isole une inconnue dans une équation.

$\begin{cases} 3\,(2,10 - 3y) + 2y = 2,80 \\ x = 2,10 - 3y \end{cases}$ On substitue l'inconnue isolée dans l'autre équation.

$\begin{cases} 6,30 - 9y + 2y = 2,80 \\ x = 2,10 - 3y \end{cases}$ On résout cette équation pour trouver une inconnue.

$\begin{cases} -7y = -3,50 \\ x = 2,10 - 3y \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0,50 \\ x = 2,10 - 3 \times 0,50 \end{cases}$ Cette inconnue étant trouvée, on la substitue dans l'autre équation.

$\begin{cases} y = 0,50 \\ x = 0,60 \end{cases}$ On calcule la 2^{e} inconnue.

On note : S = { (0,60 ; 0,50) }

Conclusion :
Le prix d'un pain au chocolat est de 0,60€ et le prix d'un croissant est de 0,50€.

Méthode 2: par combinaisons linéaires

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = -16 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x - 5y = -16 \end{cases}$ $\begin{cases} \ell_1 \\ \ell_2 \end{cases}$

$-\begin{cases} 12x + 8y = 44 \\ 12x - 15y = -48 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\ell_1 \\ 3\ell_2 \end{cases}$

$23y = 92$ $4\ell_1 - 3\ell_2$

$y = 92 : 23$
$y = 4$

ℓ_1 : $3x + 2\times4 = 11$
$3x = 11 - 8$
$3x = 3$
$x = 1$

S = { (1 ; 4) }

Applications :

Exercice n°1

« 6 kg de confiture sont répartis dans 14 pots ; certains en contiennent 500g, d'autres 375 g. Combien faudra–t–il de pots de chaque sorte ? »

1. Avec 3 pots de 500g et 4 pots de 375g, quel serait le poids total de confiture et le nombre total de pots ? (écrire les calculs)
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Attribuer une lettre à chaque quantité inconnue, et écrire le système.

Exercice n°2

« La somme des poids de deux enfants est 17 kg ; la différence de ces poids est 9 kg. Quel est le poids de chacun des enfants ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°3

« Paul et Pierre choisissent des compas et des équerres (tous identiques). Paul achète deux compas et trois équerres, il paie 18 €. Pierre achète trois compas et quatre équerres, il paie 25 €. Quels sont les prix du compas et de l'équerre ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°4

« Une fleuriste présente deux types de bouquets : l'un avec 3 roses et 2 tulipes à 5,30€, et l'autre avec 3 tulipes et 4 roses à 7,50€. Quels sont les prix de la rose et de la tulipe ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°5

« Un cinéma propose deux tarifs d'entrée : l'un à 7€, l'autre à 4,50€. La vente de 227 tickets a donné une recette de 1459€. Combien de tickets de chaque sorte ont été vendus ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°6

« Le périmètre d'un rectangle est 90m. Si l'on augmente une de ses dimensions de 5 m et l'autre de 2 m, son aire augmente de 160 m². Quelles sont ses dimensions ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°7

« Lundi, un musée a reçu la visite de 140 adultes et 55 enfants. La recette s 'est élevée à 865€. Le mercredi, le tarif adulte est diminué de 25% et le tarif enfant de 50%. Ce jour–là il y a eu 180 entrées d'adultes et 20 entrées d'enfants, pour une recette de 705 €. Quels sont les tarifs pour un adulte et un enfant ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°8

« Pierre vient d'acheter 3 pains au chocolat et 2 croissants à la boulangerie. Il a payé 4,25€. Soudain il se ravise et dit au boulanger :

– Excusez–moi, je me suis trompé, c'était le contraire. Pouvez–vous me donner un pain au chocolat de moins et un croissant de plus ?

– Bien sûr, répond le boulanger.

Il fait l'échange et rend 0,25€ (25 cents) à Pierre. Quel sont les prix du croissant et du pain au chocolat ? »

1. Calculer avec des exemples.
2. Quelles sont les quantités inconnues ?
3. Écrire le système.

Exercice n°9

Dans la savane, un explorateur regarde des oiseaux et des éléphants.

Il compte , en tout, 32 pattes et 15 têtes.

Consignes :

1. Trouvez, **en expliquant la méthode utilisée**, le nombre d'oiseaux et d'éléphants.
2. Prouvez qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Exercice n°10

Un amateur de Jazz – Rock veut enregistrer l'ensemble d'un concert, qui dure exactement 180 minutes.

Pour cela, il dispose de deux sortes de mini – disques, les uns de 25 minutes, et les autres de 15 minutes, et d'un coffret pouvant contenir 10 emplacements, et il ne veut pas emmener deux coffrets pour des raisons d'encombrement.

Il souhaite que tous ses mini – disques soient complètement enregistrés.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de mini – disques de chaque sorte qu'il doit emmener.

On note par x le nombre de mini – disques de 25 minutes, et par y le nombre de mini – disques de 15 minutes.

1. Ecrire l'équation qui traduit la contrainte due au coffret.
2. Ecrire l'équation qui traduit la contrainte due à la durée du festival.
3. Trouver une méthode qui permette de résoudre ce système d'équations.

Exercice n°11

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\{ 3x + 2y = 6,6x + 2y = 9$
2. $\{ -3x + 2y = 6,6x + 2y = 9$
3. $\{ 3x - 5y = 6,6x + 2y = 9$
4. $\{ 3x - 9y = 6,6x + 2y = -9$

DM 2 : Systèmes d'équations

Exercice n°1



Sur une photo, on compte *32* pattes et *15* têtes. Sachant qu'il s'agit d'oiseaux et d'éléphants, déterminer le nombre de chaque espèce, en détaillant votre démarche.

Exercice n°2

Paul achète *15* viennoiseries : des pains au chocolat et des croissants. Un croissant coûte *1 €*. Un pain au chocolat coûte *1,15 €*. Paul en a au total pour *16,50 €.* On veut savoir combien de croissants et de pains au chocolat il a achetés.

Soit x le nombre de pains au chocolat, et y le nombre de croissants.

1. Exprimer en fonction de x et de y le nombre total de viennoiseries achetées.
2. Exprimer en fonction de x et de y le prix total dépensé pour les viennoiseries.
3. Utiliser ces deux égalités pour trouver le nombre de croissants et le nombre de pains au chocolat.
4. Vérifier que les valeurs trouvées répondent aux conditions de l'énoncé.

Exercice n°3

Quand on leur demande leurs poids, Xavier et Yann donnent cette énigme :
« 3 Xaviers et *7* Yanns pèsent ensemble *570* kg.
3 Xaviers et *5* Yanns pèsent ensemble *450* kg ».

1. Trouver directement combien pèsent « *2* Yanns. »
2. En déduire le poids de Yann.
3. En déduire le poids de Xavier.
4. Vérifier que les valeurs trouvées répondent aux conditions de l'énoncé.

Exercice n°4

Virginie achète *2* cahiers et *3* livres de poche pour *10 €.*
Son ami Yann achète *4* cahiers et *5* livres de poche pour *19 €.*
Calculer le prix en euro d'un cahier et celui d'un livre de poche en expliquant votre démarche, puis vérifier que les valeurs trouvées répondent aux conditions de l'énoncé.

Exercice n°5

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} 5x + 7y = 8 \\ 10x + 21y = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + y = 12 \\ -3x + 6y = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 12x - 7y = -6 \\ 8x + 4y = 3 \end{cases}$